Aufgabe 1 *Maxwellgleichungen und ebene Wellen* **(12 Punkte)**

Betrachten Sie die Maxwellgleichungen im Vakuum

$$1\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad\qquad 4\quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$2\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad\qquad 3\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

mit vorgegebener Stromdichte $\vec{j}$ und Ladungsdichte ρ.

a) Leiten Sie aus den Maxwellgleichungen die Kontinuitätsgleichung für ρ und $\vec{j}$ her.

(3 Punkte)

b) Leiten Sie für ein ungeladenes ($\rho = 0, \vec{j} = 0$) System durch Entkoppeln der Maxwellgleichungen eine Differentialgleichung für das magnetische Feld $\vec{B}$ her.

(3 Punkte)

c) Gegeben sei die ebene Welle

$$\vec{B}(x,z,t) = (0, Ae^{i\alpha x + i\beta z}, 0)e^{-i\omega t}$$

(α, β reell) mit $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$ (Zur Abkürzung $k^2 = \epsilon_0\mu_0\omega^2$). Zeigen Sie, dass dies eine Lösung der in Teilaufgabe (b) hergeleiteten Differentialgleichung ist.

(3 Punkte)

d) Berechnen Sie das zum magnetischen Feld $\vec{B}$ aus (c) gehörende elektrische Feld $\vec{E}$ $\vec{E}(x,z,t) = \vec{E}(x,z)e^{-i\omega t}$.

(3 Punkte)

Aufgabe 2 *Kovariante Formulierung der Elektrodynamik* **(10 Punkte)**

a) Geben Sie den Zusammenhang zwischen den Feldstärketensoren mit oberen und unteren Indizes an, das heißt den Zusammenhang zwischen $F^{\mu\nu}$ und $F_{\mu\nu}$.

(1 Punkt)

b) Wie ändert sich der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ unter Lorentztransformationen?

(3 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass der Feldstärketensor invariant unter Eichtransformationen ist. Geben Sie dazu zuerst die kovariante Formulierung der allgemeinen Eichtransformation der Maxwellgleichungen an: $A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu + ...$

(Es gilt $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ mit dem 4-Potential $A^\mu = (\Phi, c\vec{A})$.)

(3 Punkte)

d) Berechnen Sie den dualen Feldstärketensor $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$.

Was ergibt sich für $\tilde{\tilde{F}}^{\mu\nu}$, also wenn man die Transformation zweimal anwendet?

(3 Punkte)

Hinweis:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{wenn } \mu,\nu,\rho,\sigma \text{ eine gerade Permutation von } (0,1,2,3) \text{ ist} \\ -1 & \text{wenn } \mu,\nu,\rho,\sigma \text{ eine ungerade Permutation von } (0,1,2,3) \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3 *Elektrisches Feld einer Wolke* **(10 Punkte)**

Die elektrostatischen Eigenschaften einer Wolke, die über der Erde steht, sollén durch ein Modell zweier Punktladungen über einer Ebene beschrieben werden.

Betrachten Sie dazu zwei Punktladungen $+q$ und $-q$, welche auf einer Achse liegen, die senkrecht auf einer Ebene (dem Erdboden) steht. Auf der Ebene kann eine Beobachter ein vertikales elektrisches Feld messen. Am Schnittpunkt von Achse und Ebene wird ein Wert des elektrischen Feldes von 100 V/m gemessen. Dabei beträgt der Abstand h der erdnahen Punktladung $-q$ zur Ebene $h = 300$ m. Der Abstand h beider Punktladungen zueinander beträgt $d = 300$ m.

a) Erklären Sie unter Beachtung der Tatsache, dass die Erdoberfläche auf konstantem Potential $\phi = 0$ V liegt, qualitativ, warum die Wolke in dieser Anordnung eine elektrische Kraft erfährt.

(2 Punkte)

b) Führen Sie geeignete Spiegelladungen ein und berechnen Sie aus den obigen Angaben den Betrag der Punktladung q und die elektrische Kraft $\vec{F}$ (Betrag und Richtung) auf die Punktladungen. Bestimmen Sie daraus schließlich die Gesamtkraft auf den Ladungs-Schwerpunkt der Wolke.

(4 Punkte)

c) Berechnen Sie das elektrische Feld im gesamten Raum und skizzieren Sie es qualitativ.

(4 Punkte)

Aufgabe 4 *Dünnwandiger Zylinder, "magnetische" Kraft durch Strom* **(10 Punkte)**

Betrachten Sie einen unendlich langen Hohlzylinder mit kreisförmigem Querschnitt (Radius a) und infinitesimal dünnem Mantel.

Auf dem Zylindermantel fließt parallel zur Zylinderachse ein konstanter Strom, der im Außenraum ein magnetisches Feld erzeugt.

Zusammen mit dem Stromfluß bewirkt dieses Feld eine Kraft. Diese Lorentz-Kraft auf den Hohlzylinder ist derart gerichtet, daß sie den Zylinder zusammendrücken möchte.

a) Berechnen Sie das gesamte Magnetfeld $\vec{B}$ (Betrag und Richtung) im Außenraum.

(4 Punkte)

b) Berechnen Sie die Kraft $\vec{F}$ (Betrag und Richtung) pro Zylinderlänge.

Hinweis: Ein möglicher Lösungsweg besteht darin, den Zylinder entlang seiner Achse in der Mitte in zwei Halbzylinder zu teilen, und nun die Kraft pro Länge des Mantels des einen Halbzylinders auf den des anderen auszurechnen.

(5 Punkte)

c) Um dieser Kraft entgegen zu wirken können sie das Innere des Zylinders unter Druck setzen. Welchen Druck brauchen Sie um die "magnetische" Kraft zu kompensieren?

Hinweis: Der Druck p auf eine Fläche A ist gegeben durch $p = F_{\perp}/A$, wobei $F_{\perp}$ die Normalkomponente der Kraft auf die Flaeche ist.

(1 Punkt)