4

Nachklausur zur Vorlesung Klassische Theoretische Physik III WS15/16 Lösungen

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Karim Mnasri (karim.mnasri@kit.edu)

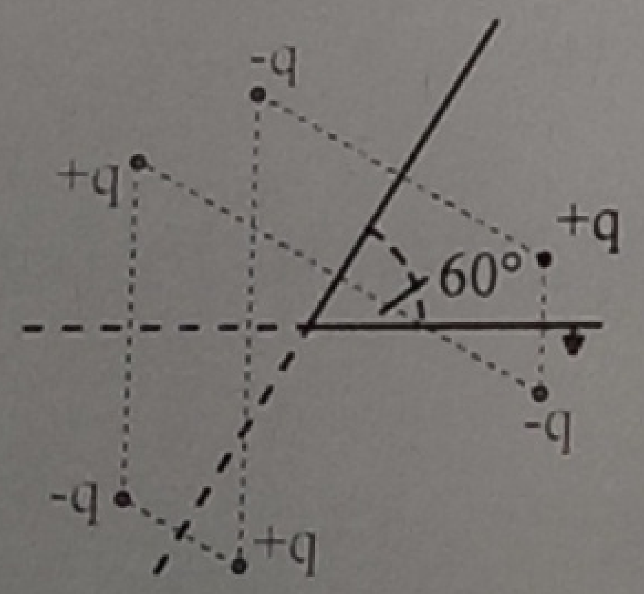
Prof. Dr. Carsten Rockstuhl (carsten.rockstuhl@kit.edu)

Aufgabe 1 - Elektromagnetische Fingerübungen (12 Punkte)

(a) Kraft auf Q im Zentrum des Dodekagons ist null. **(0.5 Punkte)**
Bei einer fehlenden Ladung: $\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\mathbf{e}_{q12}$. Wobei r der Radius des Umkreises des Dodekagons ist und $\mathbf{e}_{q12}$ in die Richtung der 'fehlenden' Ladung zeigt. **(0.5 Punkte)**

(b) Kraft auf Q im Zentrum des 13-eckigen Polygons ist null. **(0.5 Punkte)**
Bei einer fehlenden Ladung: $\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\mathbf{e}_{q13}$. Wobei r der Radius des Umkreises des 13-Ecks ist und $\mathbf{e}_{q13}$ in die Richtung der 'fehlenden' Ladung zeigt. **(0.5 Punkte)**

(c) Bei (a): **ENTWEDER** Kraft gegenüberliegender Ladungen q hebt sich auf und mit fehlender Ladung bleibt ein q unaufgehoben, **ODER** Superposition: gleiche Ladungen, gleicher Abstand, regelmäßige Anordnung in Ebene auf 360° verteilt und mit fehlender Ladung ist wie $-q$ am Ort der fehlenden Ladung **(0.5 Punkte)**
Bei (b) Superposition: gleiche Ladungen, gleicher Abstand, regelmäßige Anordnung in 360° und mit fehlender Ladung ist wie $-q$ am Ort der fehlenden Ladung **(0.5 Punkte)**

(d) 

Skizze:
Die beiden Spiegelladungen ($-q$), die am nächsten zur ursprünglichen Punktladung liegen, stimmen. **(0.5 Punkte)**
Die anderen drei Spiegelladungen stimmen. **(0.5 Punkte)**
Allgemein: Die Skizze muss die exakten Abstände der Ladung und Spiegelladungen zu den Leiterplatten nicht hergeben, wenn diese Info anderweitig übermittelt wird (Abstandsvariablen od. ein Satz der Sachverhalt klärt).

(e) elektrischer Strom fließt von B nach A **(0.5 Punkte**
zunächst Schalter S zu, elektrischer Strom fließt von + nach − (im Uhrzeigersinn), durch Wicklungsrichtung und mit 'rechter-Hand-Regel' zeigt Magnetfeld von Elektromagnet 1 in Richtung Elektromagnet 2, in Elektromagnet 2 wird wegen Lenzscher Regel Stromfluss induziert, der Gegenfeld verursacht, aufgrund von Wicklungsrichtung wieder elektrischer Stromfluss im Uhrzeigersinn d.h. B -> A **(0.5 Punkte**

(f) elektrischer Strom fließt von B nach A **(0.5 Punkt**
verringerter Abstand erhöht Magnetfeld in Elektromagnet 2, Lenzsche Regel bedeutet induziert Strom von Gegenfeld . . . siehe (e) **(0.5 Punkt**

