

Aufgabe 1 Maxwellgleichungen und ebene Wellen

Teil a) Die Kontinuitätsgleichung für die Ladungsdichte ρ und Stromdichte \vec{j} beginnen wir mit den Maxwell-Gleichungen

$$\begin{array}{ll} (1) & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ (2) & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ (3) & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ (4) & \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array}$$

Durch Divergenz-Bildung folgt aus der zweiten Gleichung (Divergenz von Rotation = 0)

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Bilden wir jetzt die Zeitableitung der ersten Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

und setzen dies oben ein, so erhalten wir

$$0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

und teilen durch μ_0 um zur bekannten Kontinuitätsgleichung zu gelangen

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Teil b) Die Herleitung der Wellengleichung für das B-Feld, die magnetische Induktion, beginnen wir ebenfalls bei den vier Maxwell-Gleichungen aus Teil a), wobei wir gemäß Aufgabenstellung $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$ setzen,

$$\begin{array}{ll} (1) & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ (2) & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ (3) & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ (4) & \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array}$$

Mithilfe der Identität $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B}$ und unter Benutzung der dritten Maxwell Gleichung gelangen wir zu $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\Delta \vec{B}$. Nun bilden wir die Rotation der zweiten Maxwell-Gleichung

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ -\Delta \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Die Zeitableitung der vierten Maxwell Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

läßt sich nun einsetzen und führt auf

$$-\Delta \vec{B} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

womit sich die Wellengleichung für das B-Feld ergibt als

$$\Delta \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0.$$

Teil c) Nun ist zu zeigen, dass eine gegebene Ebene Welle eine Lösung der Wellengleichung ist, wobei

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ Ae^{i\alpha x + i\beta z} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}.$$

Der Laplace Operator der Wellengleichung ist $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$, die y -Ableitung ergibt 0, da keine y -Abhängigkeit vorhanden ist. Betrachten wir also zunächst $\partial_x^2 Ae^{i\alpha x + i\beta z}$ und $\partial_z^2 Ae^{i\alpha x + i\beta z}$,

$$\partial_x^2 Ae^{i\alpha x + i\beta z} = (i\alpha)^2 Ae^{i\alpha x + i\beta z} = -\alpha^2 Ae^{i\alpha x + i\beta z}$$

und analog

$$\partial_z^2 Ae^{i\alpha x + i\beta z} = (i\beta)^2 Ae^{i\alpha x + i\beta z} = -\beta^2 Ae^{i\alpha x + i\beta z}.$$

Somit gilt

$$\Delta \vec{B} = -(\alpha^2 + \beta^2) \vec{B}.$$

Da die Zeitabhängigkeit nur im Faktor $e^{-i\omega t}$ vorhanden ist, gilt für die zweite Zeitableitung $\partial_t^2 e^{-i\omega t} = (-i\omega)^2 e^{-i\omega t} = -\omega^2 e^{-i\omega t}$, oder

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{B}.$$

Orts- und Zeitableitungen in die Wellengleichung eingesetzt führt auf

$$-(\alpha^2 + \beta^2) \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 (-\omega^2 \vec{B}) = 0$$

oder

$$(\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 - (\alpha^2 + \beta^2)) \vec{B} = 0.$$

Diese Gleichung ist also genau dann erfüllt, wenn die in der Aufgabenstellung angegebene (Dispersions-) Beziehung $(\alpha^2 + \beta^2) = k^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2$ gilt.

Teil d) Als letztes ist die E-Feldstärke zu bestimmen, wobei gemäß Aufgabenstellung gilt $\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(x, z) e^{-i\omega t}$. Mithilfe der zweiten Maxwell-Gleichung finden wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}(\vec{x}, t) = -i\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E}(\vec{x}, t).$$

Jetzt ist vom obigen B-Feld noch explizit die Rotation zu bestimmen

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_z B_y \\ 0 \\ \partial_x B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\beta B_y \\ 0 \\ i\alpha B_y \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt dann sofort das E-Feld

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{-i\omega \epsilon_0 \mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{-i\omega \epsilon_0 \mu_0} \begin{pmatrix} -i\beta B_y \\ 0 \\ i\alpha B_y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Teil a) Der gesuchte Zusammenhang zwischen $F_{\alpha\beta}$ und $F^{\alpha\beta}$ lautet: $F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\rho} F^{\rho\sigma} g_{\sigma\beta}$, wobei der metrische Tensor gegeben ist als

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Teil b) F ist ein Tensor zweiter Stufe und transformiert sich deshalb als $F' = \Lambda F \Lambda^T$ oder in Komponentenschreibweise $F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}$.

