Universität Karlsruhe (TH) **WS 2007/08**

Theoretische Physik C — Elektrodynamik

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Lösungen zur Klausur Nr. 2

Aufgabe 1: Vergütungsschicht [14]

Da die Wellen senkrecht zu den Grenzflächen einfallen, müssen wir nicht zwischen verschiedenen Polarisationsrichtungen unterscheiden. In Medium 1 liege $\vec{E}$ entlang der x–Richtung. Das Licht fällt entlang der positiven z–Richtung auf die Schicht. Mit $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$ können wir direkt die Brechungsindices n_i in die $\vec{H}$–Gleichungen einsetzen. Dann schreiben wir die einfallende Welle als

$$\vec{E}_1 = E_{01}\vec{e}_x \mathrm{e}^{i\left(k_1 z - \omega t\right)} , \qquad \vec{B}_1 = \frac{n_1}{c} E_{01}\vec{e}_y \mathrm{e}^{i\left(k_1 z - \omega t\right)} .$$

Wir benutzen hier und im folgenden die Relation $\vec{B} = \frac{n}{c}\frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}$. Die reflektierte Welle läuft in $-\vec{e}_z$–Richtung und lautet dementsprechend

$$\vec{E}_1' = E_{01}'\vec{e}_x \mathrm{e}^{i\left(-k_1 z - \omega t\right)} , \qquad \vec{B}_1' = -\frac{n_1}{c} E_{01}'\vec{e}_y \mathrm{e}^{i\left(-k_1 z - \omega t\right)} .$$

In Medium 2 haben wir auch eine einlaufende und eine reflektierte Welle,

$$\vec{E}_2 = E_{02}\vec{e}_x \mathrm{e}^{i\left(k_2 z - \omega t\right)} , \qquad \vec{B}_2 = \frac{n_2}{c} E_{02}\vec{e}_y \mathrm{e}^{i\left(k_2 z - \omega t\right)} ,$$
$$\vec{E}_2' = E_{02}'\vec{e}_x \mathrm{e}^{i\left(-k_2 z - \omega t\right)} , \qquad \vec{B}_2' = -\frac{n_2}{c} E_{02}'\vec{e}_y \mathrm{e}^{i\left(-k_2 z - \omega t\right)} .$$

In Medium 3 gibt es nur eine transmittierte Welle:

$$\vec{E}_3 = E_{03}\vec{e}_x \mathrm{e}^{i\left(k_3 z - \omega t\right)} , \qquad \vec{B}_3 = \frac{n_3}{c} E_{03}\vec{e}_y \mathrm{e}^{i\left(k_3 z - \omega t\right)} .$$

An den Grenzschichten sollen die Parallelkomponenten von $\vec{E}$– und $\vec{H}$–Feld stetig sein. Daraus erhalten wir vier Gleichungen. Für die Grenzschicht 1–2:

$$E_{01} + E_{01}' = E_{02} + E_{02}' ,$$
$$n_1(E_{01} - E_{01}') = n_2(E_{02} - E_{02}') ,$$

wobei wir direkt $z = 0$ eingesetzt haben. Für die Grenzschicht zwischen Medium 2 und 3 bekommen wir jeweils eine Phase dazu,

$$E_{02}\mathrm{e}^{ik_2 d} + E_{02}'\mathrm{e}^{-ik_2 d} = E_{03}\mathrm{e}^{ik_3 d} ,$$
$$n_2 E_{02}\mathrm{e}^{ik_2 d} - n_2 E_{02}'\mathrm{e}^{-ik_2 d} = n_3 E_{03}\mathrm{e}^{ik_3 d} .$$

