Universität Karlsruhe (TH) **WS 2007/08**

Theoretische Physik C — Elektrodynamik

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Lösungen zur Klausur Nr. 1

Aufgabe 1: Kugel mit Potential [12]

Die Randbedingung hängt nur von θ ab und ist damit azimuthalsymmetrisch . Dann läßt sich das Potential in Legendre–Polynome entwickeln (s. Formelsammlung auf dem Aufgabenblatt),

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-(\ell+1)} \right) P_\ell(\cos\theta) \, .$$

Damit V nicht für $r \to \infty$ divergiert und $V \to 0$ bei $r \to \infty$ (weitere Randbedingung), müssen alle $A_\ell = 0$ sein , auch A_0 . Auf dem Rand der Kugel ($r = a$) gilt dann also

$$V(a,\theta) = V_0 \sin^2\theta = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell a^{-(\ell+1)} P_\ell(\cos\theta) \, .$$

Um die B_ℓ zu finden, drücken wir zunächst die Randbedingung durch Legendre–Polynome aus,

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \tfrac{2}{3}\left(1 - \left(\tfrac{3}{2}\cos^2\theta - \tfrac{1}{2}\right)\right) = \tfrac{2}{3}\left(P_0(\cos\theta) - P_2(\cos\theta)\right) \, .$$

Damit gilt bei $r = a$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell a^{-(\ell+1)} P_\ell(\cos\theta) = \tfrac{2}{3} V_0 \left(P_0(\cos\theta) - P_2(\cos\theta)\right) \, .$$

Da die $P_\ell(x)$ orthogonal sind,

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(\cos\theta) P_{\ell'}(\cos\theta) \, d\cos\theta = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} \, ,$$

können nur die Terme der Summe mit $\ell = 0, \ell = 2$ von Null verschieden sein . Wir erhalten per Koeffizientenvergleich (oder durch beidseitige Mulitplikation mit $P_{\ell'}(\cos\theta)$ und Integration über $d\cos\theta$)

$$B_0 = \tfrac{2}{3} V_0 a \qquad B_2 = -\tfrac{2}{3} V_0 a^3 \, .$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$V(r,\theta) = \frac{2V_0}{3} \frac{a}{r} \left(P_0(\cos\theta) - \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\cos\theta) \right) \, .$$

Aufgabe 2: δ–Funktionen **[2 + 3 + 3 = 8]**

(a) Mit $\int f(x)\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$ ergibt sich sofort

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+5}\delta(x-1)\,dx = \frac{1}{6}\,.$$

(b) Wir verwenden

$$\delta\left(g(x)\right) = \sum_{\text{Nullstellen } x_i \text{ von } g(x)} \frac{1}{|g'(x_i)|}\delta\left(x-x_i\right)\ .$$

Hier: $g(x) = \alpha x^2 - 1$ mit Nullstellen bei $x = \pm 1/\sqrt{\alpha}$. $g'(x) = 2\alpha x$ und $g'(\pm 1/\sqrt{\alpha}) = \pm 2\sqrt{\alpha}$. Also

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\delta(\alpha x^2-1)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\left[\frac{1}{|2\sqrt{\alpha}|}\delta\left(x-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) + \frac{1}{|-2\sqrt{\alpha}|}\delta\left(x+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left[e^{-1/\alpha}+e^{-1/\alpha}\right] = \frac{e^{-1/\alpha}}{\sqrt{\alpha}}\ .$$

(c) Hier verbirgt sich auch eine δ–Funktion,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-(t-t')^2} e^{i\omega(t-t')} = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-(t-t')^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')}\,d\omega}_{2\pi\delta(t-t')}$$
$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-t')^2}\delta(t-t')\,dt = 2\pi e^{(t'-t')^2} = 2\pi\ .$$

Aufgabe 3: Kugel vor einer Ebene **[2 + 2 + 8 = 12]**

(a) Ladung:

$$Q = \int \rho(\vec{r})\, d^3\vec{r} = \int \rho(r) r^2\, dr \int d\Omega = 4\pi\rho_0 \int_0^R \left(r^4 - 2Rr^3 + R^2 r^2\right)\, dr$$
$$= 4\pi\rho_0 \left(\frac{1}{5}R^5 - 2\frac{R}{4}R^4 + \frac{R^2}{3}R^3\right) = \frac{2\pi\rho_0 R^5}{15}\,.$$

Dipolmoment:

$$\vec{p} = \int \vec{r}\rho(\vec{r})\, d^3\vec{r} = \int \vec{r}\rho(r)\, d^3\vec{r} = \int -\vec{r}\rho(-r)\, d^3\vec{r} \underbrace{=}_{\text{radialsymm.}} -\int \vec{r}\rho(r)\, d^3\vec{r}\,. = -\vec{p}$$

Also muss $\vec{p} = 0$ sein.

(b) Die Ladungsdichte ist kugelsymmetrisch (also nicht von θ, φ abhängig) und hat daher nur einen Monopolterm . *Begründung:* Die Entwicklung des Winkelanteils der Ladungsdichte $\rho(r,\theta,\varphi)$ nach Kugelflächenfunktionen enthält nur den Term proportional $Y_{00}(\theta,\varphi) = 1/\sqrt{4\pi}$. Wegen der Orthogonalität der $Y_{\ell m}$ kann von den sphärischen Multipolmomenten

$$q_{\ell m} = \int \rho(\vec{r}) r^\ell Y^*_{\ell,m}(\theta,\varphi)\, d^3\vec{r}$$

nur $q_{00} \neq 0$ sein.

