## Aufgabe 1 - Elektromagnetische Fingerübungen (12 Punkte)

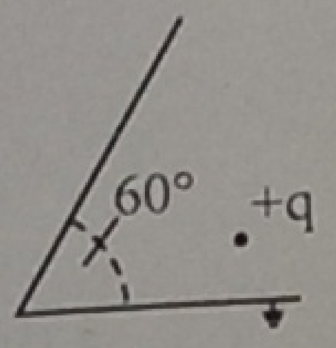
(a) Zwölf identische Punktladungen $q$ seien so angeordnet, dass sie die Eckpunkte eines regelmäßigen 12-Ecks bilden. Bestimmen Sie Betrag und Richtung der Kraft, die auf eine Probeladung $Q$ im Zentrum des 12-Ecks wirkt. Bestimmen Sie Betrag und Richtung der Kraft auf die Probeladung $Q$ im Mittelpunkt des 12-Ecks auch für den Fall, dass eine der 12 'Eckladungen' entfernt wurde.

(b) Wiederholen Sie die Betrachtungen aus (a) für den Fall eines regelmäßigen 13-Ecks. D.h. 13 identische Ladungen bilden ein regelmäßiges 13-Eck. Bestimmen Sie Betrag und Richtung der Kraft auf eine Probeladung $Q$ im Zentrum des 13-Ecks und betrachten Sie auch wieder den Fall, dass eine der 13 Ladungen entfernt wurde.

(c) Begründen Sie **kurz** stichpunktartig wie Sie zu den Ergebnissen in (a) und (b) gekommen sind.

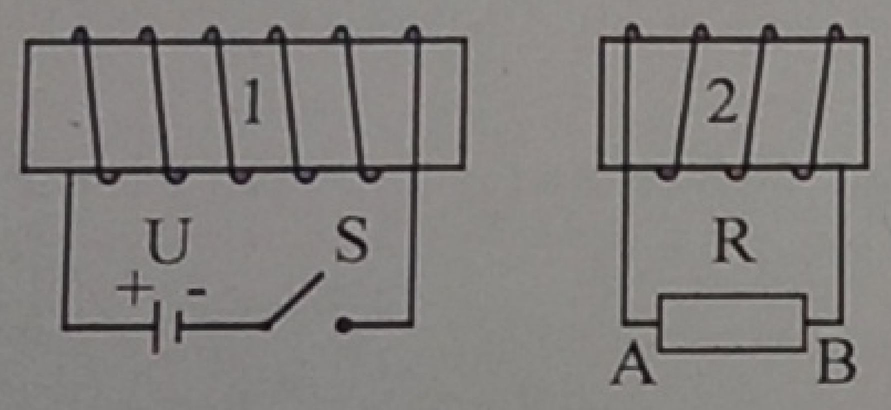
---

(d) Zwei unendlich ausgedehnte, geerdete Leiterplatten seien unter einem Winkel von $60°$ zueinander ausgerichtet. Eine einzelne Punktladung $+q$ sei, wie in der Abbildung dargestellt, im Zwischenraum platziert. Fertigen Sie eine Skizze an, in der Sie deutlich die Positionen und Ladungen aller notwendigen Spiegelladungen zur Berechnung des Potentials eintragen. (Das Potential müssen Sie nicht berechnen.)




---

(e)




Betrachten Sie einen Versuchsaufbau, wie er links dargestellt ist, mit Gleichspannungsquelle, Schalter, Widerstand und zwei Elektromagneten mit Eisenkern. Benennen Sie nun die Richtung des Stromflusses durch den Widerstand $R$ (von A nach B oder von B nach A), wenn der Schalter $S$ geschlossen wird und begründen Sie ihre Wahl stichpunktartig.

(f) Betrachten Sie nochmals den Versuchsaufbau in (e) mit offenem Schalter $S$. Benennen und begründen Sie in Stichpunktform die Stromflussrichtung durch den Widerstand $R$, wenn Elektromagnet 2 in Richtung Elektromagnet 1 bewegt wird.