Teil c) Die bereits bekannte Eichfreiheit des EM-Feldes ($\Phi' = \Phi + \partial_t \chi$ und $\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} \chi$) lautet in 4-Schreibweise $A^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$. Ausgehend von der Definition $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ betrachten wir also das geeichte Feld $F'^{\mu\nu}$ und finden

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu} &= \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu \\ &= \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu \partial^\nu \chi - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu \partial^\mu \chi \\ &= \underbrace{\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}_{F^{\mu\nu}} + \underbrace{\partial^\mu \partial^\nu \chi - \partial^\nu \partial^\mu \chi}_{=0[\text{Vertauschbarkeit der zweiten Ableitung}]} \\ &= F^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Teil d) Nun ist der duale Feldstärketensor $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ zu bestimmen. Dabei gilt:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \\ -1 & \text{ungerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \\ 0 & \text{wenn zwei oder mehr Indizes gleich sind} \end{cases} \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit $F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\rho} F^{\rho\sigma} g_{\sigma\beta}$ (siehe a)) folgt also

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ F_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{pmatrix} \\ F_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit können wir nun $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ berechnen. Als erstes betrachten wir die Diagonalelemente, wegen ϵ muss gelten $0 = \tilde{F}^{00} = \tilde{F}^{11} = \tilde{F}^{22} = \tilde{F}^{33}$ (bei zwei oder mehr gleichen Indizes ist $\epsilon = 0$, deshalb tragen im Folgenden auch immer nur zwei Terme zu jeder Komponente bei). Eine komponentenweise Betrachtung liefert:

$$\tilde{F}^{01} = \frac{1}{2} (\underbrace{\epsilon^{0123}}_{+1} F_{23} + \underbrace{\epsilon^{0132}}_{-1} F_{32}) = \frac{1}{2} (F_{23} - F_{32}) = \frac{1}{2} (-cB_x - cB_x) = -cB_x$$

im letzten Schritt wurde im zweiten Term im ϵ eine Permutation (2 mit 3) ausgeführt,

um die "richtige" Reihenfolge 0123 zu erhalten, deshalb wird $\epsilon = -1$. Bei der Bestimmung von \tilde{F}^{10} ergibt sich in jedem ϵ eine zusätzliche Permutation (0 und 1), deshalb gilt $\tilde{F}^{10} = -\tilde{F}^{01} = cB_z$.

$$\tilde{F}^{02} = \frac{1}{2}(\underbrace{\epsilon^{0213}}_{-1} F_{13} + \underbrace{\epsilon^{0231}}_{+1} F_{31}) = \frac{1}{2}(-F_{13} + F_{31}) = \frac{1}{2}(-cB_y - cB_y) = -cB_y$$

Da für \tilde{F}^{20} wiederum in jedem ϵ eine zusätzliche Vertauschung anfällt, gilt wiederum (wie auch immer im Folgenden) $\tilde{F}^{02} = -\tilde{F}^{20}$ und damit $\tilde{F}^{20} = cB_y$

$$\tilde{F}^{03} = \frac{1}{2}(\underbrace{\epsilon^{0312}}_{+1} F_{12} + \underbrace{\epsilon^{0321}}_{-1} F_{21}) = \frac{1}{2}(F_{12} - F_{21}) = \frac{1}{2}(-cB_z - cB_z) = -cB_z$$