(g) ~~Dispersion~~: $w(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{2}\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, 0.5Punkte je Summand **(1 Punk**

(h) Coulomb-Eichung: $\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = 0$ **(1 Punk**

(i) Trafo: $\phi'(\mathbf{r},t) = \phi(\mathbf{r},t) - \partial_t f(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \nabla f(\mathbf{r},t)$ **(0.5+0.5 Punkt**

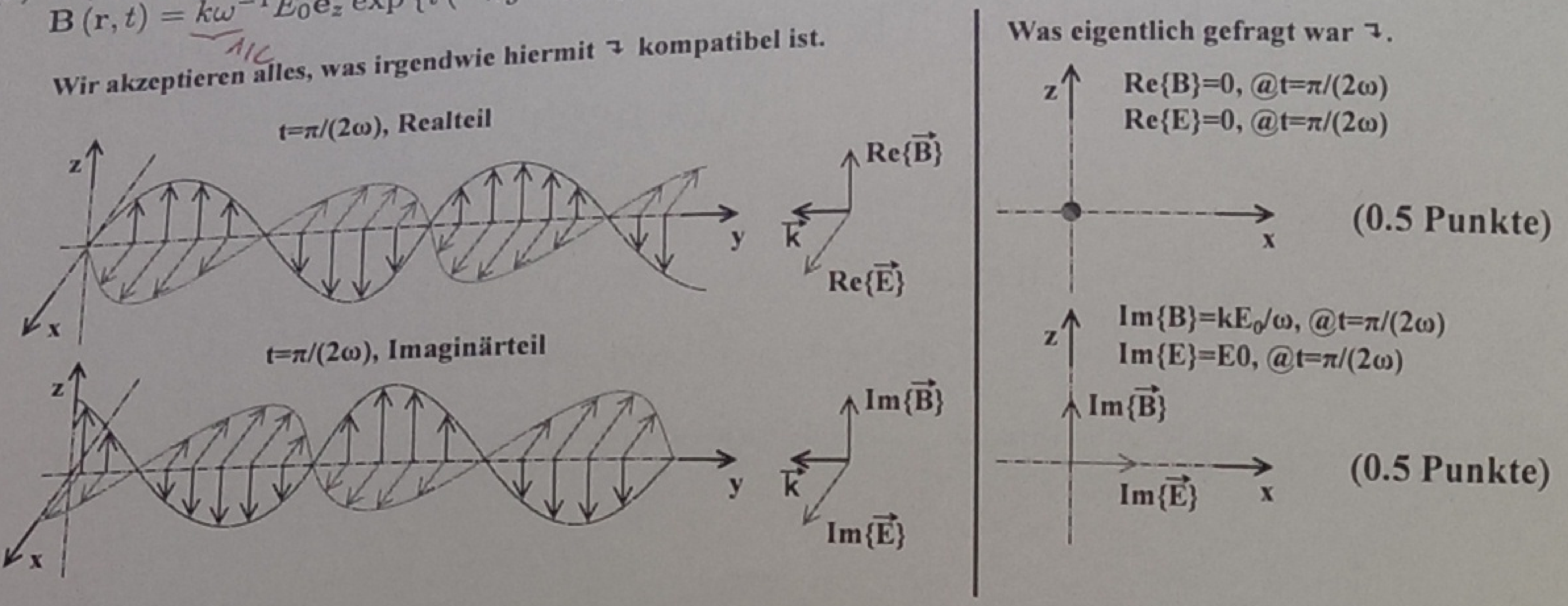
(0.5 Punkte)
(0.5 Punkte)

(j) Zeit: $\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) - c^{-2}\partial_t^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0$
und Frequenz: $\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) + c^{-2}\omega^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) = 0$

(0.5 Punkte)
(0.5 Punkte)

(k) $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E_0 \mathbf{e}_x \exp\{i(-ky - \omega t)\}$
$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = k\omega^{-1} E_0 \mathbf{e}_z \exp\{i(-ky - \omega t)\}$

=ck



(l)

Aufgabe 2 - Elektrostatik und Multipolentwicklung (8 Punkte)

(a) Wir möchten zunächst zeigen, dass die Integration über die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ auch tatsächlich die Ladung Q liefert.

