Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023

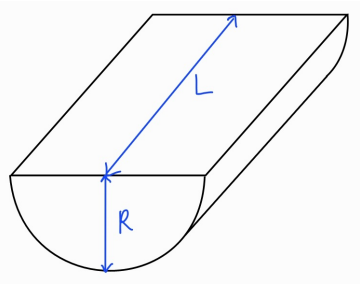
Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. A. Pavlov, A. Reich

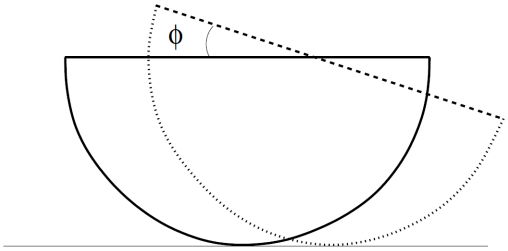
Musterlösung zu Blatt 12
Besprechung 25.07.2023

---

1. Wippender Halbzylinder (12 Punkte)

Ein Halbzylinder mit konstanter Massendichte ρ, Länge L und Radius R führt im Schwerefeld eine Schaukelbewegung auf einer horizontoalen Ebene aus (er rollt dabei, ohne auf der Ebene zu rutschen).





a) Wo liegt der Schwerpunkt des Halbzylinders? Bestimmen Sie das Trägheitsmoment entlang einer Achse parallel zu L bezüglich eines Koordinatensystems mit Ursprung im Schwerpunkt. (4 Punkte)
Hinweis: Benutzen Sie den Steiner'schen Satz.

b) Benutzen Sie den Winkel ϕ als verallgemeinerte Koordinate und bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L(\dot{\phi}, \phi)$. (5 Punkte)

c) Finden Sie die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen $\phi \ll 1$ und bestimmen Sie die Frequenz der kleinen Schwingungen um die Ruhelage ($\phi = 0$). (3 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Das Volumen eines ganzen Zylinders ist $\pi R^2 L$, das Volumen des Halbzylinders ist entsprechend $V = \frac{\pi R^2 L}{2}$. Wir nutzen im Folgenden Zylinderkoordinaten mit z-Achse parallel zu L, Ursprung im Zentrum der „Schnittfläche", x-Achse parallel zur Schnittfläche und y-Achse in den Körper hinein zeigend. Die Koordinaten des Schwerpunkts ergeben sich dann aus

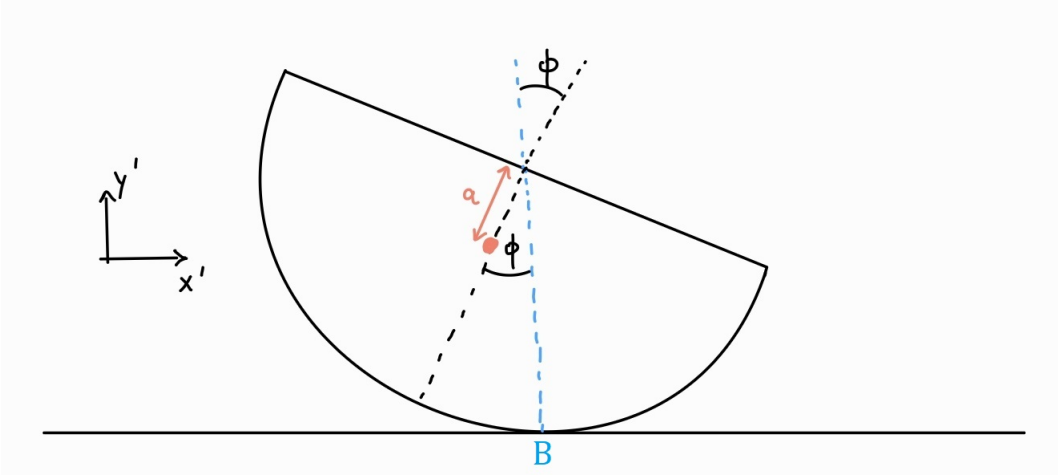
$$\vec{a} = \frac{1}{V}\int d^3r\, \vec{r} = \frac{2}{\pi R^2 L}\int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r dr \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \frac{4R}{3\pi}\vec{e}_y. \tag{1}$$

