THEORETISCHE PHYSIK C | NACHKLAUSUR

Prof. Dr. J. Kühn | Dienstag, 27.4.2010

Dr. S. Uccirati | 17:30-20:30 Uhr

Bewertungsschema für Bachelor

Punkte	Note	
<14	5.0	nicht bestanden
14 - 15.5	4.7	
16 - 17.5	4.0	bestanden
18 - 19.5	3.7	
20 - 21.5	3.3	
22 - 23.5	3.0	
24 - 25.5	2.7	
26 - 27.5	2.3	
28 - 29.5	2.0	
30 - 31.5	1.7	
32 - 33.5	1.3	
34 - 40	1.0	

Scheinvergabe für Diplomstudiengang bei **16** und mehr Punkten

Aufgabe 1: 10 Punkte

Wenn nicht explizit gefordert, ist in Aufgabe 1 keine Herleitung verlangt.

$a)$ Elektro- und Magnetostatik

i) Gegeben seien n Ladungen q_i am Ort $\vec{r}_i$ ($i = 1, \ldots, n$).

- Was erhalten Sie für das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ am Ort $\vec{r}$?
  Was ergibt sich für die Wechselwirkungsenergie W des Systems?

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} (\vec{r}-\vec{r}_i), \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P}$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j=1;\, i\neq j}^{n} \frac{q_i\, q_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P}$$

- Welche Bedingung an die Ladungen muß gelten, damit das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ für große Abstände, also für $|\vec{r}| \gg |\vec{r}_i|$, stärker als $1/r^2$ abfällt?

Die Gesamtladung (Monopolmoment) $Q = \sum_i q_i$ muss verschwinden. 1 P

- Welche zwei Bedingungen müssen gelten, damit das Potential für große Abstände stärker als $1/r^2$ abfällt?

Die Gesamtladung (Monopolmoment) $Q = \sum_i q_i$ und das Dipolmoment $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$ müssen verschwinden. 1 P

ii) Eine elektrische Ladung Q befindet sich am Ort $(0, 0, d)$ mit $d > 0$ vor der geerdeten leitenden Ebene $z = 0$.

- Was ergibt sich für das Potential $\Phi(x, y, z)$ und das Feld $\vec{E}(x, y, z)$ für $z > 0$ und $z < 0$?

$$\begin{aligned}
\phi(x,y,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{-Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right] && z > 0 \\
\phi(x,y,z) &= 0 && z < 0
\end{aligned}$$

1 P

$$\begin{aligned}
\vec{E}(x,y,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{Q}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-d \end{pmatrix} + \frac{-Q}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z+d \end{pmatrix}\right\} && z > 0 \\
\vec{E}(x,y,z) &= 0 && z < 0
\end{aligned}$$

1 P

- Was ergibt sich für das Potential, wenn Sie statt der Punktladung einen Dipol mit Dipolmoment $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ betrachten?

Dipolmoment des Spiegeldipols: $\vec{p}\,' = (-p_x, -p_y, p_z)$. $\frac{1}{2}$ P

$$\begin{aligned}
\phi(x,y,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{x\,p_x + y\,p_y + (z-d)\,p_z}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{3/2}} + \frac{-x\,p_x - y\,p_y + (z+d)\,p_z}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{3/2}}\right\} && z > 0 \\
\phi(x,y,z) &= 0 && z < 0
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2}$ P

iii) Gegeben sei eine vom Strom I durchflossene Leiterschleife, deren Verlauf durch die Kurve $\vec{l}(t)$ mit $t_1 \le t \le t_2$ gegeben ist.