$$\begin{aligned} Q &:= \int_V \rho(\mathbf{r}) dV = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\frac{(3-n)Q}{4\pi a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^n\right] r^2 \sin(\theta) d\phi d\theta dr \\ &= \frac{(3-n)Q}{4\pi} a^{n-3} \int_0^a r^{2-n} dr \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{(3-n)Q}{4\pi} a^{n-3} \left[4\pi \frac{1}{3-n} a^{3-n}\right] = Q \qquad \text{(1 Punkt)} \qquad \square \end{aligned}$$

Mit dem Durchflutungsgesetz $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$ können wir das elektrische Feld bestimmen. In integraler Form lautet diese

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} dV \qquad \text{(0.5 Punkte)}$$

Da die Ladungsverteilung radialsymmetrisch ist, ist es das Feld auch und somit das Skalarprodukt aus $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E da$, mit $E|_{\partial V} = |\mathbf{E}||_{\partial V} = const.$ und

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\int_V \rho(\mathbf{r})}{\int_{\partial V} da} \qquad \text{(0.5 Punkte)}$$

- Innenfeld:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(\mathbf{r}') r'^2 \sin(\theta) d\phi d\theta dr'}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\theta) d\phi d\theta dr} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\frac{(3-n)Q}{4\pi a^3}\left(\frac{a}{r'}\right)^n\right] r'^2 \sin(\theta) d\phi d\theta dr'}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\theta) d\phi d\theta dr} \\ &= \frac{(3-n)Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} a^{n-3} \frac{\frac{1}{3-n} r^{3-n} 4\pi}{4\pi} = \frac{Q a^{n-3}}{4\pi\epsilon_0} r^{1-n} \qquad \text{(0.5 Punkte)} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E\mathbf{e}_r = \frac{Q a^{n-3}}{4\pi\epsilon_0} r^{1-n} \mathbf{e}_r \qquad \text{(0.5 Punkte)}$$

- Außenfeld: Hier ist die Ladungsverteilung irrelevant, daher spielt die gesamte Ladung Q eine Rolle und das Feld ist demnach

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{Q}{\epsilon_0 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\theta) d\phi d\theta dr} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \qquad r > a \qquad \textbf{(0.5 Punkte)}
\end{aligned}
$$

(b)
- 1. Fall: n=2

  Das Innenpotential ergibt sich zu

$$
\begin{aligned}
\phi_i &= -\int E_i dr && \textbf{(0.5 Punkte)} \\
&= -\int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 ar} dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln r + c_1 && \textbf{(0.5 Punkte)}
\end{aligned}
$$

  Im Außenraum

$$
\phi_a = -\int E_a dr = -\int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + c_2 \qquad \textbf{(0.5 Punkte)}
$$

  Da das Potential ϕ und damit auch ϕ_a im ∞ verschwindet, muss $c_2 = 0$ sein. **(0.5 Punkte)**
  Damit bleibt noch die Anschlussbedingung bei $r = a$. Es soll also gelten

$$
\begin{aligned}
\phi_i(a) &\overset{!}{=} \phi_a(a) \\
\Leftrightarrow -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln r + c_1 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\
\Leftrightarrow c_1 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}(1 + \ln a) && \textbf{(0.5 Punkte)}
\end{aligned}
$$

- 2. Fall: n=-2

  Innenraum

$$
\phi_i = -\int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^5} r^3 dr = -\frac{Q}{16\pi\epsilon_0 a^5} r^4 + c_1 \qquad \textbf{(0.5 Punkte)}
$$

  Außenraum

$$
\phi_a = -\int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + c_2 \qquad \textbf{(0.5 Punkte)}
$$

  Wieder ist c_2 wie oben gleich 0. **(0.5 Punkte)**
  Damit folgt mit der Anschlussbedingung

$$
\begin{aligned}
\phi_i(a) &= \phi_a(a) \\
\Leftrightarrow -\frac{Q}{16\pi\epsilon_0 a^5} a^4 + c_1 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \\
\Leftrightarrow c_1 &= \frac{5Q}{16\pi\epsilon_0 a} && \textbf{(0.5 Punkte)}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 - Magnetostatik (7 Punkte)

(a) Diese Aufgabe lässt sich Aufgrund der Geometrie einfach durch das Biot-Svart-Gesetz berechnen

$$
\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \qquad \textbf{(0.5 Punkte)}
$$

wobei $\mathbf{r}$ immer den Ursprung beschreibt und $\mathbf{r}'$ die Leiterschleife. Für alle 4 Wege des Leiters gilt also $\mathbf{r} = 0$. Aufgrund der Symmetrie ist es egal welche Kante wir betrachten und das die magnetische Induktion ist dann

$$
\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{B}_i = 4\mathbf{B}_1 \qquad \textbf{(0.5 Punkte)}
$$

