Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, Dr. Ch. Rupp

Theoretische Physik C im Wintersemester 2004/2005

Lösungen zur Nachklausur

Lösung zu Aufgabe NK1

a) FALSCH: Die Bahn eines Testteilchens hängt von Anfangsposition und -impuls ab, die Feldlinie aber nur von der Anfangsposition.

b) WAHR: div rot$=0$, rot grad$=0$.

c) FALSCH: Es gibt auch höhere Multipolmomente.

d) WAHR: Das Superpositionsprinzip folgt aus der Linearität der Maxwellgleichungen.

Lösung zu Aufgabe NK2

Erforderliche Eichfunktion: $\chi(\vec{x},t) = c\int_0^t \mathrm{d}t'\,\Phi(\vec{x},t')$.

Lösung zu Aufgabe NK3

a)

$$\vec{B}_0 = \frac{c}{\omega}\left(\beta + \mathrm{i}\frac{\alpha}{2}\right)\vec{n}\times\vec{E}_0\,.$$

b)

$$\left(-\Delta + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{E} = 0$$

Damit:

$$-(\alpha/2 - \mathrm{i}\beta)^2 = \frac{1}{c^2}\left(\omega^2 + 4\pi\mathrm{i}\sigma\omega\right)\,,$$

$$\beta = \frac{\omega}{c}\left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)^2}\,\right]^{1/2}$$

$$\alpha = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)^2}\,\right]^{-1/2}$$

c) Für $4\pi\sigma/\omega \gg 1$ findet man

$$\beta = \frac{1}{c}\sqrt{2\pi\sigma\omega}\,, \qquad \alpha = 2\beta\,.$$

Damit:

$$\vec{B}_0 = \frac{c}{\omega}\beta(1+\mathrm{i})\vec{n} \times \vec{E}_0\,.$$

Die Phasendifferenz ϕ zwischen $\vec{E}$ und $\vec{B}$-Feld ergibt sich aus

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = (1+\mathrm{i})/\sqrt{2}\,,$$

also $\phi = \pi/4$.

Für das Verhältnis der Amplituden ist zu beachten, daß $\vec{n} \perp \vec{E}_0$, so daß

$$\frac{|\vec{B}_0|}{|\vec{E}_0|} = \frac{c}{\omega}\sqrt{2}\,\beta = \sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\omega}} \gg 1\,.$$

Lösung zu Aufgabe NK4

a)

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$$
$$F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} = -4\vec{E}\cdot\vec{B}$$

b) $\vec{E} \perp \vec{B} = 0$ genau dann, wenn $F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} = 0$. Dies ist aber eine lorentzinvariante Aussage, da $F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}$ ein Skalar ist.

$|\vec{E}| > |\vec{B}|$ genau dann, wenn $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} < 0$. $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ ist wiederum ein Lorentzskalar, so daß sein Wert nicht vom Bezugssystem abhängt.

c) OBdA: $\vec{E} = E\,\vec{e}_y$, $\vec{B} = B\,\vec{e}_z$. Den zugehörigen Feldstärketensor sowie die Lorentzmatrix $(\Lambda^\mu{}_\nu)$ für einen Boost in x-Richtung kann man der Formelsammlung entnehmen. $F^{\mu\nu}$ transformiert sich so:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho\,\Lambda^\nu{}_\sigma\,F^{\rho\sigma}\,, \qquad F' = \Lambda\,F\,\Lambda^T\,.$$

Man findet:

$$E' = \gamma E - \beta\gamma B\,, \qquad B' = \gamma B - \beta\gamma E\,.$$

Falls $|\vec{E}| > |\vec{B}|$, können wir $B' = 0$ erreichen: $\beta = B/E$. Falls $|\vec{E}| < |\vec{B}|$, können wir $E' = 0$ erreichen: $\beta = E/B$. In beiden Fällen ist $|\beta| < 1$.