(c) Weil es nur einen Monopolanteil gibt, ist das Feld außerhalb der Kugel das gleiche wie das einer Punktladung Q (aus Teil (a) bekannt) im Mittelpunkt der Kugel (Gauß) . Das Problem entspricht also dem einer Punktladung bei $\vec{r} = (x', y', a)$ vor einer geerdeten Ebene. Mit einer Spiegelladung $-Q$ bei $\vec{r}_S = (x', y', -a)$ verschwindet das Potential auf der Ebene . Der einfachheit halber setzen wir $x' = y' = 0$ und das Potential lautet

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right]\,.$$

Die Oberflächenladungsdichte bestimmen wir aus der Senkrechtkomponete $E_\perp$ des $\vec{E}$–Feldes auf der Oberfläche,

$$\sigma(x,y) = \epsilon_0 E_\perp(z=0) = \epsilon_0 E_z(z=0) = -\epsilon_0 \left.\frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial z}\right|_{z=0}\,.$$

Wir berechnen also die gesuchte Oberflächenladungsdichte

$$\sigma(x,y) = \frac{Q}{4\pi}\left.\left[\frac{2(z-a)}{2\sqrt{}_-^{\,3}} - \frac{2(z+a)}{2\sqrt{}_+^{\,3}}\right]\right|_{z=0} = \frac{Q}{4\pi}\frac{-2a}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}^3} = -\frac{\rho_0 R^5 a}{15\sqrt{x^2+y^2+a^2}^3}$$

Aufgabe 4: Ladungsverteilung und Feld aus Potential **[10]**

Gegeben ist das Potential

$$V(\rho,\varphi,z) = k\frac{\cos 2\varphi}{\rho^2+z^2} \equiv kf(\rho,\varphi,z)\ .$$

Wir berechnen das elektrische Feld mit der Definition des elektrostatischen Potentials $\vec{E} = -\nabla V$ durch Differenzieren. Zunächst

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = -\frac{2\rho\cos 2\varphi}{(\rho^2+z^2)^2}\ , \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = -\frac{2\sin 2\varphi}{\rho^2+z^2}\ , \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{2z\cos 2\varphi}{(\rho^2+z^2)^2}\ .$$

Der Gradient in Zylinderkoordinaten war in der Formelsammlung gegeben. Damit lauten die Komponenten des $\vec{E}$–Feldes in Zylinderkoordinaten

$$(E_\rho, E_\varphi, E_z) = \frac{2k}{(\rho^2+z^2)^2}\left(\rho\cos 2\varphi,\ \frac{(\rho^2+z^2)}{\rho}\sin 2\varphi,\ z\cos 2\varphi\right)\ .$$

Die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ bestimmen wir aus der Poisson–Gleichung, ebenfalls per Differentiation, $\rho(\vec{r}) = -\epsilon_0\nabla^2 V$. Dazu berechnen wir

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial f}{\partial\rho} = \frac{4\rho\cos 2\varphi}{(\rho^2+z^2)^2}\left(\frac{2\rho^2}{\rho^2+z^2}-1\right)\ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} = -\frac{4\cos 2\varphi}{\rho^2+z^2}\ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2\cos 2\varphi}{(\rho^2+z^2)^2}\left(\frac{4z^2}{\rho^2+z^2}-1\right)\ .$$

Mit dem Laplace–Operator in Zylinderkoordinaten (aus der Formelsammlung) bekommen wir die Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = -\epsilon_0 k\frac{\cos 2\varphi}{\rho^2+z^2}\left(\frac{8\rho^2}{(\rho^2+z^2)^2} - \frac{6}{\rho^2+z^2} - \frac{4}{\rho^2} + \frac{8z^2}{(\rho^2+z^2)^2}\right) = -2k\epsilon_0\frac{(3\rho^2+z^2)\cos 2\varphi}{\rho^2(\rho^2+z^2)^2}\ .$$

Aufgabe 5: Fernfeld von Ladungsverteilungen **[$2+4+2=8$]**

Die Multipolentwicklung für das Potential einer Ladungsverteilung lautet

$$\Phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{Q_{ij}r_ir_j}{r^5} + \cdots\right)$$

Das entsprechende elektrische Fernfeld verhält sich für die entsprechenden Terme der Entwicklung wie $1/r^2, 1/r^3, 1/r^4, \ldots$.

(a) $Q = 0$ da sich die Ladungen zu Null addieren. Es gibt jedoch einen Dipolanteil. Wir haben die Superposition zweier elementarer Dipole . Hat das Quadrat die Kantenlänge a dann wäre das Gesamtdipolmoment $2qa$. Das elektrische Fernfeld verhält sich damit wie $1/r^3$.

(b) Wie in Teil (a) verschwindet die Gesamtladung. Diesmal haben wir wieder zwei elementare Dipole, jedoch mit entgegengesetzten Dipolmomenten, so dass das Gesamtdipolmoment verschwindet . Vermutung: es handelt sich um einen Quadrupol. Wir berechnen ein Element des Quadrupoltensors,

$$\begin{aligned} Q_{12} &= \int 3xy\rho(\vec{r})\,d^3\vec{r} = 3q\left[-\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right) - \left(-\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{a}{2}\right) + \left(\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{a}{2}\right)\right] \\ &= -3qa^2 \neq 0\ . \end{aligned}$$

Damit verhält sich das Fernfeld wie $1/r^4$.

(c) Die Gesamtladung ist $-q$ und das Fernfeld verhält sich wie $1/r^2$.