Wir setzen $a = \frac{4R}{3\pi}$. Bestimmen wir nun zunächst das Trägheitsmoment I' bezüglich der z-Achse und nutzen dann den Satz von Steiner, um die Achse zum Schwerpunkt zu verschieben. Es ist

$$I' = \rho\int d^3r(x^2+y^2) = \rho\pi L\int_0^R r dr\, r^2 = \rho\pi L R^4/4 = \frac{MR^2}{2}, \tag{2}$$

wobei wir $M = \rho V$ gesetzt haben. Mit dem Satz von Steiner ist nun das Trägheitsmoment I bezüglich einer Achse parallel zur z-Achse durch den Schwerpunkt gegeben durch

$$I = I' - Ma^2 = M(R^2/2 - a^2). \tag{3}$$



b) Die kinetische Energie setzt sich zusammen aus der Schwerpunktsbewegung und der Rotation um den Schwerpunkt. Im oben definierten körperfesten System bewegt sich der Schwerpunkt mit einer Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ um den Ursprung, also mit einer Geschwindigkeit $a\dot{\phi}$ in $\vec{e}_\phi$-Richtung. In einem ortsfesten System, mit x'-Achse nach rechts und y'-Achse nach oben, bewegt sich der Ursprung gleichzeitig mit einer Geschwindigkeit $R\dot{\phi}$ nach rechts. Es ergibt sich also

$$\dot{\vec{a}}^2 = \left| \begin{pmatrix} -a\dot{\phi}\cos\phi \\ a\dot{\phi}\sin\phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R\dot{\phi} \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \dot{\phi}^2(R^2 + a^2 - 2aR\cos\phi), \tag{4}$$

wobei wir ϕ als (um $\pi/2$ verschobenen) Polarwinkel im (x', y')-System betrachten können. Die Rotationsenergie lautet $T_R = \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2$. Insgesamt ist die kinetische Energie damit

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\vec{a}}^2 + T_R = \frac{M}{2}\dot{\phi}^2(3R^2/2 - 2aR\cos\phi). \tag{5}$$

Alternativ kann die Bewegung auch als reine Rotation um die momentane Drehachse, der Berührungslinie des Zylinders mit dem Boden, betrachtet werden. Da jeder Punkt auf dieser Berührungslinie momentan in Ruhe ist, ergibt sich die kinetische Energie als reine Rotationsenergie um diese Achse. Nennen wir den Punkt in der (x, y)-Ebene, der auf dem Boden aufliegt, B. Dann ist der Abstand d zwischen Schwerpunkt und B gegeben durch

$$d^2 = R^2 + a^2 - 2aR\cos\phi, \tag{6}$$

wobei wir den Kosinussatz benutzt haben. Das Trägheitsmoment um die Achse durch B ist dann

$$I_B = I + Md^2 = M\left(\frac{3}{2}R^2 - 2aR\cos\phi\right) \tag{7}$$

und die kinetische Energie lautet

$$T = T_R^{(B)} = \frac{1}{2}I_B\dot{\phi}^2 = \frac{M}{2}\dot{\phi}^2\left(3R^2/2 - 2aR\cos\phi\right), \tag{8}$$

in Übereinstimmung mit obigem Ergebnis.

Die potentielle Energie kann ausgedrückt werden als

$$U = Mgy'_a = -Mga\cos\phi \tag{9}$$

und die Lagrangefunktion ist schließlich $L = T - U$.

c) Für kleine Winkel können wir in der Lagrangefunktion nähern $\cos\phi \approx 1 - \phi^2/2$ und den sich ergebenden Term $\sim \dot{\phi}^2\phi^2$ vernachlässigen. Es ist dann

$$L \approx \frac{M\dot{\phi}^2}{2}(3R^2/2 - 2aR) - Mga\phi^2/2. \tag{10}$$

Die Bewegungsgleichung lautet

$$M(3R^2/2 - 2aR)\ddot{\phi} + Mga\phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0 \tag{11}$$

mit der gesuchten Frequenz $\omega = \sqrt{\frac{ga}{3R^2/2-2aR}} = \sqrt{\frac{g}{R(9\pi/8-2)}}$.