(0.5 Punkte)
(0.5 Punkte)

O.B.d.A. betrachten wir eine Kante, in der $\mathbf{r}' = -R\mathbf{e}_y + t\mathbf{e}_x$ gilt.
Es folgt dann $d\mathbf{r}' = dt\mathbf{e}_x$
und

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_1 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{C_1}\frac{dt\mathbf{e}_x \times (R\mathbf{e}_y - t\mathbf{e}_x)}{|-R\mathbf{e}_y + t\mathbf{e}_x|^3} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}R\int_{-R}^{R} dt\frac{1}{\sqrt{R^2+t^2}^3}\mathbf{e}_z && \text{(0.5 Punkte)} \\
&= \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\mathbf{e}_z\left[\frac{t}{R^2\sqrt{R^2+t^2}}\right]_{-R}^{+R} && \text{(0.5 Punkte)} \\
&= \frac{2\mu_0 I}{4\pi\sqrt{2}R}\mathbf{e}_z && \text{(0.5 Punkte)}
\end{aligned}$$

Das gesamte Magnetfeld ist nun

$$\mathbf{B} = 4\mathbf{B}_1 = \frac{2\mu_0 I}{\pi\sqrt{2}R}\mathbf{e}_z \qquad \text{(0.5 Punkte)}$$

Im Vergleich zur Kreisschleife ergibt sich ein Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}\pi}$. Das hat hauptsächlich was mit der Symmetrie zu tun, also dass nicht alle Punkte des Leiters den gleichen Abstand zum Ursprung haben. **(0.5 Punkte)**

(b) Da die Seiten alle den gleichen Beitrag zum Gesamtfeld liefern (siehe (a)) ist es nur notwendig eine Seite zu berechnen und das Ergebnis mit n (Seitenzahl) zu multiplizieren.
Berechne daher nur die rechte Seite (Ursprung bei P, kartesisches Koordinatensystem). Die Grenzen sind $-L/2$ und $+L/2$. Durch Einsetzen der gegebenen Formel ändern sich die Grenzen zu $-R\tan(\pi/n)$ bzw $+R\tan(\pi/n)$. **(0.5 Punkte)**
Es gelten wieder

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= 0 \\
\mathbf{r}' &= R\mathbf{e}_x + t\mathbf{e}_y \\
d\mathbf{r}' &= dt\mathbf{y}_y
\end{aligned}$$

Die magnetische Induktion ist dann

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_1 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{C_1}\frac{dt\mathbf{e}_x \times (-R\mathbf{e}_y - t\mathbf{e}_x)}{|R\mathbf{e}_y + t\mathbf{e}_x|^3} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}R\int_{-R\tan(\pi/n)}^{R\tan(\pi/n)} dt\frac{1}{\sqrt{R^2+t^2}^3}\mathbf{e}_z \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\mathbf{e}_z\left[\frac{R\tan(\pi/n)}{R^2\sqrt{R^2+R^2\tan^2(\pi/n)}} + \frac{R\tan(\pi/n)}{R^2\sqrt{R^2+R^2\tan^2(\pi/n)}}\right] \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\mathbf{e}_z\left[\frac{2R\tan(\pi/n)}{R^2\sqrt{R^2+R^2\tan^2(\pi/n)}}\right] && \text{(0.5 Punkte)} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\mathbf{e}_z\left[\frac{2(\pi/n)}{r\sqrt{1+(\pi/n)^2}}\right] && \text{(0.5 Punkte)} \\
&= \frac{\mu_0 I}{2R}\mathbf{e}_z\left[\frac{1}{n\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}}\right]
\end{aligned}$$

Das Gesamtfeld ergibt sich damit zu:

$$\mathbf{B} = n\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2R\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}}\mathbf{e}_z \qquad \text{(0.5 Punkte)}$$

Im Grenzübergang $n \to \infty$ konvergiert $\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \to 0$. Damit ergibt sich die Formel für den Kreis. **(0.5 Punkte)**

Aufgabe 4 - Quasistatik (6 Punkte)

(a) Maxwellgleichungen für den beschriebenen Fall, in denen das $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$-Feld auftaucht lauten:

$$\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=0,\quad \nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mu_0\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r},t),\quad \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=-\partial_t\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$$

