Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, Dr. Ch. Rupp

Theoretische Physik C im Wintersemester 2004/2005

Nachklausur

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikel-Nr.: ______________________________

Mittwoch, 13. April 2005, 16:00 Uhr, Gaede-Hörsaal

Bearbeitungszeit: $2\frac{1}{2}$ Stunden

Erlaubte Hilfsmittel: 2 handbeschriebene A4-Seiten (1 Blatt); Wörterbuch

Beachten Sie die Formelsammlung auf Seite 4

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4
Korrektor				
Punkte				

Gesamtpunktzahl	(von 30)

Aufgabe NK1: *Richtig oder falsch?* 6 Punkte

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) Gegeben sei eine statische Ladungsverteilung. Die Bahnkurven geladener Testteilchen stimmen mit den elektrischen Feldlinien der Ladungsverteilung überein.

b) Drückt man das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{B}$ durch die Potentiale Φ, $\vec{A}$ aus, so sind die homogenen Maxwellgleichungen automatisch erfüllt.

c) Eine statische Ladungsverteilung befinde sich vollständig innerhalb einer gedachten Kugel vom Radius R. Das elektrische Feld ausserhalb dieser Kugel hängt im statischen Fall nur von der Gesamtladung ab.

d) Sind $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$ die Felder einer Ladungs- und Stromverteilung $(\rho_1, \vec{J}_1)$ und $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$ die Felder einer Ladungs- und Stromverteilung $(\rho_2, \vec{J}_2)$, so sind die Felder $(\vec{E}_1 + \vec{E}_2, \vec{B}_1 + \vec{B}_2)$ eine Lösung der Maxwellgleichungen mit der Ladungs- und Stromverteilung $(\rho_1 + \rho_2, \vec{J}_1 + \vec{J}_2)$.

Bewertung dieser Aufgabe: Je richtiger Antwort erhalten Sie $1,5$ Punkte, je falscher oder fehlender Antwort $-1,5$ Punkte. Sollte die Gesamtpunktzahl negativ sein, so wird auf 0 Punkte aufgerundet. Sie müssen keine Begründungen geben; gewertet wird nur „richtig" oder „falsch".

Aufgabe NK2: *Eichtransformationen* 4 Punkte

Das Viererpotential ist gegeben durch $(A^\mu) = (\Phi, \vec{A})$. Die *temporale Eichung* ist durch die Bedingung $A^0 = 0$ definiert.

Zeigen Sie, daß man beliebige Felder $\vec{A}$, Φ durch eine Eichtransformation in die die temporale Eichung bringen kann, indem Sie die erforderliche Eichfunktion angeben.

Aufgabe NK3: *Elektromagnetische Wellen in Leitern* 10 Punkte

Wir betrachten ein isotropes Medium mit der Leitfähigkeit σ und $\epsilon = \mu = 1$. In einem solchen Medium gibt es gedämpfte elektromagnetische Wellen der Form

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{x}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\vec{n}\cdot\vec{x}-\mathrm{i}\omega t}\,, \qquad \vec{B}(\vec{x},t) = \vec{B}_0\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{x}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\vec{n}\cdot\vec{x}-\mathrm{i}\omega t}\,.$$

Hierbei ist $\vec{n}$ ein beliebiger Einheitsvektor, und α und β sind reelle Konstanten.

a) Drücken Sie mit Hilfe der homogenen Maxwellgleichungen $\vec{B}_0$ durch $\vec{E}_0$ aus.
(3 Punkte)

b) Bestimmen Sie die reellen Koeffizienten α, β.
Hinweis: $\vec{J} = \sigma\vec{E}$. Verwenden Sie die Maxwellgleichungen, um einen Zusammenhang zwischen $\Delta\vec{E}$, $\partial\vec{E}/\partial t$ und $\partial^2\vec{E}/\partial t^2$ zu finden.
(4 Punkte)

c) Die Lösung der vorhergehenden Teilaufgabe lautet:

$$\alpha = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)^2}\,\right]^{-1/2}, \qquad \beta = \frac{\omega}{c}\left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)^2}\,\right]^{1/2}.$$