- Was ergibt sich für den Beitrag $d\vec{B}$ eines Leiterstücks $d\vec{l}$ zum Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ am Punkt $\vec{r}$ nach dem Biot-Savartschen Gesetz? Stellen Sie $\vec{B}(\vec{r})$ als eindimensionales Integral über t dar.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, I\, d\vec{l} \times \frac{\vec{r} - \vec{l}(t)}{|\vec{r} - \vec{l}(t)|^3} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt\, I\, \frac{d\vec{l}}{dt} \times \frac{\vec{r} - \vec{l}(t)}{|\vec{r} - \vec{l}(t)|^3} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P}$$

- Was erhalten Sie für $|\vec{B}|$ am Mittelpunkt einer kreisförmigen Schleife mit Radius R?

$$\vec{l}(t) = R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = 0 \qquad \vec{r} - \vec{l}(t) = R \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\vec{r} - \vec{l}(t)| = R$$

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} dt\, I\, R \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \times R \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{R^3} = \frac{\mu_0\, I}{2\, R}\, \vec{e}_z$$

$$|\vec{B}(0)| = \frac{\mu_0\, I}{2\, R} \qquad 1\text{ P}$$

b) Zeitabhängige Phänomene

i) Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung aus den Maxwell-Gleichungen folgt.

Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} = \mu_0\, \vec{j} \qquad 1\text{ P}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \big(\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B}}_{0} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{\rho/\epsilon_0} \big) = -\,\partial_t \rho$$

ii) Was erhält man für die Impulsänderung $\frac{d\vec{p}}{dt}$ und die Änderung der Energie $\frac{dW}{dt}$ eines Teilchens mit der Ladung q und mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ bei Anwesenheit eines elektrischen und magnetischen Feldes?

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P}$$

$$\frac{dW}{dt} = q\, \vec{v} \cdot \vec{E} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P}$$

Aufgabe 2:	4 Punkte

Das Potential auf einer Kugeloberfläche mit Radius a sei gegeben durch

$$\Phi = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\theta, \qquad \alpha_0, \alpha_1 = \text{konstant}$$

Was ergibt sich für das Potential (durch Überlegungen!)

i) für $r > a$, wenn keine Ladungen für $r > a$ vorhanden sind und $\Phi(r \to \infty) \to 0$ gefordert wird?

ii) für $r < a$, wenn keine Ladungen für $r < a$ vorhanden sind.

In beiden Fällen sind keine Ladungen vorhanden: Laplace-Gleichung $\triangle\Phi(r,\theta,\phi) = 0$ gilt.

Allgemeine Lösung:

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} (A_{lm}\, r^l + B_{lm}\, r^{-l-1})\, Y_{l,m}(\theta,\phi)$$ 1 P

wobei $Y_{l,m}$ die Kugelflächenfunktionen sind:

$$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \quad Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, \mathrm{e}^{i\phi}, \quad Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, \mathrm{e}^{-i\phi}, \quad \ldots$$ 1 P

A_{lm} und B_{lm} werden durch die Randbedingungen bestimmt.

- $r > a$

  Für $r \to \infty$ soll $\Phi \to 0$, daher verschwinden alle A_{lm}.

  Durch die Bedingungen für $r = a$ kann man B_{lm} festlegen. Für $r = a$ ist das Potential $\Phi = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\theta$. Daher tragen zum Potential nur die Kugelflächenfunktionen $Y_{0,0}$ und $Y_{1,0}$ bei (alle anderen B_{lm} verschwinden): $\frac{1}{2}$ P

  $$\Phi(r,\theta,\phi) = B_{00}\, r^{-1}\, Y_{00}(\theta,\phi) + B_{10}\, r^{-2}\, Y_{10}(\theta,\phi)$$

  und B_{00}, B_{10} sind:

  $$B_{00} = \alpha_0\, a \sqrt{4\pi}, \qquad B_{10} = \alpha_1\, a^2 \sqrt{\frac{4\pi}{3}}.$$

  Daraus folgt:

  $$\Phi(r,\theta,\phi) = \alpha_0 \frac{a}{r} + \alpha_1 \frac{a^2}{r^2} \cos\theta \qquad r > a.$$ $\frac{1}{2}$ P

- $r < a$

  Für $r = 0$ darf man keine Divergenz haben (keine Ladungen sind vorhanden), daher verschwinden alle B_{lm}.