Ausgangspunkt:

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mu_0\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r},t) && |\text{zusammen mit Ohmschem Gesetz} \ldots && \textbf{(0.5 Punkte)}\\
\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r},t) &= \sigma\mathbf{E}(\mathbf{r},t) && |\text{folgt:} && \textbf{(0.5 Punkte)}\\
\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mu_0\sigma\mathbf{E}(\mathbf{r},t) && |\text{umformen}\ldots\\
\nabla\times[\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)] &= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t))-\nabla^2\mathbf{B}(\mathbf{r},t) && && \textbf{(0.5 Punkte)}\\
&= -\nabla^2\mathbf{B}(\mathbf{r},t) && && \textbf{(0.5 Punkte)}\\
\mu_0\sigma\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\mu_0\sigma\partial_t\mathbf{B}(\mathbf{r},t) && && \textbf{(0.5 Punkte)}
\end{aligned}$$

Somit ist $\partial_t\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{\mu_0\sigma}\nabla^2\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, d.h. $\mathcal{C}=\frac{1}{\mu_0\sigma}$ **(0.5 Punkte)**

(b) angepasstes Ohmsches Gesetz: $\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r},t)=\sigma(\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\mathbf{v}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t))$ **(1 Punkt)**

(c) wie in (a)

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mu_0\sigma(\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\mathbf{v}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)) && \textbf{(0.5 Punkte)}\\
\nabla\times[\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)] &= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t))-\nabla^2\mathbf{B}(\mathbf{r},t) && \textbf{(0.5 Punkte)}\\
&= -\nabla^2\mathbf{B}(\mathbf{r},t) && \textbf{(0.5 Punkte)}\\
\mu_0\sigma\nabla\times(\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\mathbf{v}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)) &= \mu_0\sigma[\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t))]\\
&= -\mu_0\sigma\partial_t\mathbf{B}(\mathbf{r},t)+\mu_0\sigma\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)) && \textbf{(0.5 Punkte)}
\end{aligned}$$

Somit schließlich: $\partial_t\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{\mu_0\sigma}\nabla^2\mathbf{B}(\mathbf{r},t)+\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t))$

Aufgabe 5 - Schwingkreis (5 Punkte)

(a) Insgesamt Reihenschaltung von L_1, R_1, C_1 und der Masche mit L_2 und C_2. Der Beitrag der Reihenschaltung zum Gesamtwiderstand ist

$$Z_{\mathrm{R}}=i\omega L_1+R_1+\frac{1}{i\omega C_1}$$ **(0.5 Punkte)**

und die Parallelschaltung trägt

$$\frac{1}{Z_{\mathrm{P}}}=\frac{1}{i\omega L_2}+i\omega C_2=\frac{1}{i\omega L_2}-\frac{\omega^2C_2L_2}{i\omega L_2}=\frac{1-\omega^2C_2L_2}{i\omega L_2}$$ **(0.5 Punkte)**

bei. Zusammen also

$$Z_{\text{ges}}=i\omega L_1+R_1+\frac{1}{i\omega C_1}+\frac{i\omega L_2}{1-\omega^2C_2L_2}=R_1+i\left[\omega L_1-\frac{1}{\omega C_1}+\frac{\omega L_2}{1-\omega^2C_2L_2}\right]$$ **(0.5 Punkte)**

(b) Stromstärke gemäß

$$I=\frac{U}{Z_{\text{ges}}}=\frac{U}{R_1+i\left[\omega L_1-\frac{1}{\omega C_1}+\frac{\omega L_2}{1-\omega^2C_2L_2}\right]}$$ **(0.5 Punkte)**

mit der Amplitude

$$|I|=\frac{|U|}{\sqrt{R_1^2+\left[\omega L_1-\frac{1}{\omega C_1}+\frac{\omega L_2}{1-\omega^2C_2L_2}\right]^2}}$$ **(0.5 Punkte)**

Erkennbar, dass $|I|_{\text{min}}=0$ und $|I|_{\text{max}}=\frac{|U|}{R_1}$. **(0.5+0.5 Punkte)**
Für $|I|_{\text{min}}=0$ muss

$$\infty=\left[\omega L_1-\frac{1}{\omega C_1}+\frac{\omega L_2}{1-\omega^2C_2L_2}\right]^2$$ **(0.5 Punkte)**