Jetzt fordern wir $E_{01}' = 0$. Aus den 4 Gleichungen eliminieren wir zunächst (z.B.) E_{01} und E_{03} und haben damit ein relativ einfaches System von zwei Gleichungen für E_{02}, E_{02}',

$$(n_2 - n_1)E_{02} + (n_2 + n_1)E_{02}' = 0 ,$$
$$(n_2 - n_3)\mathrm{e}^{ik_2 d}E_{02} - (n_2 + n_3)\mathrm{e}^{-ik_2 d}E_{02}' = 0 .$$

Wir interessieren uns für eine Bedingung an d und n_2. Daher fordern wir nur, dass dieses Gleichungssystem eine Lösung besitzt. Die Koeffizientendeterminante muss also verschwinden. Damit bekommen wir

$$\frac{(n_2 - n_1)(n_2 + n_3)}{(n_1 + n_2)(n_2 - n_3)} = \mathrm{e}^{2ik_2 d} \, .$$

Da die linke Seite reell ist, muss auch die rechte Seite reell werden, also $\mathrm{e}^{ik_2 d} = \pm 1$. Im Fall +1 bekommen wir die uninteressante Lösung $n_1 = n_3$, also den Übergang zwischen zwei gleichen Medien ohne Reflexion. Im anderen Fall bekommen wir

$$\mathrm{e}^{2ik_2 d} = -1 \Rightarrow k_2 d = (m + \frac{1}{2})\pi \quad \text{oder} \quad d = (2m+1)\frac{\lambda_2}{4} \, ,$$

und

$$(n_2 - n_1)(n_2 + n_3) = -(n_1 + n_2)(n_2 + n_3) \quad \Rightarrow \quad n_2 = \sqrt{n_1 n_3} \, .$$

Aus den Randbedingungen für die ebenen Wellen erhalten wir auch das Brechungsgesetz, in diesem Fall $k_2/k_1 = n_2/n_1$ und damit $\lambda_2 = (n_1/n_2)\lambda_2$. Damit lautet unser Ergebnis

$$n_2 = \sqrt{n_1 n_3} \, , \qquad d = (2m+1)\frac{n_1}{n_2}\frac{\lambda_1}{4} \, .$$

Aufgabe 2: Felder im Medium **[4 + 4 = 8]**

Das dargestellte Feld ist divergenzfrei, da die Anzahl der Feldlinien, die in ein Volumen hineinfließen auch wieder hinausfließt.

(a) Für die dielektrische Verschiebung $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ gilt bei Abwesenheit von freien Ladungen $\nabla \cdot \vec{D} = 0$, ist also divergenzfrei. Während das elektrische Feld nicht divergenzfrei ist, $\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \vec{P}/\epsilon_0$, die Polarisationsladungen stellen neue Quellen für das elektrische Feld dar. Weiterhin gilt beim Übergang von Medium (1) nach (2) $D_\perp^{(1)} - D_\perp^{(2)} = \sigma$. Ohne Oberflächenladung ist die Senkrechtkomponente von $\vec{D}$ also stetig. Während $E_{||}^{(1)} = E_{||}^{(2)}$, bzw. $D_{||}^{(1)} = \epsilon_1/\epsilon_2 D_{||}^{(2)}$. Die Tangentialkomponente wird damit von innen nach aussen grösser ($\epsilon_i > \epsilon_a$), was auf der Skizze deutlich zu erkennen ist. Es handelt sich also um das $\vec{D}$–Feld.

(b) Hier ist $\vec{B}$ divergenzfrei, denn es gilt immer $\nabla \cdot \vec{B} = 0 = \mu_0 \nabla \cdot (\vec{H} + \vec{M})$. Daraus ergibt sich auch, dass $\vec{B}_\perp$ and der Grenzfläche stetig ist. Die Bedingung für die Tangentialkomponente ergibt sich aus der Rotationsgleichung. Ohne Oberflächenströme ergibt sich hier, dass $\vec{H}_{||}$ stetig sein soll. Damit muss aber $B_{||} = \mu H_{||}$ einen Sprung machen, $B_{||}^{(1)} = \mu_1/\mu_2 B_{||}^{(2)}$. Auch hier wird die Tangentialkomponente dann von innen nach aussen grösser ($\mu_i > \mu_a$). Es handelt sich hier also um das $\vec{B}$–Feld.