  Durch die Bedingungen für $r = a$ kann man A_{lm} festlegen. Für $r = a$ ist das Potential $\Phi = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\theta$. Daher tragen zum Potential nur die Kugelflächenfunktionen $Y_{0,0}$ und $Y_{1,0}$ bei (alle anderen A_{lm} verschwinden): $\frac{1}{2}$ P

  $$\Phi(r,\theta,\phi) = A_{00}\, Y_{00}(\theta,\phi) + A_{10}\, r\, Y_{10}(\theta,\phi)$$

  und A_{00}, A_{10} sind:

  $$A_{00} = \alpha_0 \sqrt{4\pi}, \qquad A_{10} = \alpha_1 \frac{1}{a} \sqrt{\frac{4\pi}{3}}.$$

  Daraus folgt:

  $$\Phi(r,\theta,\phi) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{r}{a} \cos\theta \qquad r < a.$$ $\frac{1}{2}$ P

Aufgabe 3: 7 Punkte

Gegeben sei (in Zylinderkoordinaten) die Stromdichte

$$\vec{j}(r,\phi,z) = j_o\,\vec{e}_z\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^n\right]\theta(a-r), \quad a>0.$$

i) Was ergibt sich für den gesamten Strom I?

$$I = \int_{\mathcal{F}} d\vec{F}\cdot\vec{j}$$ 1 P

Daher

$$I = \int_0^a dr'\,r'\int_0^{2\pi} d\phi'\,j_o\left[1-\left(\frac{r'}{a}\right)^n\right] = 2\pi j_o\int_0^a dr'\left[r' - \frac{(r')^{n+1}}{a^n}\right] = \pi\,j_o\,a^2\frac{n}{n+2}$$ 1 P

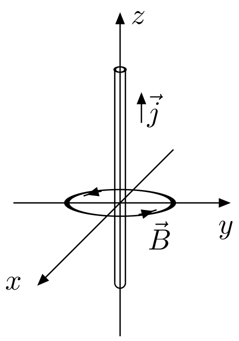
ii) Berechnen Sie mittels des Ampèreschen Gesetzes das zugehörige Magnetfeld $\vec{B}$ (wahlweise in Zylinder- oder kartesischen Koordinaten) für $r>a$ und $r<a$.

Ampèresches Gesetz:

$$\oint_C d\vec{l}\cdot\vec{B} = \mu_0\,I_c$$ 1 P

wobei C eine geschlossene Kurve und I_c der gesamte Strom ist, der durch C fließt.

Diese Aufgabe hat eine zylindrische Symmetrie und das $\vec{B}$ Feld ist wie in der Bildung:



Daraus folgt:

$$\vec{B} = B\,\vec{e}_\phi = B\,(\cos\phi\,\vec{e}_x + \sin\phi\,\vec{e}_y).$$

Wir betrachten als Kurve C einen Kreis mit Zentrum in $r=0$ in der Ebene senkrecht zu $\vec{j}$ und Radius r. Daraus folgt:

$$\oint_c d\vec{l}\cdot\vec{B} = 2\pi\,r\,B.$$ 1 P

Für $r>a$ fließt durch C der gesamte Strom I:

$$\oint_c d\vec{l}\cdot\vec{B} = \mu_0\,I_c \qquad\Leftrightarrow\qquad 2\pi\,r\,B = \mu_0\,\pi\,j_o\,a^2\,\frac{n}{n+2}$$

Daraus folgt

$$B = \frac{\mu_0\,j_o\,a^2}{r}\frac{n}{2(n+2)} \qquad\Rightarrow\qquad \vec{B} = \frac{\mu_0\,j_o\,a^2}{r}\frac{n}{2(n+2)}\,\vec{e}_\phi = \frac{\mu_0\,j_o\,a^2}{r}\frac{n}{2(n+2)}(\cos\phi\,\vec{e}_x+\sin\phi\,\vec{e}_y).$$ 1 P

Für $r < a$ fließt durch C der Strom $I(r)$:

$$I(r) = \int_0^r dr'\, r' \int_0^{2\pi} d\phi'\, j_o \left[1 - \left(\frac{r'}{a}\right)^n\right] = 2\pi\, j_o \int_0^r dr' \left[r' - \frac{(r')^{n+1}}{a^n}\right] = \pi\, j_o\, r^2 \left(1 - \frac{2}{n+2}\frac{r^n}{a^n}\right), \qquad 1\,\mathrm{P}$$

$$\oint_C d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0\, I_c \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\pi\, r\, B = \pi\, j_o\, r^2 \left(1 - \frac{2}{n+2}\frac{r^n}{a^n}\right).$$