$$\tilde{F}^{30} = cB_z$$

$$\tilde{F}^{12} = \frac{1}{2}(\underbrace{\epsilon^{1230}}_{-1} F_{30} + \underbrace{\epsilon^{1203}}_{+1} F_{21}) = \frac{1}{2}(-F_{30} + F_{03}) = E_z$$

$$\tilde{F}^{21} = -E_z$$

$$\tilde{F}^{13} = \frac{1}{2}(\underbrace{\epsilon^{1302}}_{-1} F_{02} + \underbrace{\epsilon^{1320}}_{+1} F_{20}) = \frac{1}{2}(-F_{02} + F_{03}) = -E_y$$

$$\tilde{F}^{31} = E_y$$

$$\tilde{F}^{23} = \frac{1}{2}(\underbrace{\epsilon^{2301}}_{+1} F_{01} + \underbrace{\epsilon^{2310}}_{-1} F_{10}) = \frac{1}{2}(F_{01} - F_{10}) = E_x$$

$$\tilde{F}^{32} = -E_x$$

Alle Komponenten zusammen gefügt ergeben den dualen Feldstärketensor

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -cB_x & -cB_y & -cB_z \\ cB_x & 0 & E_z & -E_y \\ cB_y & -E_z & 0 & E_x \\ cB_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

Als letztes bleibt noch die Frage zu beantworten, *Was ergibt sich wenn man die Transformation zweimal anwendet?* Es ergibt sich $\tilde{\tilde{F}}^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}$.

Zum Beweis dieser Aussage muss man $\tilde{\tilde{F}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{F}_{\rho\sigma}$ explizit berechnen. Analog zu oben bestimmt man zunächst $\tilde{F}_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}\tilde{F}^{\alpha\beta}g_{\beta\nu}$ zu

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -cB_x & -cB_y & -cB_z \\ cB_x & 0 & E_z & -E_y \\ cB_y & -E_z & 0 & E_x \\ cB_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & cB_x & cB_y & cB_z \\ cB_x & 0 & -E_z & E_y \\ cB_y & E_z & 0 & -E_x \\ cB_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix} \\ \tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & cB_x & cB_y & cB_z \\ -cB_x & 0 & E_z & -E_y \\ -cB_y & -E_z & 0 & E_x \\ -cB_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis läßt sich $\tilde{\tilde{F}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{F}_{\rho\sigma}$ berechnen. Aufgrund der Symmetrie des ϵ Tensors ist $\tilde{\tilde{F}}^{\mu\nu} = 0$ für alle $\mu = \nu$ (Diagonalelemente), also $\tilde{\tilde{F}}^{00} = \tilde{\tilde{F}}^{11} = \tilde{\tilde{F}}^{22} =$

\tilde{F}^{33} . Eine systematische komponentenweise Betrachtung ergibt weiter

$$\tilde{F}^{01} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\epsilon^{0123}}_{+1} \tilde{F}_{23} + \underbrace{\epsilon^{0132}}_{-1} \tilde{F}_{32} \right) = \frac{1}{2} (E_x - (-E_x)) = E_x$$

$$\tilde{F}^{02} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\epsilon^{0213}}_{-1} \tilde{F}_{13} + \underbrace{\epsilon^{0231}}_{+1} \tilde{F}_{31} \right) = \frac{1}{2} (-(-E_y) + E_y) = E_y$$

$$\tilde{F}^{03} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\epsilon^{0312}}_{+1} \tilde{F}_{12} + \underbrace{\epsilon^{0321}}_{-1} \tilde{F}_{31} \right) = \frac{1}{2} (E_z - (-E_z)) = E_z$$

durch eine zusätzliche Permutation im ϵ Tensor ("-1") erhält man daraus die Komponenten

$$\tilde{F}^{10} = -\tilde{F}^{01} = -E_x \quad \tilde{F}^{20} = -\tilde{F}^{02} = -E_y \quad \tilde{F}^{30} = -\tilde{F}^{03} = -E_z$$