Berechnen Sie für die Näherung eines guten Leiters, d.h. $4\pi\sigma \gg \omega$, die Phasendifferenz sowie die relative Feldamplitude $\frac{|\vec{B}_0|}{|\vec{E}_0|}$ zwischen elektrischem und magnetischem Feld.
(3 Punkte)

Aufgabe NK4: *Kovariante Formulierung der Elektrodynamik* 10 Punkte

a) Drücken Sie die Größen $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ und $F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}$ durch $\vec{E}$, $\vec{B}$ aus.
Hinweise: Zeigen Sie zunächst, daß $\widetilde{F}^{0k} = -B_k$, $\widetilde{F}^{ij} = \epsilon_{ijk}E_k$. Sollten Sie Schwierigkeiten mit der Indexschreibweise haben, können Sie $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ (und analog $F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}$) auch als Spur eines Matrizenproduktes auffassen.
(2 Punkte)

b) Zeigen Sie: Gilt die Aussage $\vec{E} \perp \vec{B}$ in einem Inertialsystem, so gilt sie auch in jedem anderen Inertialsystem. Ist $|\vec{E}| > |\vec{B}|$ in einem Inertialsystem, so gilt dasselbe auch in jedem anderen Inertialsystem.
(4 Punkte)

c) In einem Inertialsystem seien räumlich und zeitlich konstante Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$ mit $\vec{E} \perp \vec{B}$ und $|\vec{E}| \neq |\vec{B}|$ gegeben. Zeigen Sie: Es gibt ein Inertialsystem, in dem das elektrische *oder* das magnetische Feld verschwindet. Hinweis: Boost senkrecht zu $\vec{B}$ und $\vec{E}$.
(4 Punkte)

Formelsammlung (Gauss-Einheiten)

Maxwellgleichungen im Vakuum:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\,\rho \qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{J}$$

Lorentzkraft: $\vec{F} = q \quad \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \quad .$

Lorentzkraftdichte: $\vec{f} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{J} \times \vec{B}$.

Coulomb-Gesetz: $\vec{F} = q_1 q_2\, \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}$.

Potentiale: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, $\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

Eichtransformation: $\vec{A} \to \vec{A} + \nabla\Lambda$, $\Phi \to \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$.

Elektrostatik: $\Phi(\vec{x}) = \int \mathrm{d}^3x'\, \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$

Magnetostatik: $\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3x'\, \vec{J}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$,
$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3x'\, \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$.

Ampèresches Gesetz: $\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\, I$

Faraday: $\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

Maxwellgleichungen in Materie:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\,\rho \qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{J}$$

Isotrope Medien: $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$.

Vektorformeln:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \Delta\vec{a}$$

Epsilon-Symbol:

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\,\delta_{km} - \delta_{jm}\,\delta_{kl}$$

Minkowski-Metrik: $(\eta^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Boost in x-Richtung:

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)\,, \quad x' = \gamma(x - \beta ct)\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z\,,$$

mit $\beta = v/c$ und $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Feldstärketensor: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,,\ (A^\mu) = (\Phi, \vec{A})$.

$$F_{00} = 0\,, \quad F_{0k} = E_k\,, \quad F_{ij} = -\epsilon_{ijk} B_k\,,$$

wobei $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$, $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$.

In Matrixschreibweise:

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dualer Feldstärketensor: $\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$.
$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ ist total antisymetrisch mit $\epsilon^{0123} = +1$.
In Matrixschreibweise erhält man $(\widetilde{F}^{\mu\nu})$, indem man in der Matrix $(F_{\mu\nu})$ die Ersetzungen $\vec{E} \to -\vec{B}$, $\vec{B} \to -\vec{E}$ vornimmt.

Viererstrom: $(J^\mu) = (c\rho, \vec{J})$.

Maxwellgleichungen in kovarianter Form:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}J^\nu\,, \qquad \partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0\,.$$