Modulklausur zur Vorlesung
Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Kasprzik, Dr. L. Mihaila 14.3.2014

Bearbeitungsdauer: 120 Minuten

Name:				Gruppe:	
Matrikelnummer:					
Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Geben Sie bitte auch das Aufgabenblatt ab.					
Aufgabe:	1	2	3	4	$\sum$
Hilfsmittel: Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.					

Aufgabe 1: Quickies (*12 Punkte*)

(a) Berechnen Sie $\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha}$. *(2 Punkte)*

(b) Zwei Teilchen der Massen $m_1 = m_2 = m$ und Impulsen $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}$ kollidieren und erzeugen ein ruhendes Teilchen der Masse M. Wie groß ist M? *(2 Punkte)*

(c) Die magnetische Induktion sei gegeben durch $\vec{B}(\vec{r}) = b_0(x+y)\vec{e}_z$. Finden Sie ein zugehöriges Vektorpotential $\vec{A}$, das *nicht* die Coulomb-Bedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ erfüllt. *(2 Punkte)*

(d) Wie lauten die Maxwell-Gleichungen in manifest-kovarianter Form? *(2 Punkte)*

(e) Die Greensche Funktion des Laplace-Operators lautet

$$G(\vec{r} - \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,, \quad \text{mit} \quad \Delta_{\vec{r}}\, G(\vec{r} - \vec{r}\,') = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\,.$$

Begründen Sie, warum $\varphi(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3r'\, G(\vec{r} - \vec{r}\,')\varrho(\vec{r}\,')$ die Poisson-Gleichung $\Delta\varphi(\vec{r}) = -\frac{\varrho(\vec{r})}{\epsilon_0}$ erfüllt. *(2 Punkte)*

(f) a^μ und b^μ seien 4-Vektoren im Inertialsystem IS. a'^μ und b'^μ ergeben sich aus a^μ und b^μ durch Lorentztransformationen. Zeigen Sie, dass gilt: $a \cdot b = a' \cdot b'$. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2: Magnetostatik (*10 Punkte*)

Betrachten Sie die Stromverteilung ($I =$ konstant)

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{r}) \quad = \quad & \delta(z)\theta(-x)\delta(y-a)I\vec{e}_x \\ & -\delta(z)\theta(x)\delta(\rho - a)I\vec{e}_\phi \\ & -\delta(z)\theta(-x)\delta(y+a)I\vec{e}_x\,. \end{aligned}$$

Dabei ist $a > 0$, konstant, $\vec{r} = (x,y,z)^{\mathrm{T}}, \vec{e}_x = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\vec{e}_\phi = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)^{\mathrm{T}}$ und $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$.

Bitte wenden!

(a) Skizzieren Sie die Stromverteilung. Achten Sie auf eine vollständige Achsenbeschriftung und zeichnen Sie die Richtung des Stromflusses ein. *(4 Punkte)*
(b) Berechnen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$, die von dieser Stromverteilung am Koordinatenursprung $\vec{r}_0 = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$ erzeugt wird. *(6 Punkte)*
Hinweis: Es ist

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2}\,.$$

Aufgabe 3: Hertzscher Dipol (*10 Punkte*)

Gegeben sei der Hertzsche Dipol $\vec{p}(t) = (0,0,p(t))^{\mathrm{T}}$, mit $p(t) = p_0 \cos\omega t$. Die zugehörigen elektromagnetischen Potentiale sind in Fernfeldnäherung gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r},t) &= (0,0,A(r,t))^{\mathrm{T}}\,, \quad \text{mit} \quad A(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{\partial p(t-r/c)}{\partial t}\,, \\ \varphi(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{cr^2}\,\vec{r}\cdot\frac{\partial\vec{p}(t-r/c)}{\partial t}\,. \end{aligned}$$

Berechnen Sie in Fernfeldnäherung
(a) die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r},t)$ und *(5 Punkte)*
(b) das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r},t)$. *(5 Punkte)*
Hinweis: Überlegen Sie sich *vor* der expliziten Ausführung der Ableitungen, welche Terme für $r \gg \lambda$ ($\lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega$) stärker als $1/r$ unterdrückt sind, und vernachlässigen Sie diese.

Aufgabe 4: Elektromagnetische Wellen im Vakuum (*8 Punkte*)

Die elektromagnetischen Felder im Vakuum seien gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(kz-\omega t)}\vec{e}_y\,, \\ \vec{B}(\vec{r},t) &= E_0\, e^{i(kz-\omega t)}\left[-\frac{k}{\omega}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\vec{e}_x - i\frac{\pi}{\omega a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\vec{e}_z\right]. \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie die Dispersionsrelation $\omega(k)$.
Hinweis: Verwenden Sie die Maxwell-Gleichungen. *(4 Punkte)*
(b) Berechnen Sie die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes und den Poynting-Vektor. *(4 Punkte)*

Weitere nützliche Formeln

Feldstärketensor:
$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$
Energiedichte und Poynting-Vektor:
$w = \frac{1}{2\mu_0}(|\mathrm{Re}(\vec{B})|^2 + |\mathrm{Re}(\vec{E})|^2/c^2)\,, \quad \vec{S} = (\mathrm{Re}(\vec{E}) \times \mathrm{Re}(\vec{B}))/\mu_0$
Biot-Savart-Gesetz:
$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\,[\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r}-\vec{r}\,')]/|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3$
Laplace-Operator in Kugelkoordinaten:
$\Delta\psi(\vec{r}) = 1/r^2\partial_r(r^2\partial_r\psi(\vec{r}))$ + Winkelanteile
Divergenz in Kugelkoordinaten:
$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$
Gradient in Kugelkoordinaten:
$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi$
Definition der Lorentztransformationen Λ:
$g = \Lambda^{\mathrm{T}}\,g\,\Lambda$, wobei g der metrische Tensor ist.