weiterhin

$$\tilde{F}^{12} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\epsilon^{1203}}_{+1} \tilde{F}_{03} + \underbrace{\epsilon^{1230}}_{-1} \tilde{F}_{30} \right) = \frac{1}{2} (cB_z - (-cB_z)) = cB_z$$

$$\tilde{F}^{13} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\epsilon^{1302}}_{-1} \tilde{F}_{02} + \underbrace{\epsilon^{1320}}_{+1} \tilde{F}_{20} \right) = \frac{1}{2} (-cB_y + (-cB_y)) = -cB_y$$

$$\tilde{F}^{23} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\epsilon^{2310}}_{-1} \tilde{F}_{10} + \underbrace{\epsilon^{2301}}_{+1} \tilde{F}_{01} \right) = \frac{1}{2} (-(-cB_x) + cB_x) = cB_x$$

aus Symmetriegründen gilt auch hier

$$\tilde{F}^{21} = -\tilde{F}^{12} = -cB_z \quad \tilde{F}^{31} = -\tilde{F}^{13} = cB_y \quad \tilde{F}^{32} = -\tilde{F}^{23} = -cB_x.$$

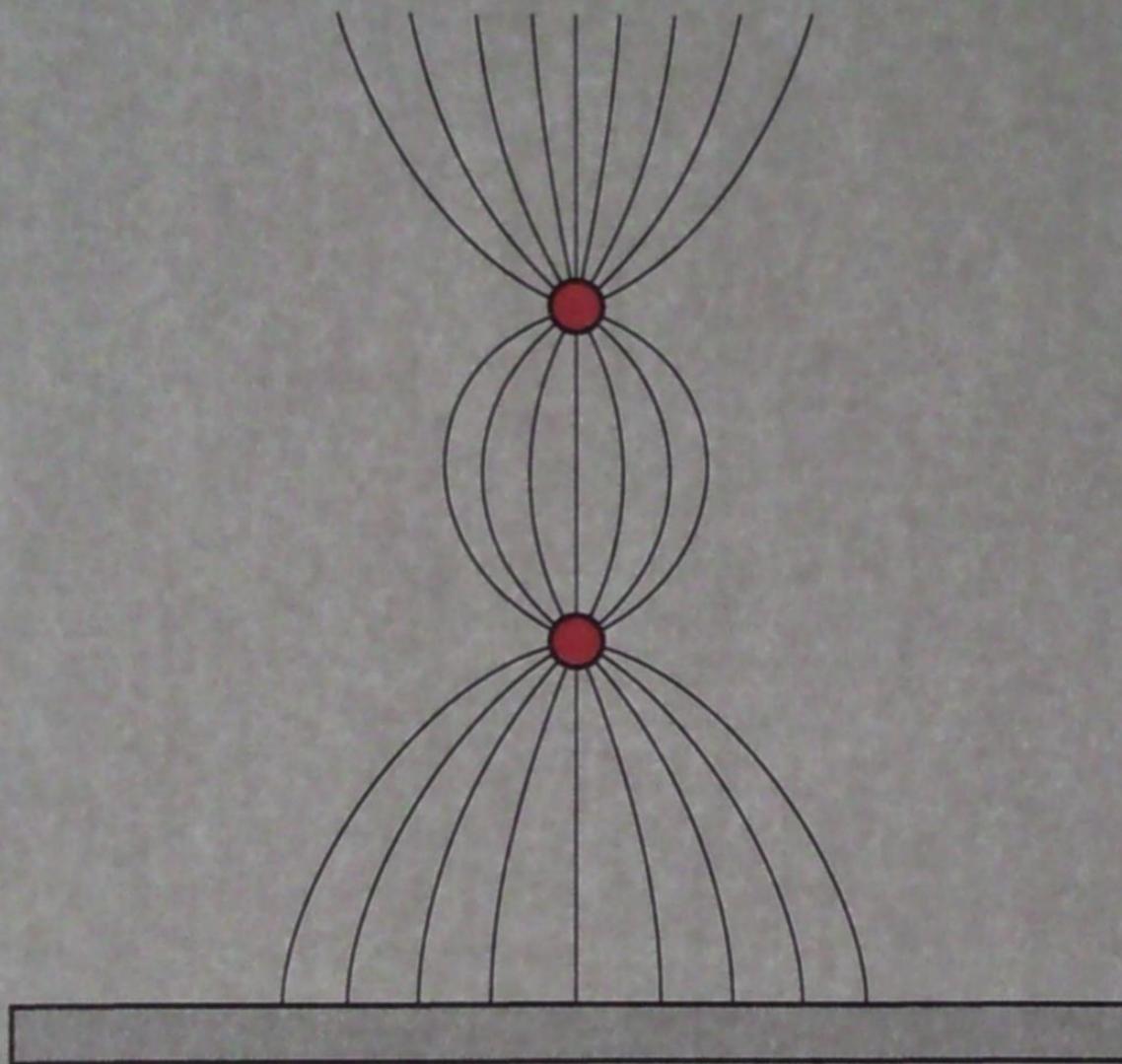
Mit diesen Ergebnissen läßt sich $\tilde{F}^{\mu\nu}$ nun angeben als

