Aufgabe 1

a)

$$U = \phi(\vec{x}_2) - \phi(\vec{x}_1) = \int_C \vec{E} d\vec{s} = \int_C \nabla\phi d\vec{s}$$

Wobei der Weg C zwischen $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ beliebig ist, da rot$\vec{E} = 0$ ist.
b)

$$\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \nabla f(\vec{x}) d\vec{x} = f(\vec{x}_2) - f(\vec{x}_1) = \pi^3$$

c)

Aufgabe 2

Das lässt sich am besten mittels Integralsatz von Gauß berechnen:

$$\int \vec{E} d\vec{A} = \int \nabla \vec{E} dV$$

Da es sich um eine Kugelsymmetrische Ladungsverteilung handelt ist $\vec{A} \parallel \vec{E}$:

$$\begin{aligned}
\int E dA &= \int \nabla \vec{E} dV \\
\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E\, r'^2 \sin\theta d\theta d\phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \frac{\rho}{\epsilon_0} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi
\end{aligned}$$

Befindet man sich innerhalb der Kugel so ist $R = r'$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E\, r'^2 \sin\theta d\theta d\phi &= \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{r'} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\
E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r' \\
\vec{E}_i &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r' \hat{e}_r
\end{aligned}$$

Befindet man sich außerhalb der Kugel ist R=R:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E\, r'^2 \sin\theta d\theta d\phi &= \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\
E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \\
\vec{E}_a &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \hat{e}_r
\end{aligned}$$

Für das Potential gilt $\phi(\infty) = 0$:

$$\begin{aligned}
\phi &= -\int_r^{\infty} \vec{E} d\vec{r}' = -\int_r^{\infty} E dr' \\
\phi_i &= -\int_r^{R} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r' dr' = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} r^2 - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \\
\phi_a &= -\int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a)

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} d\vec{r}$$

Das E-Feld berechnet sich wieder mittels Gauß, hier gilt auch $\vec{A} \parallel \vec{E}$, da es sich um einen unendlich langen Leiter handelt. Hier wird das Feld zwischen den zweil Zylindern bestimmt:

$$\begin{aligned}
\int_{R_1}^{r} E dA &= \int \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{Q}{\epsilon_0} \\
\int_0^L \int_0^{2\pi} E r d\phi dz &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\
E &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r L}
\end{aligned}$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r L} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

b)

Aufgabe 5

Die Ladung muss zuerst an der x- oder y-achse gespiegelt werden und dann an der noch nicht verwendeten Achse. Die einzelnen Potential (gegen Uhrzeigersinn):

$$\vec{r}^2 = x^2 + y^2$$

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x-d_1)^2 + (y-d_2)^2}} \\
\phi_2 &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x+d_1)^2 + (y-d_2)^2}} \\
\phi_3 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x+d_1)^2 + (y+d_2)^2}} \\
\phi_4 &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x-d_1)^2 + (y+d_2)^2}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Es tragen nur die q_{lm} was zur Entwicklung bei welche kein $e^{i\phi}$ Term besitzen. $e^{i\phi}$ist nämlich eine holomorphe Funktion, d.h.$\int_0^{2\pi} e^{i\phi} d\phi = 0$. Oder einfach m=0, Azimuthale Symmetrie. Desweitern ist nur der Term mit einem $\cos\theta$ relevant!

Für q_{lm} gilt:

$$\begin{aligned}
q_{lm} &= \int_{V'} \rho(\vec{r}') r'^l Y^\star_{lm}(\theta', \phi') dV' \\
&= \rho_0 \int_{V'} \exp\left(-\frac{r'^4}{R^4}\right) \cos\theta' r'^l Y^\star_{lm}(\theta', \phi') dV'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{00} &= \rho_0 2\pi \underbrace{\int_0^\pi \cos\theta' \sin\theta' d\theta'}_{[0.5\sin^2\theta']_0^\pi = 0} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r'^4}{R^4}\right) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} r'^2 dr' \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{10} &= \rho_0 \sqrt{3\pi} \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta' \cos^2\theta' d\theta'}_{[-\frac{1}{3}\cos^3\theta']_0^\pi = \frac{2}{3}} \underbrace{\int_0^\infty r'^3 \exp\left(-\frac{r'^4}{R^4}\right) dr'}_{R^4/4} \\
q_{10} &= \rho_0 \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{R^4}{2}
\end{aligned}$$

$$q_{20} = \rho_0 \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int\int\int r'^4 \exp\left(-\frac{r'^4}{R^4}\right) \cos\theta' \sin^2\theta' \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\right) dr' d\theta' d\phi' = 0$$

Damit gibt es nur $q_{10} = \rho_0 \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{R^4}{2}$.
Für das Potential gilt, da wir nur abfallende Potentzen betrachten!:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} q_{lm} r^{-(l+1)} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \phi) \\ &= \frac{\rho_0 R^4}{12\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} \end{aligned}$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{\rho_0 R^4}{12\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left(2\cos\theta \hat{e}_r + \sin\theta \hat{e}_\theta\right)$$