---

(g) Wie ist die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes in dispersionslosen Medien definiert?

---

(h) Wie lautet die Coulomb-Eichung?

(i) Wie kann man das skalare Potential $\phi(\mathbf{r}, t)$ und das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ transformieren, sodass die Coulomb-Eichung erfüllt ist, aber die durch diese Potentiale beschriebene Physik unverändert bleibt?

---

(j) Notieren Sie die Wellengleichung im Vakuum für den Vektor des elektrischen Feldes sowohl im Zeit-Raum als auch im Frequenz-Raum.

---

(k) Notieren Sie die Ausdrücke für das komplexe $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$- sowie das komplexe $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$-Feld einer linear polarisierten elektromagnetischen Welle im Vakuum, wobei gelte: $\mathbf{E}(\mathbf{r} = \mathbf{0}, t = 0) = E_0 \mathbf{e}_x$. Die Welle habe die Wellenzahl $k$ und die Kreisfrequenz $\omega$ und breite sich in negative $y$-Richtung aus.

(l) Skizzieren Sie den Real- und den Imaginärteil des $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$- sowie des $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$-Feldes der Welle aus (k) in der $xz$-Ebene zum Zeitpunkt $t = \frac{\pi}{2\omega}$.

## Aufgabe 2 - Elektrostatik und Multipolentwicklung (8 Punkte)

(a) Die Gesamtladung $Q$ einer nichtleitenden Kugel mit Radius $a$ sei gemäß der kugelsymmetrischen Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}) = \frac{3-n}{4\pi a^3} Q \left(\frac{a}{r}\right)^n$ mit $-2 \leq n \leq 2$ verteilt. Zeigen Sie zuerst, dass die Gesamtladung der Kugel sich daraus zu $Q$ ergibt und berechnen Sie dann das zugehörige elektrostatische Feld für jedes $r > 0$.

(b) Leiten Sie die zu den elektrischen Feldern aus (a) für $n = \pm 2$ gehörigen Potentiale so her, dass diese stetig sind und im Unendlichen verschwinden.

## Aufgabe 3 - Magnetostatik (7 Punkte)

Ein regelmäßiger $n$-eckiger Leiter mit Mittelpunkt im Ursprung $P$ wird von einem Strom entgegen des Uhrzeigersinns durchflossen. Der Mittelpunkt einer Kante hat den Abstand $R$ vom Ursprung $P$. Die Gerade vom Ursprung zum Mittelpunkt der Kante schließt mit der Gerade vom Mittelpunkt zu einem Endpunkt der Kante den Winkel $\frac{\pi}{n}$ ein.

(a) Berechnen Sie die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ im Ursprung $P$ im Falle eines quadratischer Leiters, der von einem Strom $I$ durchflossen ist. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem für das Zentrum einer Kreisschleife mit Radius $R$ [siehe 3(b)] und begründen Sie ganz kurz den Unterschied.

(b) Wie lautet die magnetische Induktion im entsprechenden Punkt eines symmetrischen $n$-Ecks mit $n$ gleich langen Seiten? Zeigen Sie außerdem, dass sich im Grenzfall $n \to \infty$ das Feld im Zentrum einer Kreisschleife $\left(|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{2R}\right)$ ergibt.
*Hinweis: Eine einzelne Kante der Länge $L$ eines $n$-Ecks erfüllt die Gleichung $L = 2R\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$.*
*Hinweis: Nutzen Sie die Näherung $\tan(x) \approx x$ für $x \ll 1$ und $\int^x \frac{dx'}{\sqrt{1+x'^2}^3} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$*