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ -E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ -E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} -F^{\mu\nu}.$$

Aufgabe 3 Elektrisches Feld einer "Wolke"

Teil a) Wenn eine (Test-) Ladung sich in einem elektrischen Feld befindet erfährt sie eine Kraft. Die Wolke ist eigentlich als ganzes elektrisch neutral (in dieser Aufgabe), allerdings existiert intern eine Ladungsverteilung, die eine Feldverteilung erzeugt, und ausserdem auf der Erde eine Ladungsverteilung induziert. Somit haben wir lokal kein neutrales Problem mehr, sondern müssen eigentlich die Gesamtkraft auf den Ladungsschwerpunkt aus den lokal resultierenden Kräften auf die Ladungsverteilung berechnen.

...



Teil b) Der Beobachtungspunkt (und Koordinatenursprung) sei direkt unter dem Dipol, die wirkende Kraft ergibt sich entsprechend der Ladungen und Bildladungen entsprechend dem Ausdruck

$$\begin{aligned} F &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{(2d)^2} + \frac{1}{(3d)^2} + \frac{1}{(3d)^2} - \frac{1}{(4d)^2} \right] \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \left[\frac{2}{9} - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right] = -4.05 \times 10^{-3} N, \end{aligned}$$

für das E-Feld in diesem Punkt findet man dann entsprechend

$$E = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{d^2} - 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(2d)^2}$$

für die Ladung q ergibt sich damit dann z.B. der Ausdruck $q = \frac{8\pi\epsilon_0 d^2 E}{3} = 6.7 \times 10^{-4} C$.

c) Eine effiziente Möglichkeit zur Berechnung des elektrischen Felds \vec{E} bietet die Beziehung zum elektrischen Potential ϕ gemäß $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$. Zur Aufstellung des Potentials ist es zuerst nötig die Position der Ladungen und Bildladungen zu kennen. Laut Aufgabenstellung befindet sich Ladung $-q$ am Punkt $\vec{r}_1 = (0, 0, h)$ und die Ladung $+q$ am Punkt $\vec{r}_2 = (0, 0, h+d)$. Damit befinden sich die zwei benötigten Spiegelladungen also mit $+q$ am Punkt $\vec{r}_3 = (0, 0, -h) = -\vec{r}_1$ und mit $-q$ am Punkt $\vec{r}_4 = (0, 0, -(h+d)) = -\vec{r}_2$.