Lösungen: $\omega_1=\infty$ (1. Term), $\omega_2=0$ (2. Term) und $\omega_3=\frac{1}{\sqrt{C_2L_2}}$ (3. Term) **(0.5 Punkte)**
Gemessen kann der minimale Stromfluss bei ω_3. **(0.5 Punkte)**

Aufgabe 6 - Eichung: Dualität und magnetische Monopole Teil III (8 Punkte)

(a) Eine Transformation ist nur dann eine Eichung, wenn die beobachtbaren Größen $\tilde{\mathbf{E}}' = \tilde{\mathbf{E}}$ und gleichzeitig $\tilde{\mathbf{B}}' = \tilde{\mathbf{B}}$ darunter invariant bleiben. Dies vorausgesetzt bedeutet

$$\tilde{\mathbf{E}}' = \tilde{\mathbf{E}} = -\nabla\tilde{\phi}_e' - \partial_t\tilde{\mathbf{A}}_e' - \nabla\times\tilde{\mathbf{A}}_m' \quad (1)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}' = \tilde{\mathbf{B}} = -\nabla\tilde{\phi}_m' - \partial_t\tilde{\mathbf{A}}_m' + \nabla\times\tilde{\mathbf{A}}_e' \quad (2)$$

Aus der ersten Gleichung muss gelten $\nabla\times\tilde{\mathbf{A}}_m' = \nabla\times\tilde{\mathbf{A}}_m$, also $\tilde{\mathbf{A}}_m' = \tilde{\mathbf{A}}_m - \nabla f_m$. **(0.5 Punkte)**
Ebenso erhält man aus der Bedingung $\tilde{\mathbf{B}}' = \tilde{\mathbf{B}}$ die Transformation des elektrischen Vektorpotentials $\tilde{\mathbf{A}}_e' = \tilde{\mathbf{A}}_e - \nabla f_e$. **(0.5 Punkte)**
Mit Hilfe diesen zwei Ergebnissen können wir auch die Transformation der skalaren Potentiale $\phi_{e,m}$ ermitteln. Es folgt schließlich

$$\begin{aligned} -\nabla\tilde{\phi}_e' - \partial_t\tilde{\mathbf{A}}_e' &= -\nabla\tilde{\phi}_e - \partial_t\tilde{\mathbf{A}}_e \\ \overset{\tilde{\mathbf{A}}_e'=\tilde{\mathbf{A}}_e-\nabla f_e}{\Rightarrow} \nabla\phi_e' &= \nabla\phi_e + \partial_t\nabla f_e \\ \Rightarrow \phi_e' &= \phi_e + \partial_t f_e \end{aligned} \quad \textbf{(0.5 Punkte)}$$

Analoge Argumentation gilt auch für ϕ_m. Also

$$\begin{aligned} -\nabla\tilde{\phi}_e' - \partial_t\tilde{\mathbf{A}}_e' &= -\nabla\tilde{\phi}_e - \partial_t\tilde{\mathbf{A}}_e \\ \overset{\tilde{\mathbf{A}}_e'=\tilde{\mathbf{A}}_e-\nabla f_e}{\Rightarrow} \nabla\phi_e' &= \nabla\phi_e + \partial_t\nabla f_e \\ \Rightarrow \phi_e' &= \phi_e + \partial_t f_e \end{aligned} \quad \textbf{(0.5 Punkte)}$$

(b) Die Lorenz-Bedingungen der Potentiale lassen sich unmittelbar durch Einsetzen der Gleichungen (1) und (2) in den Maxwell-Gleichungen bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} \nabla\times\tilde{\mathbf{E}} &= \cancel{-\partial_t\nabla\times\tilde{\mathbf{A}}_e} - \nabla\times\nabla\times\tilde{\mathbf{A}}_m \\ &= -\tilde{\mathbf{j}}_m + \partial_t\nabla\tilde{\phi}_m + \partial_t^2\tilde{\mathbf{A}}_m \cancel{-\partial_t\nabla\times\tilde{\mathbf{A}}_e} \\ -\nabla(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{A}}_m) + \Delta\tilde{\mathbf{A}}_m - \partial_t^2\tilde{\mathbf{A}}_m &= -\tilde{\mathbf{j}}_m + \nabla\partial_t\tilde{\phi}_m \\ \Delta\tilde{\mathbf{A}}_m - \partial_t^2\tilde{\mathbf{A}}_m &= -\tilde{\mathbf{j}}_m + \nabla(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{A}}_m + \partial_t\tilde{\phi}_m) \end{aligned}$$