2. Euler-Winkel **(8 Punkte)**

Eine beliebige Drehmatrix $\hat{D}$ kann durch die Euler-Winkel (φ, θ, ψ) parametrisiert werden mit

$$\hat{D}(\varphi, \theta, \psi) = \hat{D}_z(\psi)\hat{D}_x(\theta)\hat{D}_z(\varphi)$$

und

$$\hat{D}_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{D}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

a) Finden Sie die Drehmatrix $\hat{D}(\varphi, \theta, \psi)$ durch explizite Matrixmultiplikation. (3 Punkte)

b) Wie lauten die Euler-Winkel für eine Rotation um den Winkel α um die y-Achse? (2 Punkte)

Die Basisvektoren $\vec{e}_i(t)$ des körperfesten Systems eines rotierenden Körpers lassen sich mit den Basisvektoren $\vec{n}_i$ des Inertialsystems durch die oben definierte Drehmatrix ausdrücken mittels

$$\vec{e}_i(t) = \sum_j D_{ij}(t)\vec{n}_j,$$

wobei $D_{ij}(t)$ die Komponenten der Matrix $\hat{D}(t) = \hat{D}(\varphi(t), \theta(t), \psi(t))$ sind. Die Bewegungsgleichungen lauten $\dot{\vec{e}}_i(t) = \vec{\Omega}(t) \times \vec{e}_i(t)$ mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}(t)$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Komponenten von $\vec{\Omega}(t) = \sum_i \Omega_i^{(e)}(t)\, \vec{e}_i(t)$ im körperfesten System ausgedrückt werden können mittels

$$\Omega_1^{(e)} = \sum_j D_{3j}\dot{D}_{2j}, \quad \Omega_2^{(e)} = \sum_j D_{1j}\dot{D}_{3j}, \quad \Omega_3^{(e)} = \sum_j D_{2j}\dot{D}_{1j}.$$

c) Zeigen Sie: $\Omega_1^{(e)} = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi$. (3 Punkte)

Lösungsvorschlag

a)

$$\begin{aligned} \hat{D}_x(\theta)\hat{D}_z(\varphi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{D} &= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi & \cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Eine Rotation um den Winkel α um die y-Achse wird beschrieben durch

$$\hat{D}_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Vergleichen wir mit dem oben bestimmten $\hat{D}(\varphi, \theta, \psi)$, so folgern wir zunächst aus dem Element unten rechts $\theta = \alpha$. Aus den anderen Elementen der unteren Reihe folgt dann $\varphi = \pi/2$ und aus den Elementen in der rechten Spalte $\psi = -\pi/2$. Es ist dann leicht, sich zu überzeugen, dass auch die restlichen Elemente übereinstimmen.

c) Wir berechnen zunächst ($\cos\theta \equiv c_\theta, \sin\theta \equiv s_\theta$)

$$\dot{D}_{21} = \dot{\varphi}(s_\psi s_\varphi - c_\psi c_\theta c_\varphi) + \dot{\theta} s_\varphi s_\theta c_\psi + \dot{\psi}(-c_\psi c_\varphi + s_\psi c_\theta s_\varphi), \tag{13}$$

$$\dot{D}_{22} = \dot{\varphi}(-s_\psi c_\varphi - c_\psi c_\theta s_\varphi) - \dot{\theta} c_\varphi s_\theta c_\psi + \dot{\psi}(-c_\psi s_\varphi - s_\psi c_\theta c_\varphi), \tag{14}$$

$$\dot{D}_{23} = \dot{\theta} c_\theta c_\psi - \dot{\psi} s_\theta s_\psi. \tag{15}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \Omega_1^{(e)} &= D_{31}\dot{D}_{21} + D_{32}\dot{D}_{22} + D_{33}\dot{D}_{23} \\ &= \dot{\varphi}(s_\psi s_\varphi^2 s_\theta - s_\theta s_\varphi c_\psi c_\theta c_\varphi + s_\psi c_\varphi^2 s_\theta + c_\psi s_\theta c_\theta s_\varphi c_\varphi) \\ &\quad + \dot{\theta}(s_\varphi^2 s_\theta^2 c_\psi + c_\varphi^2 s_\theta^2 c_\psi + c_\theta^2 c_\psi) \\ &\quad + \dot{\psi}(-s_\theta s_\varphi c_\psi c_\varphi + s_\psi s_\theta c_\theta s_\varphi^2 + s_\theta c_\varphi c_\psi s_\varphi + s_\psi s_\theta c_\theta c_\varphi^2 - s_\theta c_\theta s_\psi) \\ &= \dot{\varphi} s_\psi s_\theta + \dot{\theta} c_\psi. \end{aligned}$$