Maxwellgleichungen

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (Gaußsches Gesetz)
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (Gaußsches Gesetz für Magnetfelder)
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Induktionsgesetz)
$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}$ (Durchflutungsgesetz)
Kontinuitätsgleichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Potentiale

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$
Eichinvarianz:
$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$, $\phi' = \phi - \frac{\partial f}{\partial t}$ für beliebige $f(t, \vec{r})$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (Coulombeichung)
$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ (Lorentzeichung)

Wellengeleichung

Felder im Vakuum:
$\Box \vec{E} = 0$, $\Box \vec{B} = 0$, $\Box = (\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2})$, $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0$
Potentiale allgemein:
$\Box \vec{A} - \vec{\nabla} L = -\mu_0 \vec{j}$, $\Box \phi + \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$,
wobei $L = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}$ (= 0 in Lorentzeichung)
allgemeine Lösung in Lorentzeichung:
$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(t_{ret}, \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} dV_{\vec{r}_1}$,
$\phi(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(t_{ret}, \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} dV_{\vec{r}_1}$,
wobei $t_{ret} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_1|}{c}$

Elektrostatik

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}_1) \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} dV_{\vec{r}_1}$
$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \to \vec{\nabla}^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$
$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} dV_{\vec{r}_1}$ für $\phi(\vec{r} \to \infty) \to 0$

Multipolentwicklung

$\phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{r}_l t_{lk} \vec{r}_k}{r^5} \right)$
$Q = \int_V \rho(\vec{r}) dV_{\vec{r}}$, $\vec{p} = \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV_{\vec{r}}$ (Mono- und Dipol)
$t_{lk} = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r})(3\vec{r}_l \vec{r}_k - \vec{r}^2 \delta_{lk}) dV_{\vec{r}}$ (Quadrupol)
$\vec{E}_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(3\frac{\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{p})}{r^2} - \vec{p} \right)$, $\vec{F}_{dip} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = \vec{p}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$
$U_{dip} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$, $\vec{N}_{dip} = \vec{p} \times \vec{E}$ (Energie und Drehmoment)

Magnetostatik

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$
$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{r}_1) \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} dV_{\vec{r}_1}$
$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \to \vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$, (mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \overset{!}{=} 0$)
$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} dV_{\vec{r}_1}$ für $\vec{A}(\vec{r} \to \infty) \to 0$

Felder in Materie

$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$, allgemein: $\vec{E} \nparallel \vec{P}$, $\vec{B} \nparallel \vec{M}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_{geb}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{frei}$, $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{frei}$, $\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{j}_{geb}$
lineare isotrope Materialien: $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$
$\epsilon_r = 1 + \chi_e \to \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$
$\mu_r = 1 + \chi_m \to \vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B}$
Grenzbedingungen:
$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$
$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_{frei}$ (= Flächenladungsdichte)
$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$
$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{k}_{frei}$ (= Flächenstromdichte)
Ohmsches Gesetz: $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

bewegte Ladungen

$\phi(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})\left|\vec{r} - \vec{R}\right|} \right)\Bigg|_{t = t_{ret}}$
$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{\vec{\beta}(t_{ret})}{c} \phi(t, \vec{r})$,
$\vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(\vec{n} - \vec{\beta})(1 - \vec{\beta}^2)}{\left|\vec{r} - \vec{R}\right|^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} + \frac{\vec{n} \times ((\vec{n} - \beta) \times \vec{\alpha})}{\left|\vec{r} - \vec{R}\right| (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} \right)\Bigg|_{t = t_{ret}}$,
$\vec{B}(t, \vec{r}) = \frac{qc\mu_0}{4\pi} \left(\frac{(\vec{\beta} \times \vec{n})(1 - \vec{\beta}^2)}{\left|\vec{r} - \vec{R}\right|^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} + \frac{\vec{a} \times \vec{n}}{\left|\vec{r} - \vec{R}\right| (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} + \ldots \right.$
$\left. \ldots + \frac{(\vec{\beta} \times \vec{n})(\vec{\alpha} \cdot \vec{n})}{\left|\vec{r} - \vec{R}\right| (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} \right)\Bigg|_{t = t_{ret}} = \frac{1}{c} \left(\vec{n} \times \vec{E}(t, \vec{r}) \right)$,
wobei: $\vec{n}(t) = \frac{\vec{r} - \vec{R}(t)}{\left|\vec{r} - \vec{R}(t)\right|}$, $\vec{\beta}(t) = \frac{1}{c} \frac{\mathrm{d}\vec{R}(t)}{\mathrm{d}t}$, $\vec{\alpha}(t) = \frac{1}{c^2} \frac{\mathrm{d}^2 \vec{R}(t)}{\mathrm{d}t^2}$
$t_{ret} = t - \frac{1}{c} \left| \vec{r} - \vec{R}(t_{ret}) \right|$, $\vec{R}(t) :=$ Trajektorie der Ladung
$\vec{S}_{rad} = \vec{n} \frac{\vec{E}^2_{rad}}{\mu_0 c}$ (Nur die Terme mit $E \propto \frac{1}{r}$ sind relevant.)
$P_{rad} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c (1 - \vec{\beta}^2)^2} \left(\vec{\alpha}^2 - \frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha})^2}{1 - \vec{\beta}^2} \right) \overset{\beta \ll 1}{\approx} \frac{q^2 \vec{\alpha}^2}{6\pi\epsilon_0 c}$

