Universität Karlsruhe (TH) **WS 2007/08**

Theoretische Physik C — Elektrodynamik

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Klausur Nr. 2

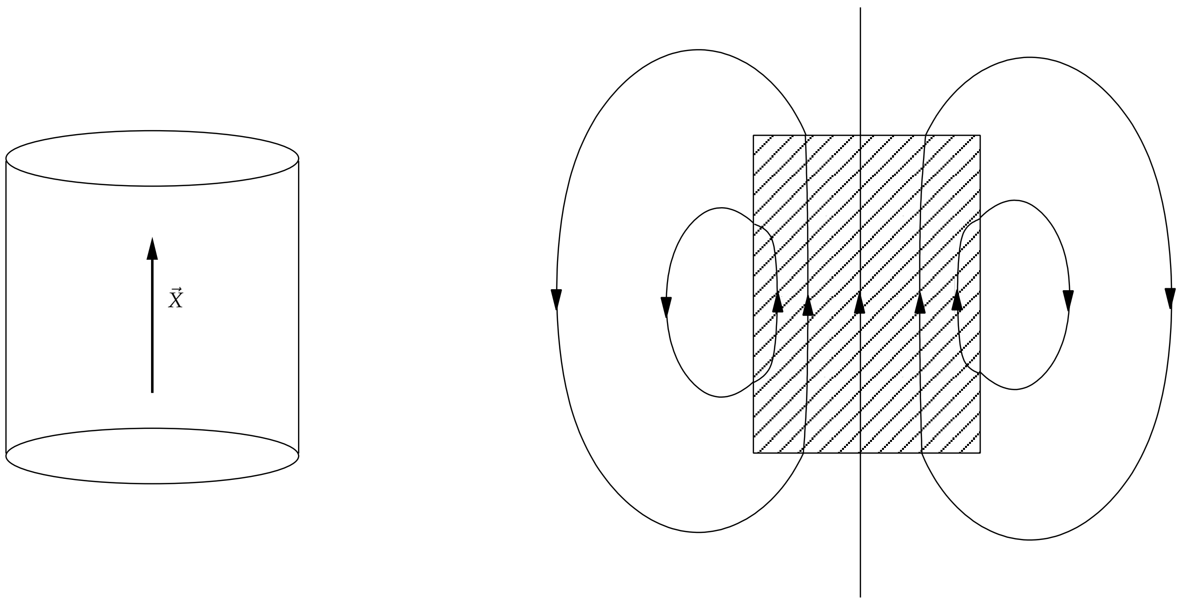
Name/Matrikelnummer/Übungsgruppe:	1	2	3	4	Σ

Aufgabe 1: Vergütungsschicht **[14]**

Die ebene Grenzfläche zwischen zwei Medien mit Brechungsindex n_1 und n_3 soll mit einer dünnen Schicht eines Mediums n_2 der Dicke d vergütet werden. Die Schicht soll bewirken, dass ein monochromatischer Lichtstrahl der Wellenlänge λ_1 beim Übergang von Medium 1 nach Medium 3 *nicht* reflektiert wird, falls er *senkrecht* auf die Grenzfläche trifft. Nehmen Sie an, dass es sich bei allen Medien um Isolatoren handelt. Weiterhin sind die Permeabilitäten überall gleich ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$). Bestimmen Sie d und den Brechungsindex n_2 aus den Randbedingungen an den Grenzflächen.

Aufgabe 2: Felder im Medium **[$4 + 4 = 8$]**

Im folgenden Bild ist ein Zylinder dargestellt, der entweder homogen polarisiert ($\vec{X} = \vec{P}$) oder magnetisiert ist ($\vec{X} = \vec{M}$). Rechts daneben sind dazugehörige elektromagnetische Feldlinien skizziert. Es gebe keine freien Ladungen oder Ströme.



(a) Welches der Felder $\vec{E}, \vec{D}$ ist dargestellt, falls $\vec{X} = \vec{P}$?

(b) Welches der Felder $\vec{B}, \vec{H}$ ist dargestellt, falls $\vec{X} = \vec{M}$?

Begründen Sie die Antwort in beiden Fällen direkt durch die Maxwell–Gleichungen und die entsprechenden Randbedingungen.

(b.w.)

Aufgabe 3: Magnetfeld einer azimuthalsymmetrischen Stromdichte **[9 + 5 = 14]**

Gegeben ist die Stromdichte $\vec{j}$ in Kugelkoordinaten

$$\vec{j}(r,\theta,\varphi) = \frac{j_0}{R} r \sin\theta \cos\theta \, \Theta(R-r)\vec{e}_\varphi \,,$$

mit der Stufenfunktion $\Theta(x)$ und $\vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$.

(a) Berechnen Sie das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ für $r > R$. Zeigen Sie, dass $\vec{A}(\vec{r})$ die Form $\vec{A}(\vec{r}) = A_0 r^{-k} \sin\theta \cos\theta \vec{e}_\varphi$ hat.

Hinweis:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta',\varphi') Y_{lm}(\theta,\varphi) \,,$$

wobei $r_< = \min(|\vec{r}|, |\vec{r}'|)$, $r_> = \max(|\vec{r}|, |\vec{r}'|)$.

(b) Bestimmen Sie das $\vec{B}$–Feld für $r > R$.

Aufgabe 4: Geboostete Wellen **[6 + 4 + 4 = 14]**

In einem Inertialsystem K misst ein Beobachter das elektromagnetische Feld

$$\vec{E}(\vec{x},t) = E_0 \vec{e}_x \cos(k\cdot x) \,, \qquad \vec{B}(\vec{x},t) = B_0 \vec{e}_y \cos(k\cdot x) \,,$$

wobei $k^\mu = (\omega/c, 0, 0, k)$, $x^\mu = (ct, \vec{x})$ und $B_0 = E_0/c$. Ein zweiter Beobachter bewegt sich mit einem System K' parallel zur y–Achse von K mit der Geschwindigkeit $v > 0$ und misst die elektromagnetischen Felder $\vec{E}'$ und $\vec{B}'$.

(a) Bestimmen Sie $\vec{E}'$ und $\vec{B}'$ in K'.

(b) Drücken Sie das Quadrat des Feldstärketensors $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus.

(c) Bestimmen Sie den Ausdruck $\vec{E}'^2 - \vec{B}'^2 c^2$ im bewegten System K'.

Formelsammlung

Kugelflächenfunktionen:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \,, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \,, \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi} \,, \quad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) \,,$$

$$Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta e^{i\varphi} \,, \quad Y_{22} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta e^{2i\varphi} \,, \quad Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{lm}^* \,.$$

Rotation des Feldes $\vec{A} = (A_r, A_\theta, A_\varphi)$ in Kugelkoordinaten:

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{e}_r \frac{1}{r\sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right] + \vec{e}_\theta \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right] + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right] \,.$$

Transformation von $\vec{E}$– und $\vec{B}$–Feld:

$$\vec{E}' = \gamma\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{E}\right)\vec{\beta} \,, \qquad \vec{B}' = \gamma\left(\vec{B} - \frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{B}\right)\vec{\beta} \,.$$