Aufgabe 3: Magnetfeld einer azimuthalsymmetrischen Stromdichte **[9 + 5 = 14]**

(a) Wir berechnen direkt das Vektorpotential mit

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{d}^3\vec{r}' \,.$$

Wir setzen die Entwicklung von $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ nach Kugelflächenfunktionen (s. Aufgabenblatt) ein. Da wir $\vec{A}$ nur für $r > R$ suchen, gilt immer $r_> = r$, $r_< = r'$. Damit bekommen wir

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) \underbrace{\int \mathrm{d}^3\vec{r}' r'^l Y^*_{lm}(\theta', \varphi') \vec{j}(\vec{r}')}_{=I} \,.$$

Die Stufenfunktion beschränkt lediglich die $\vec{r}'$ Integration. Mit der Beobachtung

$$Y_{21}(\Omega) + Y_{2,-1}(\Omega) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta \left(-\mathrm{e}^{i\varphi} + \mathrm{e}^{-i\varphi} \right) = -2i \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \,,$$
$$Y_{21}(\Omega) - Y_{2,-1}(\Omega) = 2 \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta \cos\varphi \,,$$

(Ω ist der Raumwinkel (θ, φ)) können wir den Integranden umformen,

$$I = -\frac{j_0}{R} \int_0^R \mathrm{d}r' r'^{l+3} \int \mathrm{d}\Omega' \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} Y^*_{lm}(\Omega') \begin{pmatrix} i(Y_{21}(\Omega') + Y_{2,-1}(\Omega')) \\ Y_{21}(\Omega') - Y_{2,-1}(\Omega') \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Integral über Ω' lösen wir mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation

$$\int \mathrm{d}\Omega \, Y^*_{lm}(\Omega) Y_{l'm'}(\Omega) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

und erhalten insgesamt

$$I = \frac{j_0}{R} \frac{R^{l+4}}{2(l+4)} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \begin{pmatrix} -i(\delta_{l,2}\delta_{m,1} + \delta_{l,2}\delta_{m,-1}) \\ -(\delta_{l,2}\delta_{m,1} - \delta_{l,2}\delta_{m,-1}) \\ 0 \end{pmatrix} \,.$$

Setzen wir nun in $\vec{A}(\vec{r})$ ein, so bleiben uns wegen der Kronecker Symbole jeweils nur zwei Terme aus der Summe, beide mit $l = 2$. Das ergibt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{j_0}{R} \frac{\mu_0 R^6}{2 \cdot 6} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \frac{1}{5} \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} -i(Y_{21}(\Omega) + Y_{2,-1}(\Omega)) \\ -(Y_{21}(\Omega) - Y_{2,-1}(\Omega)) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{j_0 \mu_0 R^5}{60 r^3} \begin{pmatrix} -2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi \\ 2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \,.$$

$\vec{A}(\vec{r})$ hat also die gesuchte Form

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{j_0 \mu_0 R^5}{30 r^3} \sin\theta \cos\theta \vec{e}_\varphi = \frac{A_0}{r^3} \sin\theta \cos\theta \vec{e}_\varphi \,.$$

(b) Wir berechnen $\vec{B}(\vec{r})$ in Kugelkoordinaten direkt aus $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ in Kugelkoordinaten. Da $\vec{A}(\vec{r}) = (0, 0, A_\varphi(r, \theta))$ tragen nur zwei Terme zur Rotation bei,