Somit gilt für das Potential ϕ

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{q}{|\vec{r} + \vec{r}_1|} + \frac{+q}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} + \frac{-q}{|\vec{r} + \vec{r}_2|} \right).$$

Unter Beachtung der Beziehung $\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$ berechnet sich das elektrische Feld \vec{E} im gesamten Raum demzufolge als

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{-(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + \frac{\vec{r} + \vec{r}_1}{|\vec{r} + \vec{r}_1|^3} + \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} + \frac{-(\vec{r} + \vec{r}_2)}{|\vec{r} + \vec{r}_2|^3} \right). \end{aligned}$$

Um den Feldverlauf zu bestimmen betrachten wir zunächst das Verhalten des Felds an der Grenzfläche, d.h. bei $z = 0$. Ausgeschrieben folgt von oben:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(-\frac{(x, y, z - h)}{(x^2 + y^2 + (z - h)^2)^{3/2}} + \frac{(x, y, z + h)}{(x^2 + y^2 + (z + h)^2)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x, y, z - 2h)}{(x^2 + y^2 + (z - 2h)^2)^{3/2}} - \frac{(x, y, z + 2h)}{(x^2 + y^2 + (z + 2h)^2)^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

bei $z = 0$ vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{(0, 0, 2h)}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} - \frac{(0, 0, 4h)}{(x^2 + y^2 + 4h^2)^{3/2}} \right)$$

und hat nur noch eine Komponente in z Richtung, steht also senkrecht auf der Erdoberfläche und zeigt nach unten. Der Verlauf des Felds über der Erdoberfläche ist dann der eines Dipols.

Skizze des berechneten elektrischen Felds: (s.o.)

Aufgabe 4 Dünnwandiger Zylinder, "magnetische" Kraft durch Strom

Bevor wir zur eigentlichen Lösung kommen, betrachten wir den Gesamtstrom $\vec{I} = I\hat{e}_z$ durch einen Hohlzylinder mit Radius a entlang der z -Achse. Die Stromdichte \vec{j} ist in diesem Fall gegeben als $\vec{j} = j_0\delta(\rho - a)\hat{e}_z$ und ist verknüpft mit dem Strom über

$$\begin{aligned}\vec{I} = I\hat{e}_z &= \int \vec{j} d\vec{f} \\ &= \int d\phi \int d\rho \rho j_0 \delta(\rho - a) \hat{e}_z \\ \vec{I} &= 2\pi a j_0 \hat{e}_z \quad \text{also} \quad I = 2\pi a j_0.\end{aligned}$$

Teil a) Eine Möglichkeit die magnetische Induktion, das \vec{B} -Feld, zu berechnen besteht darin, die Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

über eine (Kreis-) Fläche senkrecht zur z -Achse zu integrieren, d.h.

$$\begin{aligned}\oint \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} &= \mu_0 \oint \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} \\ \oint \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} &= \mu_0 \oint \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}\end{aligned}$$

hierbei wurde Satz von Stokes benutzt. Aufgrund der Symmetrie hat das B-Feld im Aussenraum nur eine ϕ -Komponente ("rechte Hand Regel"), diese ist entlang eines Kreises mit Radius ρ konstant und kann vor das Integral gezogen werden. Setzt man nun noch die Stromdichte ein, so erhält man

$$\begin{aligned}B_\phi \oint ds &= \mu_0 \oint j_0 \delta(\rho - a) \hat{e}_z \cdot d\vec{f} = \mu_0 j_0 \int d\phi \int d\rho \rho \delta(\rho - a) = \mu_0 2\pi a j_0 = \mu_0 I \\ B_\phi 2\pi \rho &= \mu_0 I \quad \text{somit} \quad B_\phi(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \quad \text{d.h.} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{e}_\phi.\end{aligned}$$

Teil b) Eine erster Weg die auf den Zylinder wirkende Kraft zu berechnen besteht darin, den Impulsfluß von der unteren in die obere Hälfte des Hohlzylinders zu betrachten (siehe Skizze unten). Dazu benötigen wir den Maxwell'schen Spannungstensor T für die Magnetostatik, gegeben als

$$T_{ij} = \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \delta_{ij} \frac{1}{\mu_0} B^2.$$