Die Lorenz-Bedingung, welche die magnetischen Potentiale entkoppelt, lautet nun $\nabla\cdot\tilde{\mathbf{A}}_m + \partial_t\tilde{\phi}_m = 0$
. **(1 Punkt)**

Das gleiche Verfahren kann auch für die elektrischen Potentiale angewandt werden:

$$\begin{aligned} \nabla\times\tilde{\mathbf{B}} &= \cancel{-\partial_t\nabla\times\tilde{\mathbf{A}}_m} + \nabla\times\nabla\times\tilde{\mathbf{A}}_e \\ &= \tilde{\mathbf{j}}_r - \partial_t\nabla\tilde{\phi}_e - \partial_t^2\tilde{\mathbf{A}}_e \cancel{-\partial_t\nabla\times\tilde{\mathbf{A}}_m} \\ \nabla(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{A}}_e) - \Delta\tilde{\mathbf{A}}_e &= \tilde{\mathbf{j}}_e + \nabla\partial_t\tilde{\phi}_e - \partial_t^2\tilde{\mathbf{A}}_e \\ \Delta\tilde{\mathbf{A}}_e - \partial_t^2\tilde{\mathbf{A}}_e &= -\tilde{\mathbf{j}}_e + \nabla(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{A}}_e + \partial_t\tilde{\phi}_e) \end{aligned}$$

Um die Potentiale zu entkoppeln muss also $\nabla\cdot\tilde{\mathbf{A}}_e + \partial_t\tilde{\phi}_e = 0$ gelten. **(1 Punkt)**

(c) Die inhomogenen Wellengleichungen der Vektorpotentiale sind mit Hilfe unseren Überlegungen aus (b) quasi bekannt. Man wendet, jeweils in der letzten Zeile, die entsprechende Lorenz-Bedingung an und man erhält

$$\Delta\tilde{\mathbf{A}}_m - \partial_t^2\tilde{\mathbf{A}}_m = -\tilde{\mathbf{j}}_m \quad \textbf{(0.5 Punkte)}$$

und

$$\Delta\tilde{\mathbf{A}}_e - \partial_t^2\tilde{\mathbf{A}}_e = -\tilde{\mathbf{j}}_e \quad \textbf{(0.5 Punkte)}$$

Die Wellengleichungen der skalaren Potentiale folgen aus den Divergenz-Gleichungen der Felder, sowie aus der Anwendung der Lorenz-Bedingung:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\tilde{\mathbf{E}} &= -\Delta\tilde{\phi}_e - \partial_t \underbrace{\nabla\cdot\tilde{\mathbf{A}}_e}_{=-\partial_t\tilde{\phi}_e} = \tilde{\rho}_e \\ \Rightarrow \Delta\tilde{\phi}_e - \partial_t^2\tilde{\phi}_e &= -\tilde{\rho}_e \end{aligned} \quad \textbf{(0.5 Punkte)}$$

Analog:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\tilde{\mathbf{B}} &= -\Delta\tilde{\phi}_e - \partial_t \underbrace{\nabla\cdot\tilde{\mathbf{A}}_e}_{=-\partial_t\tilde{\phi}_e} = \tilde{\rho}_e \\ \Rightarrow \Delta\tilde{\phi}_e - \partial_t^2\tilde{\phi}_e &= -\tilde{\rho}_e \end{aligned} \quad \textbf{(0.5 Punkte)}$$

Aus den Lorenz-Bedingungen und den Ergebnissen aus (a) bekommen wir die homogenen Wellengleichungen für die skalaren Eichfunktionen. Da die Physik bei der Transformation in (a) unverändert bleibt, bleiben auch die Lorenz-Bedingungen invariant. D.h.

$$\nabla\cdot\tilde{\mathbf{A}}_e+\partial_t\tilde{\phi}_e=0 \quad\Leftrightarrow\quad \nabla\cdot\tilde{\mathbf{A}}'_e+\partial_t\tilde{\phi}'_e=0$$
$$\overset{\text{Eichung aus (a)}}{\Rightarrow}\quad \Delta\tilde{f}_e-\partial_t^2\tilde{f}_e = 0 \qquad \textbf{(0.5 Punkte)}$$

