ÜBUNGEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK C — KLAUSUR

Prof. Dr. J. Kühn — Dienstag, 9.3.2010

Dr. S. Uccirati — 14:00-17:00 Uhr

Aufgabe 1: — 13 Punkte

Wenn nicht explizit gefordert, ist in Aufgabe 1 keine Herleitung verlangt.

a) Elektro- und Magnetostatik

i) Gegeben seien die lokalisierte Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ und die Stromdichte $\vec{j}(\vec{x})$. Wie lautet das zugehörige skalare Potential $\phi(\vec{x})$ und das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{x})$ (in Coulomb-Eichung)?

ii) Was erhalten Sie für große Abstände von den Quellen? Betrachten Sie hierzu die Multipolentwicklung jeweils bis zum Dipolbeitrag.

iii) Was ergibt sich für die Kraft und das Drehmoment auf einen magnetischen Dipol $\vec{m}$ in einem Magnetfeld $\vec{B}(\vec{x})$?

b) Zeitabhängige Phänomene

i) Wie lautet der Zusammenhang zwischen $\vec{E}$, $\vec{B}$, ρ, $\vec{j}$? Wie lassen sich diese Gleichungen in relativistisch kovarianter Form schreiben?

ii) Zeigen Sie, dass das elektrische Feld $\vec{E}$ für $\rho = 0, \vec{j} = 0$ die Wellengleichung erfüllt. Wie lautet die zur Wellengleichung gehörige retardierte Greensche Funktion?

iii) Eine ebene Welle werde durch $\vec{E}(\vec{x}, t) = E_0 \,\mathrm{Re}\, \vec{\epsilon}\, e^{ikz-i\omega t}$ beschrieben (Coulomb Eichung). Folgende fünf Polarisationsvektoren seien gegeben:

$$\vec{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\epsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\epsilon}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\epsilon}_4 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\epsilon}_5 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Welcher beschreibt lineare, zirkulare bzw. elliptische Polarisation?

iv) Das elektrische Feld $\vec{E}(x, y, z, t) = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{Re}\, e^{ikz-i\omega t}$ beschreibe eine ebene Welle.

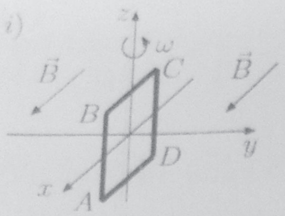
Wie lautet das zugehörige Magnetfeld $\vec{B}(x, y, z, t)$?
Was ergibt sich für den Poyntingvektor?

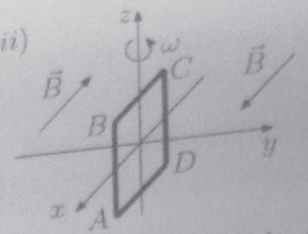
Aufgabe 2: — 7 Punkte

Betrachten Sie eine geschlossene quadratische Leiterschleife (mit Seitenlänge a und Zentrum im Ursprung), die sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Ebene $y = 0$ befindet und gegen den Uhrzeigersinn mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert. Zusätzlich gibt es ein Magnetfeld $\vec{B}$ in zwei verschiedenen Konfigurationen:

i) Das Magnetfeld ist homogen und zeigt in die positive x-Richtung: $\vec{B} = B_0(1, 0, 0)$

ii) Das Magnetfeld zeigt in die positive x-Richtung im $y > 0$ Halbraum und in die negative x-Richtung im $y < 0$ Halbraum: $\vec{B} = [\theta(y) - \theta(-y)]\, B_0\, (1, 0, 0)$





Berechnen Sie den Betrag der in der Leiterschleife induzierte Spannung in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit ω in beide Konfigurationen.
Wann wechselt der Strom die Richtung: für $t = T/4$ oder für $t = T/2$ ($T = 2\pi/\omega$)?

Aufgabe 3:	7 Punkte

a) Betrachten Sie eine Ladungsverteilung mit dem zeitlich konstanten elektrischen Quadrupolmoment Q_{ij}. Die Gesamtladung und das Dipolmoment seien Null.

i) Welche Bedingungen gelten für die Q_{ij}?

ii) Kann Q_{ij} diagonalisiert werden? Wenn nein, weshalb nicht? Wenn ja, wieviele unabhängige Diagonalelemente hat Q_{ij} nach Diagonalisierung?

iii) Was ergibt sich für das skalare Potential $\phi(\vec{x})$? Mit welcher Potenz fällt das elektrische Feld für große Abstände ab?

b) Die Ladungsverteilung oszilliere nun mit der Frequenz ω. Welche Bedingung muß erfüllt sein, dass sich ein Beobachter in der Fernzone befindet? Mit welcher Potenz fällt dort das elektrisches Feld ab?

Aufgabe 4:	13 Punkte

In einer linearen Antenne der Länge d fließt ein mit der Frequenz ω oszillierender Strom. Die Amplitude der Stromstärke ist konstant in der Antenne:

$$\vec{j}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\,\vec{j}(\vec{x})\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \qquad \text{mit} \qquad \vec{j}(\vec{x}) = I_0\,\delta(x)\,\delta(y)\left[\theta\left(z+\frac{d}{2}\right) - \theta\left(z-\frac{d}{2}\right)\right]\vec{e}_z.$$

i) Berechnen Sie die Ladungsverteilung $\rho(\vec{x},t)$ unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung. (Beachten Sie, dass $\frac{d}{dz}\theta(z) = \delta(z)$).

ii) Berechnen Sie das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{x},t)$ in der Fernzone und verwenden Sie dabei die Dipolnährung. Welche Bedingung muss für diese Nährung erfüllt sein? Was ergibt sich für die zugehörigen magnetischen und elektrischen Felder?

iii) Berechnen Sie nun $\vec{A}(\vec{x},t)$ in der Fernzone

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\,\vec{A}(\vec{x})\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \qquad \text{mit} \qquad \vec{A}(\vec{x}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{ik|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}\int d^3x'\,\vec{j}(\vec{x}')\,\mathrm{e}^{-ik\frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{|\vec{x}|}},$$

ohne die Dipolnährung zu verwenden. Überzeugen Sie sich, dass unter Verwendung der Dipolnährung das Resultat mit dem vorherigen übereinstimmt.