Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, Dr. Ch. Rupp

Theoretische Physik C im Wintersemester 2004/2005

Klausur

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikel-Nr.: ______________________________

Dienstag, 15.02.2005, 15:45 Uhr, Gerthsen-Hörsaal

Bearbeitungszeit: $2\frac{1}{2}$ Stunden

Erlaubte Hilfsmittel: 2 handbeschriebene A4-Seiten (1 Blatt); Wörterbuch

Beachten Sie die Formelsammlung auf Seite 4

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5
Korrektor					
Punkte					

Gesamtpunktzahl	(von 40)

Aufgabe K1: *Feldenergie* 6 Punkte

Berechnen Sie die Feldenergiedichte und den Poynting-Vektor für eine ruhende Punktladung q in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B}$. Geben Sie das Ergebnis in Kugelkoordinaten an.

Aufgabe K2: *Multipolmomente* 8 Punkte

Ein geladener Kreisring liege in der xy-Ebene, Mittelpunkt im Ursprung, und habe den Radius a. Der Ring sei mit der Linienladungsdichte $\lambda(\phi) = \lambda_0 \cos\phi$ belegt, wobei der Winkel ϕ die Kreislinie parametrisiert.

a) Berechnen Sie alle sphärischen Multipolmomente.
Verwenden Sie die Relation $P_l^1(x) = -\sqrt{1-x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x)$ $(m > 0)$. Ihr Endergebnis soll die Konstanten $P_l'(0)$ enthalten.
(6 Punkte)

b) Zeigen Sie, daß die Multipolmomente q_{lm} für gerade Werte von l verschwinden.
(2 Punkte)

Aufgabe K3: *Fallendes Teilchen* 8 Punkte

Ein Punktteilchen mit Masse m und Ladung q falle im Schwerefeld ($\vec{F} = -mg\,\vec{e}_z$) frei entlang der z-Achse. In der xy-Ebene befinde sich eine kreisrunde Leiterschleife mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius R.

a) Geben Sie Ladungs- und Stromdichte der fallenden Punktladung an.
(2 Punkte)

b) Berechnen Sie das Vektorpotential im gesamten Raum. Vernachlässigen Sie hierbei die Retardierung, verwenden Sie also zu jedem Zeitpunkt die Gleichungen der Magnetostatik.
(3 Punkte)

c) Berechnen Sie den magnetischen Fluß durch die Leiterschleife und die induzierte elektromotorische Kraft.
(3 Punkte)

Aufgabe K4: *Elektrostatisches Potential* 8 Punkte

Gegeben sei das sog. *Debye-Hückel-Potential*

$$\Phi(\vec{x}) = q\,\frac{\mathrm{e}^{-|\vec{x}|/\lambda}}{|\vec{x}|}$$

mit $\lambda = const.$

a) Bestimmen Sie die zugehörige Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$.
Hinweis: Beachten Sie, daß $\Phi(\vec{x})$ für $|\vec{x}| \to 0$ divergiert. Das korrekte Verhalten von $\rho(\vec{x})$ für $|\vec{x}| \to 0$ finden Sie mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.
(4 Punkte)

b) Wieviel Ladung enthält eine Kugel um den Ursprung vom Radius R?
(2 Punkte)

c) Zeigen Sie: $\nabla \times \vec{E} = 0$.
(2 Punkte)

Aufgabe K5: *Elektromagnetische Wellen in kovarianter Formulierung* 10 Punkte

Wir legen für die gesamte Aufgabe die Lorentzeichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ zugrunde. Eine ebene Welle wird durch das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x} - \mathrm{i}\omega t}$$

beschrieben, wobei $\omega = c|\vec{k}|$.

a) Das zugehörige Viererpotential $A^\mu(x)$ hat die Form

$$A^\mu(x) = a^\mu\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\nu x^\nu}\ .$$

Bestimmen Sie den konstanten Vierervektor a^μ sowie k^ν in Abhängigkeit von $\vec{A}_0$, $\vec{k}$ und ω.
(3 Punkte)

b) Berechnen Sie $k_\mu A^\mu$, $A_\mu A^\mu$, $k_\mu k^\mu$.
(2 Punkte)

c) Berechnen Sie den Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right)$$

für die gegebene Welle.
(3 Punkte)

d) Zeigen Sie, daß man ohne die Lorentzeichung zu verlassen durch eine Eichtransformation erreichen kann, daß $\vec{A}_0 \perp \vec{k}$.
(2 Punkte)

Formelsammlung (Gauss-Einheiten)

Maxwellgleichungen im Vakuum:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\,\rho \qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{J}$$

Lorentzkraft: $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)$.

Lorentzkraftdichte: $\vec{f} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{J} \times \vec{B}$.

Coulomb-Gesetz: $\vec{F} = q_1 q_2 \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}$.

Potentiale: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, $\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

Eichtransformation: $\vec{A} \to \vec{A} + \nabla\Lambda$, $\Phi \to \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$.

Elektrostatik: $\Phi(\vec{x}) = \int \mathrm{d}^3x'\,\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$

Sphärische Multipolmomente:

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1}\,\frac{q_{lm}}{r^{l+1}}\,Y_{lm}(\theta,\phi)$$

$$q_{lm} = \int \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\, r^2 \sin\theta\,\rho(r,\theta,\phi)\, r^l\, Y^*_{lm}(\theta,\phi)$$

Magnetostatik: $\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3x'\,\vec{J}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$,

$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$.

Ampèresches Gesetz: $\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\, I$

Faraday: $\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

Maxwellscher Spannungstensor (Vakuum):

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left[E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)\delta_{\alpha\beta}\right].$$

Maxwellgleichungen in Materie:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\,\rho \qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{J}$$

Isotrope Medien: $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$.

Energiedichte: $u = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}\right)$.

Poyntingvektor: $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\,\vec{E} \times \vec{H}$.

Gradient in Kugelkoordinaten:

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\,\vec{e}_\phi$$

Laplaceoperator in Kugelkoordinaten:

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

Vektorformeln:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \Delta\vec{a}$$

Epsilon-Symbol:

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\,\delta_{km} - \delta_{jm}\,\delta_{kl}$$

Kugelflächenfunktionen:

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)\,(l-m)!}{4\pi\,(l+m)!}}\,P_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

$$P_l^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x) \qquad (m>0)$$

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\,P_l^m(x)$$

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$$

$$\int \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\,\sin\theta\,Y^*_{l'm'}(\theta,\phi)\,Y_{lm}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

Minkowski-Metrik: $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$.
Boost in x-Richtung:

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)\,, \quad x' = \gamma(x - \beta ct)\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z\,,$$

mit $\beta = v/c$ und $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$.
Feldstärketensor: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $(A^\mu) = (\Phi, \vec{A})$.

$$F_{0k} = E_k\,, \quad F_{ij} = -\epsilon_{ijk}B_k\,,$$

wobei $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$, $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$.
Dualer Feldstärketensor: $\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$.
$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ ist total antisymetrisch mit $\epsilon^{0123} = +1$.
Viererstrom: $(J^\mu) = (c\rho, \vec{J})$.
Maxwellgleichungen in kovarianter Form:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}J^\nu\,, \qquad \partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0\,.$$