Analog:

$$\nabla\cdot\tilde{\mathbf{A}}_m+\partial_t\tilde{\phi}_m=0 \quad\Leftrightarrow\quad \nabla\cdot\tilde{\mathbf{A}}'_m+\partial_t\tilde{\phi}'_m=0$$
$$\overset{\text{Eichung aus (a)}}{\Rightarrow}\quad \Delta\tilde{f}_m-\partial_t^2\tilde{f}_m = 0 \qquad \textbf{(0.5 Punkte)}$$

Interpretation:

- Die Inhomogenität der Wellengleichungen deutet auf die Quellen, die die Existenz der Potentiale verursachen. Die Quellen der Potentiale $\tilde{\mathbf{A}}_e$ und $\tilde{\phi}_e$ sind der elektrische Strom $\tilde{\mathbf{j}}_e$ bzw. die elektrischen Monopole mit der Ladungsdichte $\tilde{\rho}_e$. Währenddessen werden die Potentiale $\tilde{\mathbf{A}}_m$ und $\tilde{\phi}_m$ durch den magnetischen Strom $\tilde{\mathbf{j}}_m$ bzw. durch den magnetischen Monopole mit der Ladungsdichte $\tilde{\rho}_e$ hervorgerufen. **(0.5 Punkte)**
- Die Homogenität der der skalaren Eichfunktionen $\tilde{f}_e$ und $\tilde{f}_e$ bedeutet, dass diese quellenfrei sind. Diese sind im Prinzip nur *künstlich* eingeführte Größen und spielen bei der Beobachtung von physikalischen Ereignissen keinerlei eine Rolle. Zumindest noch nicht in Theo C, glaube ich... **(0.5 Punkte)**

Aufgabe 7 - Maxwell-Gleichungen: Symmetrien der Elektrodynamik (7 Punkte)

(a) Maxwellgleichungen

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\frac{\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)}{\varepsilon_0}, \qquad \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=-\partial_t\mathbf{B}(\mathbf{r},t),$$
$$\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=0, \qquad \nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mu_0\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r},t)+c^{-2}\partial_t\mathbf{E}(\mathbf{r},t). \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

(b) Vorzeichenwechsel der Ladung: $q\to -q'$, daraus folgt $\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)\to -\rho'_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)$ **(0.5 Punkte)**
und $\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r},t)\to -\mathbf{j}'_{\text{makr}}(\mathbf{r},t)$ **(0.5 Punkte)**
aus $\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=-\frac{\rho'_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)}{\varepsilon_0}$ folgt $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\to -\mathbf{E}'(\mathbf{r},t)$ **(0.5 Punkte)**
aus $\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=-\mu_0\mathbf{j}'_{\text{makr}}(\mathbf{r},t)-c^{-2}\partial_t\mathbf{E}'(\mathbf{r},t)$ folgt $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\to -\mathbf{B}'(\mathbf{r},t)$ **(0.5 Punkte)**

(c) Vorzeichenwechsel des Ortes $\mathbf{r}\to -\mathbf{r}'$ und $\nabla\to -\nabla'$,
$\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)\to \rho'_{\text{ext}}(\mathbf{r}',t)$ **(0.5 Punkte)**
es folgt außerdem $\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r},t)\sim\partial_t\mathbf{r}\to -\mathbf{j}'_{\text{makr}}(\mathbf{r}',t)$ **(0.5 Punkte)**
aus $-\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=-\mu_0\mathbf{j}'_{\text{makr}}(\mathbf{r}',t)+c^{-2}\partial_t\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ folgt $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\to \mathbf{B}'(\mathbf{r}',t)$ **(0.5 Punkte)**
und $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\to -\mathbf{E}'(\mathbf{r}',t)$ **(0.5 Punkte)**

(d) Vorzeichenwechsel der Zeit $t\to -t'$ und $\partial_t\to -\partial_{t'}$,
$\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)\to \rho'_{\text{ext}}(\mathbf{r},t')$ **(0.5 Punkte)**
es folgt außerdem $\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r},t)\sim\partial_t\mathbf{r}\to -\mathbf{j}'_{\text{makr}}(\mathbf{r},t')$ **(0.5 Punkte)**
aus $\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=-\mu_0\mathbf{j}'_{\text{makr}}(\mathbf{r},t')-c^{-2}\partial_t\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ folgt $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\to \mathbf{E}'(\mathbf{r},t')$ **(0.5 Punkte)**
und $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\to -\mathbf{B}'(\mathbf{r},t')$ **(0.5 Punkte)**