## Aufgabe 4 - Quasistatik (6 Punkte)

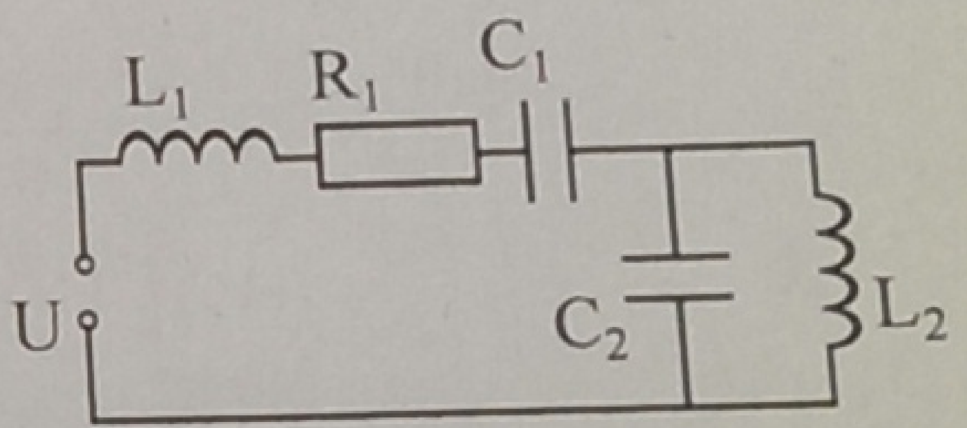
(a) Zeigen Sie im Rahmen der Maxwellgleichungen für langsam veränderliche Felder, dass die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ in einem Medium charakterisiert durch eine Ohmsche Leitfähigkeit $\sigma$ und eine Permeabilität von $\mu = \mu_0$ bei verschwindender dielektrischer Verschiebung, folgende Gleichung erfüllt: $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{C}\nabla^2\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Wie lautet $\mathcal{C}$? Das Medium bezeichnet man übrigens als ein stationäres Plasma.

(b) Soll zudem noch eine nichtrelativistische Bewegung berücksichtigt werden, kann dies über eine Transformation der Felder bewerkstelligt werden: $\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Geben Sie den daraus folgenden Ausdruck für das Ohmsche Gesetz an.

(c) Zeigen Sie schließlich, dass im Falle einer nichtrelativistischen Bewegung das Ergebnis aus (a) folgende Gestalt annimmt: $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{C}\nabla^2\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t))$.

## Aufgabe 5 - Schwingkreis (5 Punkte)

Es soll die rechts abgebildete Schaltung betrachtet werden.




(a) Bestimmen Sie den gesamten Widerstand der dargestellten Schaltung für den Fall, dass eine Wechselspannung der Frequenz $\omega$ angelegt ist.

(b) Die Frequenz der Wechselspannung lasse sich variieren, während die Amplitude fixiert sei. Bestimmen Sie nun die maximale und minimale Stromstärke. Bei welcher Frequenz kann dieser minimale Stromfluss gemessen werden?

## Aufgabe 6 - Eichung: Dualität und magnetische Monopole (8 Punkte)

Auf dem Übungsblatt 12 haben Sie die Dualitätstransformation der Maxwellschen Gleichungen kennen gelernt welche die *üblichen* **E**-**B**-Felder wie folgt transformiert:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \cos(\zeta)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \sin(\zeta)\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$
$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \sin(\zeta)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \cos(\zeta)\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

wobei $\zeta \in [0, 2\pi]$ ist. Die Felder $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ und $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$ genügen den dualen Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\rho}_e(\mathbf{r}, t) \qquad \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = -\tilde{\mathbf{j}}_m(\mathbf{r}, t) - \partial_t\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$$
$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\rho}_m(\mathbf{r}, t) \qquad \nabla \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{j}}_e(\mathbf{r}, t) + \partial_t\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$$

mit den elektrischen und magnetischen Ladungsdichten $\tilde{\rho}_e(\mathbf{r}, t)$ und $\tilde{\rho}_m(\mathbf{r}, t)$ bzw. Stromdichten $\tilde{\mathbf{j}}_e(\mathbf{r}, t)$ u $\tilde{\mathbf{j}}_m(\mathbf{r}, t)$. Für ein beliebiges $\zeta \in [0, 2\pi]$ können die dualen Felder wie folgt durch die elektrischen und magnetisc Potentiale ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla\tilde{\phi}_e(\mathbf{r}, t) - \partial_t\tilde{\mathbf{A}}_e(\mathbf{r}, t) - \nabla \times \tilde{\mathbf{A}}_m(\mathbf{r}, t) \\ \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla\tilde{\phi}_m(\mathbf{r}, t) - \partial_t\tilde{\mathbf{A}}_m(\mathbf{r}, t) + \nabla \times \tilde{\mathbf{A}}_e(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

