Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023

Prof. Dr. A. Shnirman

Dr. A. Pavlov, A. Reich

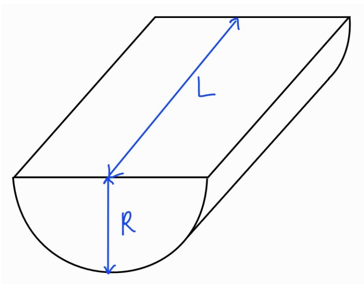
Blatt 12

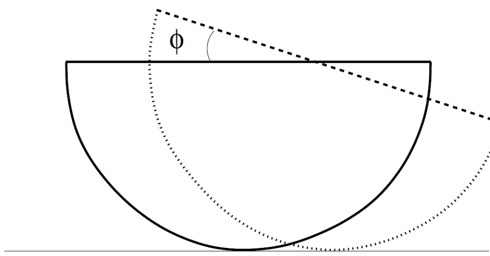
Abgabe 21.07.2023, Besprechung 25.07.2023

Die Anmeldung zur Vorleistung im Campus-System ist nun freigeschaltet.
Bitte melden Sie sich so bald wie möglich an!

1. Wippender Halbzylinder (12 Punkte)

Ein Halbzylinder mit konstanter Massendichte ρ, Länge L und Radius R führt im Schwerefeld eine Schaukelbewegung auf einer horizontoalen Ebene aus (er rollt dabei, ohne auf der Ebene zu rutschen).





a) Wo liegt der Schwerpunkt des Halbzylinders? Bestimmen Sie das Trägheitsmoment entlang einer Achse parallel zu L bezüglich eines Koordinatensystems mit Ursprung im Schwerpunkt. (4 Punkte)
Hinweis: Benutzen Sie den Steiner'schen Satz.

b) Benutzen Sie den Winkel ϕ als verallgemeinerte Koordinate und bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L(\dot{\phi}, \phi)$. (5 Punkte)

c) Finden Sie die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen $\phi \ll 1$ und bestimmen Sie die Frequenz der kleinen Schwingungen um die Ruhelage ($\phi = 0$). (3 Punkte)

2. Euler-Winkel (8 Punkte)

Eine beliebige Drehmatrix $\hat{D}$ kann durch die Euler-Winkel (φ, θ, ψ) parametrisiert werden mit

$$\hat{D}(\varphi, \theta, \psi) = \hat{D}_z(\psi)\hat{D}_x(\theta)\hat{D}_z(\varphi)$$

und

$$\hat{D}_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{D}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

a) Finden Sie die Drehmatrix $\hat{D}(\varphi, \theta, \psi)$ durch explizite Matrixmultiplikation. (3 Punkte)

b) Wie lauten die Euler-Winkel für eine Rotation um den Winkel α um die y-Achse? (2 Punkte)

Die Basisvektoren $\vec{e}_i(t)$ des körperfesten Systems eines rotierenden Körpers lassen sich mit den Basisvektoren $\vec{n}_i$ des Inertialsystems durch die oben definierte Drehmatrix ausdrücken mittels

$$\vec{e}_i(t) = \sum_j D_{ij}(t)\vec{n}_j,$$

wobei $D_{ij}(t)$ die Komponenten der Matrix $\hat{D}(t) = \hat{D}(\varphi(t), \theta(t), \psi(t))$ sind. Die Bewegungsgleichungen lauten $\dot{\vec{e}}_i(t) = \vec{\Omega}(t) \times \vec{e}_i(t)$ mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}(t)$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Komponenten von $\vec{\Omega}(t) = \sum_i \Omega_i^{(e)}(t)\, \vec{e}_i(t)$ im körperfesten System ausgedrückt werden können mittels

$$\Omega_1^{(e)} = \sum_j D_{3j}\dot{D}_{2j}, \quad \Omega_2^{(e)} = \sum_j D_{1j}\dot{D}_{3j}, \quad \Omega_3^{(e)} = \sum_j D_{2j}\dot{D}_{1j}.$$

c) Zeigen Sie: $\Omega_1^{(e)} = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi$. (3 Punkte)