Daraus folgt

$$B = \frac{\mu_0\, j_o\, r}{2}\left(1 - \frac{2}{n+2}\frac{r^n}{a^n}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0\, j_o\, r}{2}\left(1 - \frac{2}{n+2}\frac{r^n}{a^n}\right)\vec{e}_\phi = \frac{\mu_0\, j_o\, r}{2}\left(1 - \frac{2}{n+2}\frac{r^n}{a^n}\right)(\cos\phi\, \vec{e}_x + \sin\phi\, \vec{e}_y). \qquad 1\,\mathrm{P}$$

Aufgabe 4: 6 Punkte

Ein Pion (Masse M_π) zerfalle in ein Myon (Masse m_μ) und ein Neutrino (Masse $m_\nu \simeq 0$). Bestimmen Sie Ausdrücke für Energie und Impuls des Myons im Ruhesystem des Pions in Abhängigkeit von M_π und m_μ. Wie weit fliegt das Myon im Mittel, wenn seine mittlere Lebensdauer τ beträgt? (ausgedrückt durch M_π, m_μ und τ).

$$\pi^- \to \mu^-\, \bar{\nu}_\mu$$

Im Ruhesystem des Pions:

$$p_\pi^\alpha = (c^2 M_\pi, \vec{0}), \qquad p_\mu^\alpha = (E_\mu, \vec{p}_\mu), \qquad p_\nu^\alpha = (E_\nu, \vec{p}_\nu).$$

Relativistische Energie-Impuls Beziehung:

$$E_\mu^2 = c^4 m_\mu^2 + c^2 |\vec{p}_\mu|^2 \qquad E_\nu^2 = c^2 \vec{p}_\nu^{\,2}. \qquad 1\,\mathrm{P}$$

Erhaltung des Viererimpulses:

$$p_\pi^\alpha = p_\mu^\alpha + p_\nu^\alpha, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} E_\mu + E_\nu = c^2 M_\pi, \\ \vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu = 0. \end{cases} \qquad 1\,\mathrm{P}$$

Daraus folgt

$$\begin{cases} \sqrt{c^4 m_\mu^2 + c^2 \vec{p}_\mu^{\,2}} + c|\vec{p}_\nu| = c^2 M_\pi, \\ \vec{p}_\mu = -\vec{p}_\nu, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad |\vec{p}_\mu| = |\vec{p}_\nu| = |\vec{p}|.$$

Dann

$$c^4 m_\mu^2 + c^2 |\vec{p}|^2 = c^4 M_\pi^2 + c^2 |\vec{p}|^2 - 2c^3 M_\pi |\vec{p}| \qquad \Rightarrow \qquad |\vec{p}| = c\, \frac{M_\pi^2 - m_\mu^2}{2M_\pi}. \qquad 1\,\mathrm{P}$$

Daraus folgt

$$E_\mu = c\sqrt{c^2\, m_\mu^2 + |\vec{p}_\mu|^2} = c^2\, \frac{M_\pi^2 + m_\mu^2}{2M_\pi}. \qquad 1\,\mathrm{P}$$

Zusammenhang zwischen Impuls, Energie und Geschwindigkeit:

$$|\vec{p}| = \gamma\, m\, v, \qquad E = \gamma\, m\, c^2.$$

Daraus folgt

$$v = \frac{|\vec{p}|}{E}\, c^2, \qquad \gamma = \frac{E}{m\, c^2}, \qquad \gamma\, v = \frac{|\vec{p}|}{m}.$$

Das Myon fliegt im Mittel im Ruhesystem des Pions:

$$s = \gamma\, \tau\, v = \tau\, \frac{|\vec{p}_\mu|}{m_\mu} = \tau\, c\, \frac{M_\pi^2 - m_\mu^2}{2 M_\pi m_\mu}, \qquad 1+1\,\mathrm{P}$$

(Das γ kommt von der Zeit-Dilatation).