Die i te Komponente der Kraft \vec{F} ist damit gegeben als

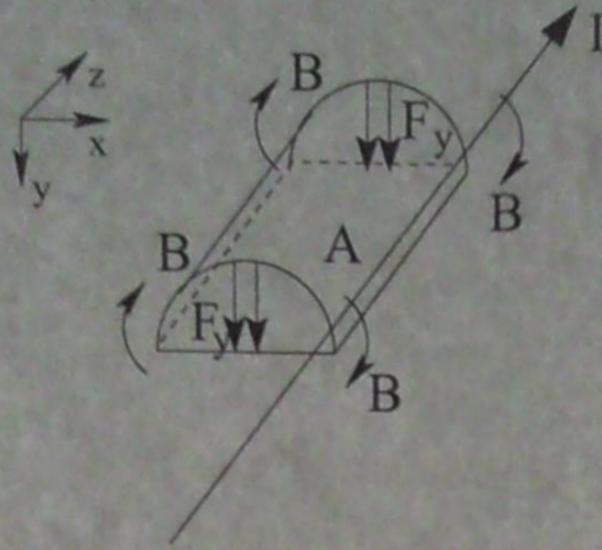
$$F_i = \int_{S(V)} d\vec{f} \sum_{j=1}^3 T_{ij} n_j,$$

\vec{n} ist der Normaleneinheitsvektor auf $S(V)$, und $S(V)$ ist eine den Körper umschliessende Fläche. In der gewählten Geometrie trägt aus Symmetriegründen nur die y Komponente bei

$$F_y = \frac{1}{\mu_0} \int_{S(V)} (B_y B_j - \frac{1}{2} B^2 \delta_{yj}) n_j.$$

Der Integrationsweg ergibt sich entlang der x -Achse (der zum schließen des Weges benötigte Halbkreis trägt bei " ∞ " nichts bei), und wir finden für die Kraft pro Länge

$$\frac{F_y}{L_z} = \frac{1}{\mu_0} \left(\int_{-\infty}^{-a} dx \frac{1}{2} \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \right)^2 + \int_a^{\infty} dx \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \right)^2 \right) = \frac{\mu_0 I^2}{(2\pi)^2} \underbrace{2 \int_a^{\infty} dx \frac{1}{x^2}}_{\frac{1}{a}} = \frac{\mu_0 I^2}{(2\pi)^2} \frac{2}{a}.$$



Teil b.2) Ein alternativer Weg zur Berechnung der Kraftwirkung auf den Hohlzylinder besteht darin, die durch das erzeugte Magnetfeld ausgeübte Kraft F_{21} auf die obere Hälfte des Hohlzylinders zu bestimmen. Diese ergibt sich aus der Beziehung

$$F_{21} = \int d^3\vec{r}_1 \vec{j}(\vec{r}_1) \times \vec{B}_2(\vec{r}_1)$$

$\vec{B}_2(\vec{r}_1)$ ist dabei das oben bestimmte B-Feld, also

$$\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \vec{B}_2(\rho_1, \phi_1, z_1) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho_1} \hat{e}_{\phi_1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho_1} \begin{pmatrix} -\sin(\phi_1) \\ \cos(\phi_1) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt für die magnetische Kraft auf die obere Hälfte des Hohlzylinders

$$\begin{aligned} F_{21} &= \int d^3\vec{r}_1 \vec{j}(\vec{r}_1) \times \vec{B}_2(\vec{r}_1) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\pi d\phi_1 \int_{-L_z/2}^{+L_z/2} dz_1 \int d\rho_1 \rho_1 j_0 \delta(\rho_1 - a) \frac{1}{\rho_1} \hat{e}_z \times \hat{e}_{\phi_1} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} j_0 L_z \int_0^\pi d\phi_1 \hat{e}_z \times \begin{pmatrix} -\sin(\phi_1) \\ \cos(\phi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \\ F_{21} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \underbrace{j_0}_{I/(2\pi a)} L_z \int_0^\pi d\phi_1 \begin{pmatrix} -\cos(\phi_1) \\ -\sin(\phi_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 I^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{a} L_z \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{F}_{21}}{L_z} &= -\mu_0 \frac{I^2}{(2\pi)^2} \frac{2}{a} \hat{e}_y. \end{aligned}$$

Es ergibt sich eine anziehende Kraft pro Längeneinheit L_z des Hohlzylinders.

