Universität Karlsruhe (TH) **WS 2007/08**

Theoretische Physik C — Elektrodynamik

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Klausur Nr. 1

Name/Matrikelnummer/Übungsgruppe:	1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe 1: Kugel mit Potential **[12]**

Auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius a um den Ursprung liege das Potential

$$V(r = a, \theta, \varphi) = V_0 \sin^2\theta \, .$$

Wie lautet das Potential im Raum außerhalb der Kugel? (weitere Randbedingung: $V(r) \to 0$ für $r \to \infty$.)

Aufgabe 2: δ–Funktionen **[$2 + 3 + 3 = 8$]**

Berechnen Sie die folgenden Integrale,

(a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+5} \delta(x-1)\, dx \, ,$$

(b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \delta(\alpha x^2 - 1)\, dx \, ,$$

(c)
$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-(t-t')^2} e^{i\omega(t-t')} \, .$$

Aufgabe 3: Kugel vor einer Ebene **[$2 + 2 + 8 = 12$]**

Eine Vollkugel vom Radius R trage die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 (R-r)^2 & r \le R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (r = |\vec{r}|) \, .$$

(a) Berechnen Sie die Ladung und das Dipolmoment der Kugel.

(b) Welche Werte haben die Multipolmomente $q_{\ell m}$ mit $\ell > 1$?

(c) Die Kugel befinde sich bei $z = a > R$ vor der geerdeten x–y–Ebene. Wie lautet die induzierte Oberflächenladungsdichte auf der Ebene?

(b.w.)

Aufgabe 4: Ladungsverteilung und Feld aus Potential **[10]**

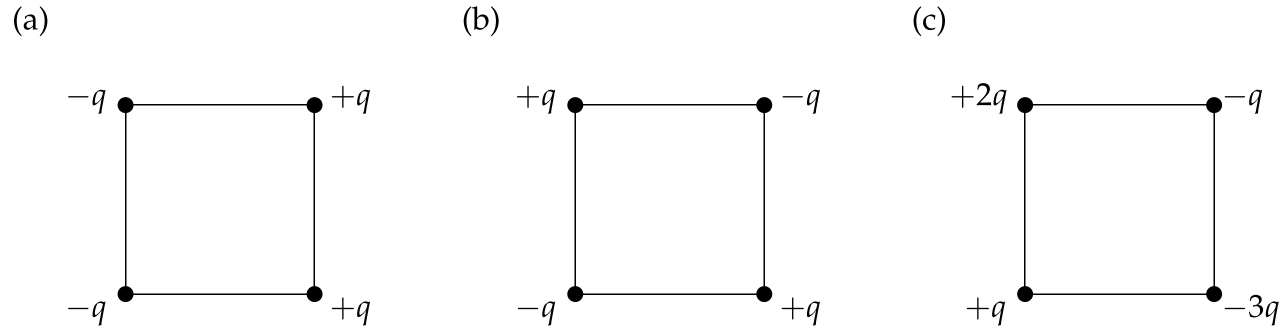
Gegeben ist das Potential

$$V(\rho, \varphi, z) = k\frac{\cos 2\varphi}{\rho^2 + z^2} \qquad (k = \text{const.})$$

in Zylinderkoordinanten (ρ, φ, z). Bestimmen Sie daraus die Komponenten des elektrischen Feldes $\vec{E}$ und die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ in Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 5: Fernfeld von Ladungsverteilungen **[$2+4+2=8$]**

Mit welcher Potenz $1/r^n$ fällt der führende Term des elektrischen Fernfeldes der folgenden Ladungsverteilungen?



Formelsammlung

Lösung der Laplace–Gleichung mit azimuthaler Symmetrie:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-(\ell+1)} \right) P_\ell(\cos\theta) \ .$$

Allgemeine Lösung eines Randwertproblems in Kugelkoordinaten:

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(A_{\ell m} r^\ell + B_{\ell m} r^{-(\ell+1)} \right) Y_\ell^m(\theta, \varphi) \ .$$

Kugelflächenfunktionen:

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \qquad Y_\ell^{-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_\ell^{m*}(\theta, \varphi) \ .$$

Legendre–Polynome:

$$P_0(x) = 1 \ , \quad P_1(x) = x \ , \quad P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1) \ , \quad P_3(x) = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x) \ .$$

Gradient und Laplace–Operator in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z):

$$\nabla\psi = \hat{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \hat{z}\frac{\partial\psi}{\partial z} \ , \qquad \nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \ .$$