*Hinweis: In dieser Aufgabe wurden die natürlichen Konstanten $\mu_0 = \epsilon_0 = c_0 = 1$ auf 1 normiert.*
*Hinweis: Unbegründete Antworten werden mit Null Punkte bewertet!*

(a) Leiten Sie ausgehend von diesen Gleichungen die erlaubten Eichtransformationen her.

(b) Leiten Sie die Lorenz-Bedingungen für die Potentiale $\tilde{\mathbf{A}}_e(\mathbf{r}, t)$, $\tilde{\mathbf{A}}_m(\mathbf{r}, t)$,$\tilde{\phi}_e(\mathbf{r}, t)$, $\tilde{\phi}_m(\mathbf{r}, t)$ her.

(c) Leiten Sie aus den Ergebnissen von 6(a) und 6(b) die inhomogenen Wellengleichungen für alle vier tiale her, sowie die homogenen Wellengleichungen für die skalaren Eichfunktionen $\tilde{f}_e(\mathbf{r}, t)$ und $\tilde{f}_m$ Interpretieren Sie physikalisch die Homogenität bzw. die Inhomogenität dieser Wellengleichungen.

**Aufgabe 7 - Maxwell-Gleichungen: Symmetrien der Elektrodynamik (7 Punkte)**

(a) Geben Sie die Maxwellgleichungen in deren differentieller Form im Vakuum an.

(b) Zeigen Sie welche Konsequenzen ein Vorzeichenwechsel der Ladungen auf die elektrischen und magnetischen Felder hat (**nur Gleichungen und Stichpunkte**).

(c) Zeigen Sie welche Änderungen eine räumliche Invertierung, d.h. ein Vorzeichenwechsel der räumlichen Koordinaten, bei den Feldern, der Ladungs- und der Stromdichte hervorruft. (**nur Gleichungen und Stichpunkte**).

(d) Zeigen Sie welche Änderungen eine zeitliche Invertierung, d.h. ein Vorzeichenwechsel der Zeitvariablen, bei den Feldern, der Ladungs- und der Stromdichte hervorruft (**nur Gleichungen und Stichpunkte**).

## Hilfreiche Formeln

### Kugelkoordinaten

$$\mathbf{r} = (r\sin\vartheta\cos\varphi)\,\mathbf{e}_r + (r\sin\vartheta\sin\varphi)\,\mathbf{e}_\vartheta + (r\cos\vartheta)\,\mathbf{e}_\varphi$$

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right)\mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_\varphi$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2V_r\right)\right] + \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta V_\vartheta\right)\right] + \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right]$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{V} = {} & \frac{1}{r\sin\vartheta}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta V_\varphi\right)\right] - \left[\frac{\partial V_\vartheta}{\partial\varphi}\right]\right\}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\left[\frac{\partial V_r}{\partial\varphi}\right] - \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rV_\varphi\right)\right]\right\}\mathbf{e}_\vartheta \\ & + \frac{1}{r}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rV_\vartheta\right)\right] - \left[\frac{\partial V_r}{\partial\vartheta}\right]\right\}\mathbf{e}_\varphi\end{aligned}$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\phi\right)\right] + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sin\vartheta\left(\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right)\right]\right\} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\right]$$