Teil b.3) eine weitere Alternative ist die Berechnung der differentiellen Lorentz-Kraftdichte $\frac{\partial}{\partial A_{Kreisscheibe}} F_L$. So bekommt man zwar keine Kraft im eigentlichen Sinne, aber der damit berechnete Ausdruck entspricht einem Druck. j ist die Stromdichte.

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = \vec{j} \times \vec{B} \\ \vec{j} &= \frac{I}{2\pi a} \delta(\rho - a) \cdot \vec{e}_z \\ \vec{F}_L &= -\mu_0 \frac{I^2}{2\pi a^2} \delta(\rho - a) \cdot \vec{e}_\rho \end{aligned}$$

$$\rho|_{\rho=a} = \frac{d\vec{F}_\perp}{dA}$$

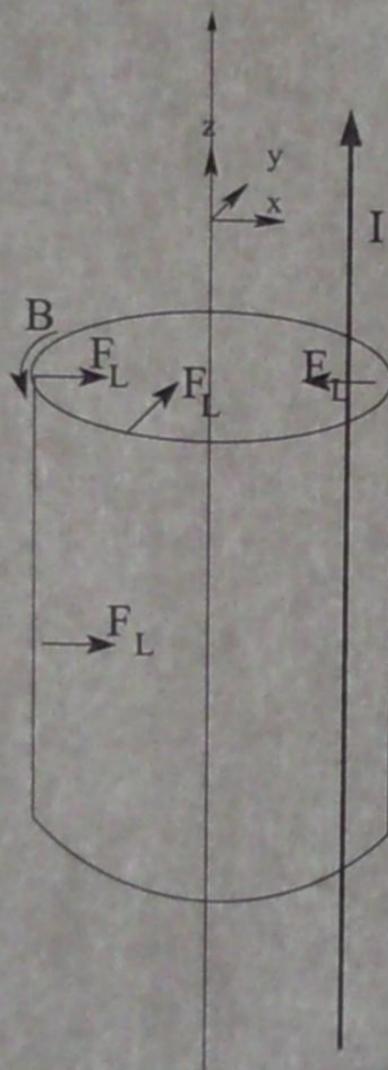
$$\begin{aligned}
 d\vec{F}_\perp &= \int_0^\infty d\rho \int_{dA} dA (\vec{F}_L \cdot \vec{e}_\rho) \\
 &= \int_0^\infty a d\rho \cdot \delta(\rho - a) \int_{d\phi}^{\phi+d\phi} d\phi \int_{dz}^{z+dz} dz \left(-\mu_0 \frac{I^2}{4\pi^2 a^2} \right)
 \end{aligned}$$

Somit entsteht durch die Lorentzkraft ein Unterdruck im Zylinder:

$$\frac{dF_\perp}{dA_{\text{Kreisscheibe}}} = -\mu_0 \frac{I^2}{4\pi^2 a^2}$$

Dies muss durch einen Druck P kompensiert werden:

$$P = +\mu_0 \frac{I^2}{4\pi^2 a^2}$$



Teil c) Um die in Teilaufgabe b.1) und b.2) bestimmte und den Hohlzylinder zusammen pressende Kraft zu kompensieren, kann man das Innere des Hohlzylinders unter Druck setzen. Der Druck berechnet sich als Kraft pro Fläche, die Kraft (L_z ist Längeneinheit) beträgt

$$F = |\vec{F}_{21}| = \frac{\mu_0 I^2}{(2\pi)^2} \frac{2}{a} L_z$$

die benötigte Fläche ist die Schnittfläche A_{Zyl} des Zylinders, und ist Durchmesser mal Höhe, also $A_{\text{Zyl}} = 2aL_z$. Damit ergibt sich für den Druck P

$$P = \frac{F}{A_{\text{Zyl}}} = \frac{\frac{\mu_0 I^2}{(2\pi)^2} \frac{2}{a} L_z}{2aL_z} = \frac{\mu_0 I^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{a^2}$$

$$P = \frac{\mu_0 I^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{a^2}$$