Aufgabe 5: 3 Punkte

Für den Zusammenhang zwischen Wellenvektor $\vec{k}$ und Kreisfrequenz ω einer Welle in einem quadratischen Hohlleiter mit Kantenlänge a gilt (mit m ganzzahlig):

$$\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left(\frac{m}{a}\right)^2.$$

i) Was ergibt sich für die Phasengeschwindigkeit v_{ph} und die Gruppengeschwindigkeit v_{g}?

$$v_{\mathrm{ph}} = \frac{\omega}{k} = c\left[1 + \left(\frac{m\pi}{k\, a}\right)^2\right]^{1/2}. \qquad 1\,\mathrm{P}$$

$$v_{\mathrm{g}} = \frac{d\omega}{dk} = c\left[1 + \left(\frac{m\pi}{k\, a}\right)^2\right]^{-1/2}. \qquad 1\,\mathrm{P}$$

ii) Für welche Kreisfrequenzen ist die Ausbreitung von Wellen möglich?

Die Ausbreitung von Wellen ist möglich, wenn $\vec{k}$ reell ist, d.h. es muss einen Wert von m geben, so dass $\vec{k}^2 \geq 0$. Das bedeutet, $\vec{k}^2$ muss positiv sein, mindestens für $m = 1$. $\frac{1}{2}$ P

Daraus folgt die folgende Bedingung für die Kreisfrequenzen, die die Ausbreitung von Wellen ermöglicht:

$$\omega \geq \frac{\pi\, c}{a}. \qquad \tfrac{1}{2}\,\mathrm{P}$$

Aufgabe 6: 10 Punkte

Eine Welle sei durch die Potentiale $\vec{A} = A_0\, \vec{e}_y\, \sin(kx - \omega t)$ und $\Phi = 0$ beschrieben.

i) Berechnen Sie die elektrische und magnetische Feldstärke.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = A_0\, \omega \vec{e}_y\, \cos(kx - \omega t).$$ 1 P

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \vec{e}_z\, \frac{\partial A_y}{\partial x} = A_0\, k \vec{e}_z\, \cos(kx - \omega t).$$ 1 P

ii) Die Welle falle nun auf ein Elektron, welches durch eine Kraft $\vec{F} = -m\,\alpha^2\,\vec{r}$ an seine Ruhelage bei $\vec{r} = 0$ gebunden ist (harmonischer Oszillator). Wie lauten die Bewegungsgleichungen für die drei Koordinaten $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ des Elektrons?

Lorentz Kraft:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -m\,\alpha^2\,\vec{r} + (-e)\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$ 1 P

$$\vec{p} = m\,\gamma\,\dot{\vec{r}}, \qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}}, \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma}.$$

Daraus folgt:

$$m\,\gamma\,\ddot{\vec{r}} + m\,\dot{\gamma}\,\dot{\vec{r}} = -m\,\alpha^2\,\vec{r} - e\,(\,\omega\,\vec{e}_y + k\,\dot{\vec{r}} \times \vec{e}_z\,)\,A_0 \cos(kx - \omega t).$$

In Kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} m\,\gamma\,\ddot{x} + m\,\dot{\gamma}\,\dot{x} &= -m\,\alpha^2\,x - e\,k\,\dot{y}\,A_0 \cos(kx - \omega t), \\ m\,\gamma\,\ddot{y} + m\,\dot{\gamma}\,\dot{y} &= -m\,\alpha^2\,y - e\,(\,\omega - k\,\dot{x}\,)\,A_0 \cos(kx - \omega t), \\ m\,\gamma\,\ddot{z} + m\,\dot{\gamma}\,\dot{z} &= -m\,\alpha^2\,z, \end{aligned}$$ 1 P

(wir haben benutzt $\dot{\vec{r}} \times \vec{e}_z = \dot{y}\,\vec{e}_x - \dot{x}\,\vec{e}_y$).

iii) Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen im nichtrelativistischen Grenzfall $v/c \ll 1$, d.h. setzen Sie $\gamma \to 1$ und vernachlässigen Sie Terme der Ordnung $\dot{\vec{r}}/c$. Zeigen Sie, dass die Gleichungen für x und z dann entkoppeln und mit den Anfangsbedingungen $x(0) = z(0) = \dot{x}(0) = \dot{z}(0) = 0$ trivial gelöst werden. Suchen Sie dann die Lösung für $y(t)$.