Multipolstrahlung

$\vec{B} = \frac{1}{c}(\vec{n} \times \vec{E})$, $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$, $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E}^2 \vec{n}$, $\dddot{\vec{D}}_l = \dddot{t}_{lk} \vec{n}_k$
elektrische Dipolstrahlung:
$\vec{E}_d(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r}(\vec{n}(\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}}) - \ddot{\vec{p}})$, $P_d = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{\vec{p}}^2$
magnetische Dipolstrahlung:
$\vec{E}_m(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{1}{c} (\vec{n} \times \ddot{\vec{m}})$, $P_m = \frac{\mu_0}{6\pi c^3} \ddot{\vec{m}}^2$
elektrische Quadrupolstrahlung:
$\vec{E}_q(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{1}{3c} (\vec{n}(\vec{n} \cdot \dddot{\vec{D}}) - \dddot{\vec{D}})$, $P_q = \frac{\mu_0}{180\pi c^3} \dddot{t}_{lk} \dddot{t}_{lk}$

Kräfte und Impulse

Lorentzkraft: $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$
Kraft auf Leiter: $\vec{F} = -I \int \vec{B} \times d\vec{l}$
$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{E} \to \vec{F} = \int_V \vec{f} \, dV_{\vec{r}}$
Maxwell Tensor:
$T_{ij} = \epsilon_0 (\vec{E}_i \vec{E}_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{E}^2) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B}_i \vec{B}_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{B}^2)$
$\vec{f} = \vec{\nabla}_i T_{ij} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} \to \vec{F} = \int_{\partial V} T \, d\vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \int_V \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} dV_{\vec{r}}$
Impulse:
$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{mech}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$, $\vec{p} = \mu_0 \epsilon_0 \int_V \vec{S} \, dV_{\vec{r}}$ (Impuls der Felder)
$\vec{g} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{S}$ (Impulsdichte), $\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{mech}}{\mathrm{d}t} = 0 \to \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = \vec{\nabla}_i T_{ij}$

magnetische Dipole

$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}$, $\vec{m} = \frac{1}{2}\int_V \vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})dV_{\vec{r}} = I\int_A d\vec{A}$
$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(3\frac{\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{m})}{r^2} - \vec{m}\right)$,$\vec{F}_{dip} = \vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B})$
$U = -\vec{m}\cdot\vec{B}$, $\vec{N} = \vec{m}\times\vec{B}$ (Drehmoment)

Energie

$w = \frac{1}{2}(\epsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2) = \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H})$ (Energiedichte)
$U = \int_V w\ dV_{\vec{r}}$ (Energie)
$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \vec{E}\times\vec{H}$ (Energiestromdichte)
Energie von Ladung im Feld:
$U = q(\phi(t,\vec{r}(t)) + \dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{A}(t,\vec{r}(t)))$
Poyntingtheorem:
$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\int_V \frac{\partial w}{\partial t}\ dV_{\vec{r}} - \int_{\partial V}\vec{S}\cdot d\vec{A}$
$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = 0 \rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{S}$

Strahlung an Grenzflächen

Brechungsgesetz: $(n_{1/2} = \sqrt{\mu_{r_{1/2}}\cdot\epsilon_{r_{1/2}}})$
$n_1\sin(\alpha_1) = n_2\sin(\alpha_2)$
Fresnel Gleichungen für komplexe n_i: $(\kappa = \frac{\mu_{r_1}}{\mu_{r_2}})$
$t_s = \frac{2n_1\cos(\alpha_1)}{n_1\cos(\alpha_1)+n_2\kappa\cos(\alpha_2)}$, $r_s = \frac{n_1\cos(\alpha_1)-n_2\kappa\cos(\alpha_2)}{n_1\cos(\alpha_1)+n_2\kappa\cos(\alpha_2)}$
$t_p = \frac{2n_1\cos(\alpha_1)}{n_2\kappa\cos(\alpha_1)+n_1\cos(\alpha_2)}$, $r_p = \frac{n_2\kappa\cos(\alpha_1)-n_1\cos(\alpha_2)}{n_2\kappa\cos(\alpha_1)+n_1\cos(\alpha_2)}$
Reflexions- und Transmissionsgrad:
$R_i = r_i^*\cdot r_i,\ T_i = \left|\frac{\mathrm{Re}(n_2)\cos(\alpha_2)}{\mathrm{Re}(n_1)\cos(\alpha_1)}\right| t_i^*\cdot t_i,\ T_i + R_i = 1$
Senkrechter Einfall:
$R_\perp = \frac{|n_1-n_2|^2}{|n_1+n_2|^2}$, $T_\perp = \frac{4\,\mathrm{Re}(n_1n_2)}{|n_1+n_2|^2}$