Modulklausur zur Vorlesung
Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Kasprzik, Dr. L. Mihaila 24.4.2014

Bearbeitungsdauer: 120 Minuten

Name: ____________ Gruppe: ______

Matrikelnummer: ____________

Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Geben Sie bitte auch das Aufgabenblatt ab.

Aufgabe:	1	2	3	4	$\sum$

Hilfsmittel: Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe 1: Quickies (*10 Punkte*)

(a) Sei $\vec{V}(\vec{r}) = \vec{r}$ und $\vec{W}(\vec{r})$ ein differenzierbares Vektorfeld. Berechnen Sie $\vec{\nabla} \cdot (\vec{V}(\vec{r}) \times \vec{W}(\vec{r}))$. *(2 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass sich $j^\mu A_\mu$ unter Eichtransformationen $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ nur um eine Vierer-Divergenz $\partial_\mu K^\mu$ ändert, und bestimmen Sie K^μ. *(2 Punkte)*

(c) Betrachten Sie eine endlich ausgedehnte beliebige Ladungsverteilung, die sich in einem Würfel mit der Kantenlänge 1 cm befindet. Mit welcher relativen Genauigkeit können Sie das Potential der Ladungverteilung im Abstand von 1 m angeben, wenn Sie lediglich die Gesamtladung $Q = 1$ C und den Betrag des Dipolmomentes $p = 3$ C cm kennen? *(2 Punkte)*

(d) Sei $\varrho = 0$, $\vec{j} = 0$. Zeigen Sie, dass die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ die Wellengleichung erfüllen.
Hinweis: Es ist $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$. *(2 Punkte)*

(e) Wie transformieren sich ϱ und $\vec{j}$ unter Lorentztransformationen

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)\,,\ x' = \gamma(x - \beta ct)\,,\ y' = y\,,\ z' = z\,?$$

(2 Punkte)

Aufgabe 2: Multipolentwicklung (*10 Punkte*)

Eine Hohlkugel mit Radius R trage die Flächenladungsdichte $\sigma(\theta, \phi) = \sigma_0(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta)$.

(a) Berechnen Sie das Potential $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\varrho(\vec{r}\,')/|\vec{r} - \vec{r}\,'|$ innerhalb und ausserhalb der Kugel. Verwenden Sie hierzu die Entwicklung

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)\,,$$

Bitte wenden!

mit $r_< = \min(r, r')$, $r_> = \max(r, r')$. *(4 Punkte)*
(*Zwischenergebnis:* $\varphi_<(\vec{r}) = f(\theta)\, r^2/R$, $\varphi_>(\vec{r}) = f(\theta)\, R^4/r^3$.)
(b) Berechnen Sie das elektrische Feld im ganzen Raum. *(4 Punkte)*
(c) Untersuchen Sie das Stetigkeitsverhalten der Normal- und Tangentialkomponenten von $\vec{E}$. *(2 Punkte)*

Aufgabe 3: Greensche Funktion (*12 Punkte*)

Betrachten Sie eine unendlich ausgedehnte, leitende Ebene $\partial V = \{\vec{r} : x = -y\}$. Oberhalb der Ebene bei $\vec{r}_a = (a, a, 0)^{\mathrm{T}}$ befinde sich die Ladung q.
(a) Geben Sie die Greensche Funktion für Dirichletsche Randbedingungen $G_D(\vec{r}, \vec{r}\,')$ für den Halbraum $V = \{\vec{r} : x > -y\}$ an. Erinnern Sie sich hierzu an den Zusammenhang mit der Methode der Spiegelladungen. Beachten Sie, dass G_D auf ∂V verschwinden muss.
Hinweise: Es ist allgemein $G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + f(\vec{r}, \vec{r}\,')$, mit $\Delta f(\vec{r}, \vec{r}\,') = 0$ für alle $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ in V. Beachten Sie, dass $\Delta G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = -1/\epsilon_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$ für alle $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ in V. *(4 Punkte)*
(b) Berechnen Sie das Potential im Halbraum $V = \{\vec{r} : x > -y\}$ unter der Randbedingung $\varphi|_{\vec{r} \in \partial V} = 0$.
Hinweis: Gehen Sie von der allgemeinen Darstellung des Potentials

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}^3 r'\, \varrho(\vec{r}\,') G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') - \epsilon_0 \oint_{\partial V} \varphi(\vec{r}\,') \frac{\partial G_D}{\partial n'}\, \mathrm{d}f'$$

aus, wobei $\vec{n}\,'$ die nach außen gerichtete Flächennormale auf ∂V ist ($\partial G_D/\partial n' = \vec{n}\,' \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}\,'} G_D$). *(4 Punkte)*
(c) Sei nun $\varphi = \varphi_0 \neq 0$ in der Ebene $\partial V = \{\vec{r} : x = -y\}$.
(i) Wie lautet nun $G_D(\vec{r}, \vec{r}\,')$?
(ii) Berechnen Sie φ im Halbraum $V = \{\vec{r} : x > -y\}$. *(4 Punkte)*

Aufgabe 4: Magnetostatik (*8 Punkte*)

Gegeben sei das Vektorpotential

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\, \vec{h} \times \vec{r}$$

mit einem konstanten Vektor $\vec{h}$.
(a) Berechnen Sie die magnetische Induktion. *(2 Punkte)*
(b) Legen Sie den konstanten Vektor $\vec{h}$ in z-Richtung, d.h. $h_x = h_y = 0$, $h = h_z$ und geben Sie die Komponenten A_x, A_y, A_z des Vektorpotentials explizit an. *(2 Punkte)*
(c) Welche magnetische Induktion gehört zum Potential $A'_x = -hy$, $A'_y = A'_z = 0$? *(2 Punkte)*
(d) Geben Sie die Eichtransformation $\Lambda(\vec{r})$ explizit an, die $\vec{A}$ in $\vec{A}'$ überführt. *(2 Punkte)*

Weitere nützliche Formeln

Kugelflächenfunktionen: ($\int \mathrm{d}\Omega\, Y^*_{l'm'}(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$, $Y_{l\,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m\, Y^*_{lm}(\theta, \phi)$)

$$Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}\,, \quad Y_{10} = \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}} \cos\theta\,, \quad Y_{11} = -\sqrt{\tfrac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{i\phi}\,,$$

$$Y_{20} = \sqrt{\tfrac{5}{8\pi}} (\tfrac{3}{2}\cos^2\theta - \tfrac{1}{2})\,, \quad Y_{21} = -\sqrt{\tfrac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta\, e^{i\phi}\,, \quad Y_{22} = \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{15}{2\pi}} \sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten:

$$\Delta\psi(\vec{r}) = 1/r^2 \partial_r (r^2 \partial_r \psi(\vec{r})) + \text{Winkelanteile}$$

Divergenz in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

Gradient in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$