In der Bewegungsgleichung von Punkt $ii)$ benutzen wir $k = \omega/c$ und schreiben:

$$m\,\gamma\,\ddot{\vec{r}} + m\,\dot{\gamma}\,\dot{\vec{r}} = -m\,\alpha^2\,\vec{r} - e\,\omega\,(\,\vec{e}_y + \frac{\dot{\vec{r}}}{c} \times \vec{e}_z\,)\,A_0 \cos(kx - \omega t).$$

Im Grenzfall $\frac{|\dot{\vec{r}}|}{c} \ll 1$ $(\gamma \sim 1)$ findet man:

$$m\,\ddot{\vec{r}} = -m\,\alpha^2\,\vec{r} - e\,\omega\,\vec{e}_y\,A_0 \cos(kx - \omega t).$$

In Kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} &= -m\,\alpha^2\,x, \\ m\,\ddot{y} &= -m\,\alpha^2\,y - e\,\omega\,A_0 \cos(kx - \omega t), \\ m\,\ddot{z} &= -m\,\alpha^2\,z. \end{aligned}$$ 1 P

Die Gleichungen für $x(t)$ und $z(t)$ sind harmonische Oszillatoren, deren allgemeine Lösung ist:

$$x(t) = A_x \cos(\alpha t) + B_x \sin(\alpha t), \qquad z(t) = A_z \cos(\alpha t) + B_z \sin(\alpha t).$$

Mit den Anfangsbedingungen $x = z = \dot{x} = \dot{z} = 0$ zur Zeit $t = 0$ findet man:

$$x(0) = A_x = 0, \quad \dot{x}(0) = \alpha\, B_x = 0, \qquad z(0) = A_z = 0, \quad \dot{z}(0) = \alpha\, B_z = 0.$$

Daraus folgt:

$$x(t) = 0, \qquad z(t) = 0.$$

1 P

Die Gleichung für $y(t)$ wird dann:

$$m\,\ddot{y} = -\,m\,\alpha^2\,y - e\,\omega\,A_0 \cos(\omega t).$$

Das ist eine inhomogene differentielle Gleichung. Die allgemeine Lösung ist die allgemeine Lösung der assoziierten homogenen Gleichung (harmonischer Oszilator) plus eine Lösung der inhomogene Gleichung:

$$y(t) = A_y \cos(\alpha t) + B_y \sin(\alpha t) + y_0(t) \qquad \text{mit} \qquad m\,\ddot{y}_0 = -\,m\,\alpha^2\,y_0 - e\,\omega\,A_0 \cos(\omega t).$$

$1 + 1$ P

Suchen wir nun die spezielle Lösung $y_0(t)$. Ansatz:

$$y_0(t) = a\,\cos(\omega t)$$

Wir fügen den Ansatz in die differentielle Gleichung ein und finden:

$$-\,m\,a\,\omega^2\,\cos(\omega t) = -\,m\,\alpha^2\,a\,\cos(\omega t) - e\,\omega\,A_0 \cos(\omega t).$$

Daraus folgt:

$$-\,m\,a\,\omega^2 = -\,m\,\alpha^2\,a - e\,\omega\,A_0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha^2 - \omega^2)\,m\,a = -e\,\omega\,A_0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\omega\,e\,A_0}{(\omega^2 - \alpha^2)\,m}.$$

Die allgemeine Lösung für $y(t)$ ist dann:

$$y(t) = A_y \cos(\alpha t) + B_y \sin(\alpha t) + \frac{\omega\,e\,A_0}{(\omega^2 - \alpha^2)\,m}\,\cos(\omega t).$$

2 P