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \vec{e}_r \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta A_\varphi) - \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \\
&= \vec{e}_r \frac{A_0}{r \sin\theta} \left(\frac{2 \sin\theta \cos^2\theta}{r^3} + \frac{-\sin^3\theta}{r^3} \right) - \vec{e}_\theta \frac{A_0}{r} \frac{(-2 \sin\theta \cos\theta)}{r^3} \\
&= \frac{j_0 \mu_0 R^5}{30 r^4} \left((3\cos^2\theta - 1)\vec{e}_r + 2 \sin\theta \cos\theta \vec{e}_\theta \right) .
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Geboostete Wellen **[6 + 4 + 4 = 14]**

(a) $k \cdot x$ ist ein Lorentz–Skalar, also $k \cdot x = k' \cdot x'$. Da $\vec{v}$ parallel zur y–Achse, $\vec{v} = v\vec{e}_y$ gilt $\vec{v} \times \vec{B} = 0$ und $\vec{v} \cdot \vec{E} = 0$. Damit ergibt sich für $\vec{E}'$ einfach

$$\vec{E}' = \gamma \vec{E} = \gamma E_0 \cos(k' \cdot x') \vec{e}_x .$$

Für $\vec{B}'$ brauchen wir $\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$. Wir erhalten durch Einsetzen in die Transformationsformeln (s. Aufgabenblatt) zunächst

$$\begin{aligned}
\vec{B}' &= \cos(k' \cdot x') \left[\gamma B_0 \vec{e}_y + \gamma \frac{v E_0 \vec{e}_z}{c^2} - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{v^2}{c^2} B_0 \vec{e}_y \right] \\
&= B_0 \cos(k' \cdot x') \left[\left(\gamma - \frac{\gamma^2 \beta^2}{\gamma + 1} \right) \vec{e}_y + \gamma\beta \vec{e}_z \right] .
\end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\gamma - \frac{\gamma^2\beta^2}{\gamma + 1} = \frac{\gamma(\gamma + 1) - \gamma^2\beta^2}{\gamma + 1} = \frac{\gamma + \overbrace{\gamma^2(1 - \beta^2)}^{=1}}{\gamma + 1} = 1 .$$

Also bleibt als Ergebnis

$$\vec{B}' = B_0 \cos(k' \cdot x') \left[\vec{e}_y + \gamma\beta \vec{e}_z \right] .$$

(b) Es gilt

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma} = F^{00} F^{00} + F^{0i} \underbrace{g_{0\rho}}_{+1} \underbrace{g_{i\sigma}}_{-1} F^{\rho\sigma} + F^{i0} \underbrace{g_{i\rho}}_{-1} \underbrace{g_{0\sigma}}_{+1} F^{\rho\sigma} + F^{ij} \underbrace{g_{i\rho}}_{-1} \underbrace{g_{j\sigma}}_{-1} F^{\rho\sigma} .$$

Die Vorzeichen kommen aus den Termen des metrischen Tensors, die in der Summe beitragen. Weiterhin ist $(F^{0i})^2 = (E^i)^2/c$ und $(F^{ij})^2 = (B^K)^2$ Damit ergibt sich für die 4 Terme

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0 - (\vec{E}/c)^2 - (\vec{E}/c)^2 + 2(\vec{B})^2 = -\frac{2}{c^2} \left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2 c^2 \right) .$$

(c) Da $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ ein Lorentz–Skalar ist, muss gelten, dass

$$\vec{E}'^2 - \vec{B}'^2 c^2 = \vec{E}^2 - \vec{B}^2 c^2 .$$

Wir können die Probe machen:

$$\vec{E}^2 - \vec{B}^2 c^2 = \cos^2(k \cdot x) \left[E_0^2 - \frac{E_0^2}{c^2} c^2 \right] = 0 ,$$

sowie

$$\vec{E}'^2 - \vec{B}'^2 c^2 = \cos^2(k' \cdot x') \left[\gamma^2 E_0^2 - \frac{E_0^2}{c^2} (1 + \gamma^2\beta^2) c^2 \right] = E_0^2 \cos^2(k' \cdot x') \left[\underbrace{\gamma^2(1 - \beta^2)}_{=1} - 1 \right] = 0 .$$