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{V} = {} & \left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(rV_r\right)\right] + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial\vartheta^2}\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial\varphi^2}\right] + \frac{\cot\vartheta}{r^2}\left[\frac{\partial V_r}{\partial\vartheta}\right] - \frac{2}{r^2}\left[\frac{\partial V_\vartheta}{\partial\vartheta}\right] - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\left[\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right]\right. \\ & \left. -2\left(\frac{V_r}{r^2}\right) - \cot\vartheta\left(\frac{V_\vartheta}{r^2}\right)\right\}\mathbf{e}_r + \left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(rV_\vartheta\right)\right] + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2 V_\vartheta}{\partial\vartheta^2}\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left[\frac{\partial^2 V_\vartheta}{\partial\varphi^2}\right] + \frac{\cot\vartheta}{r^2}\left[\frac{\partial V_\vartheta}{\partial\vartheta}\right]\right. \\ & \left. -\frac{2}{r^2}\frac{\cot\vartheta}{\sin\vartheta}\left[\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right] + \frac{2}{r^2}\left[\frac{\partial V_r}{\partial\vartheta}\right] - \frac{V_\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta}\right\}\mathbf{e}_\vartheta + \left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(rV_\varphi\right)\right] + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial\vartheta^2}\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left[\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial\varphi^2}\right]\right. \\ & \left. +\frac{\cot\vartheta}{r^2}\left[\frac{\partial V_\varphi}{\partial\vartheta}\right] + \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\left[\frac{\partial V_r}{\partial\varphi}\right] + \frac{2}{r^2}\frac{\cot\vartheta}{\sin\vartheta}\left[\frac{\partial V_\vartheta}{\partial\varphi}\right] - \frac{V_\varphi}{r^2\sin^2\vartheta}\right\}\mathbf{e}_\varphi\end{aligned}$$

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + rd\vartheta\mathbf{e}_\vartheta + r\sin\vartheta d\varphi\mathbf{e}_\varphi, \quad d\mathbf{f} = \mathbf{e}_r r^2\sin\vartheta d\vartheta d\varphi\,(\text{Kugeloberfläche}), \quad dV = r^2\sin\vartheta drd\vartheta d\varphi$$

### Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{r} = (\rho\cos\varphi)\,\mathbf{e}_\rho + (\rho\sin\varphi)\,\mathbf{e}_\varphi + (z)\,\mathbf{e}_z$$

$$\nabla\phi = \left[\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right]\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right]\mathbf{e}_\varphi + \left[\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]\mathbf{e}_z$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho V_\rho\right)\right] + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right] + \left[\frac{\partial V_z}{\partial z}\right]$$

$$\nabla\times\mathbf{V} = \left\{\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial V_z}{\partial\varphi}\right] - \left[\frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right]\right\}\mathbf{e}_\rho + \left\{\left[\frac{\partial V_\rho}{\partial z}\right] - \left[\frac{\partial V_z}{\partial\rho}\right]\right\}\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho V_\varphi\right)\right] - \left[\frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi}\right]\right\}\mathbf{e}_z$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\left[\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right]\right)\right\} + \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\right] + \left[\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right]$$

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{V} = {} & \left\{\left[\frac{\partial^2 V_\rho}{\partial\rho^2}\right] + \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial^2 V_\rho}{\partial\varphi^2}\right] + \left[\frac{\partial^2 V_\rho}{\partial z^2}\right] + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial V_\rho}{\partial\rho}\right] - \frac{2}{\rho^2}\left[\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right] - \frac{V_\rho}{\rho^2}\right\}\mathbf{e}_\rho + \left\{\left[\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial\rho^2}\right] + \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial\varphi^2}\right]\right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2}\right] + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial V_\varphi}{\partial\rho}\right] + \frac{2}{\rho^2}\left[\frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi}\right] - \frac{V_\varphi}{\rho^2}\right\}\mathbf{e}_\varphi + \left\{\left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial\rho^2}\right] + \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial\varphi^2}\right] + \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right] + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial V_z}{\partial\rho}\right]\right\}\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

$$d\mathbf{r} = d\rho\mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi\mathbf{e}_\varphi + dz\mathbf{e}_z, \quad d\mathbf{f} = \mathbf{e}_\rho\rho d\varphi dz\,(\text{Zylindermantel}), \quad dV = \rho d\rho d\varphi dz$$