Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 16/17

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. J. Enander, A. Pargner
`https://cr.ikp.kit.edu/pargner/teaching/theoc1617/`

Modulklausur
24.02.17

Name:	
Matr.Nr.:	
PO :	
Tut. Nr.:	

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Summe

Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Bitte wenden.

Hinweise

- Als Hilfsmittel ist ein von Ihnen beidseitig, handgeschriebenes DIN A4 Blatt erlaubt.
- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt zwei Stunden.
- Die Ergebnisse der Klausur werden vorraussichtlich am 03.03.17 per Aushang im Foyer des Physikhochhauses bekannt gegeben.
- Die Klausureinsicht findet vorraussichtlich am 06.03.17 statt. Genauer Ort und Uhrzeit werden rechtzeitig auf der Vorlesungshomepage bekannt gegeben.
- Beachten Sie, dass auf dem Aufgabenblatt CGS-Einheiten verwendet werden. Sie können die Aufgaben aber auch in einem Einheitensystem Ihrer Wahl lösen.

Sie können folgende Relationen ohne Beweis verwenden:

$$\int_0^T \cos(2\pi t/T)\sin(2\pi t/T)\,\mathrm{d}t = 0 \;,$$
$$\int_0^T \cos^2(2\pi t/T)\,\mathrm{d}t = T/2 \;.$$

Aufgabe 1 *Elektrostatik* **8 Punkte**

a) Berechnen Sie ausgehend vom gaußschen Gesetz das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ einer Punktladung Q_1, welche sich am Ort $\vec{R}_1$ befindet. Bestimmen Sie weiter die Kraft dieser Ladung auf eine zweite Ladung Q_2, die sich am Ort $\vec{R}_2$ befinde.

2 Punkte

Nehmen Sie an, dass ein sehr präzises Experiment eine kleine Korrektur zum bekannten Coulomb-Kraftgesetz gefunden habe. Die elektrische Kraft einer Punktladung Q_1 auf eine Ladung Q_2 laute nach der neuen Messung

$$\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{r^2}\left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-r/\lambda}\hat{r} \,. \tag{1}$$

Dabei ist $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}|$ und $\vec{r}$ ist der Abstandsvektor der beiden Ladungen Q_1 und Q_2; λ sei eine neue Naturkonstante mit der Einheit einer Länge. Das Superpositionsprinzip für die elektrischen Felder gelte weiterhin.

b) Geben Sie ausgehend von dem modifizierten Kraftgesetz in Gl. (1) das elektrische Feld einer beliebigen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ an.

2 Punkte

c) Argumentieren Sie, warum dieses neue elektrische Feld weiterhin durch ein Potential $\Phi(\vec{r})$ ausgedrückt werden kann.

1 Punkt

d) Zeigen Sie, dass das elektrostatische Potential einer Punktladung Q nun durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{r}\mathrm{e}^{-r/\lambda} \tag{2}$$

gegeben ist.

3 Punkte

Aufgabe 2 *Maxwell-Gleichungen* **12 Punkte**

a) Geben Sie die Maxwell-Gleichungen im Vakuum für das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{B}$ in Anwesenheit einer Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ und einer Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ an.

1 Punkt

b) Drücken Sie die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ durch das skalare Potential Φ und das Vektorpotential $\vec{A}$ aus. Zeigen Sie, dass mit diesem Ansatz die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen erfüllt sind.

2 Punkte

c) Geben Sie die Eichtransformation für die Potentiale Φ und $\vec{A}$ an und zeigen Sie, dass die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ invariant unter solch einer Transformation sind. Erläutern Sie davon ausgehend kurz den Begriff der Eichfreiheit.

4 Punkte

d) Nutzen Sie die Eichfreiheit, um die Gleichungen

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi = -\,4\pi\rho\ , \tag{3}$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\,\frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{4}$$

herzuleiten. Geben Sie die von Ihnen benutzte Eichung an. Hier ist Δ der Laplace-Operator, c die Lichtgeschwindigkeit, ρ die Ladungsdichte und $\vec{j}$ die Stromdichte.

5 Punkte

Aufgabe 3 *Elektromagnetische Wellen* **10 Punkte**

Das elektrische Feld einer elektromagnetischen Welle im Vakuum sei durch

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\,\hat{e}_y \tag{5}$$

gegeben.

a) Machen Sie den Ansatz $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ für das magnetische Feld der Welle. Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen einen Zusammenhang zwischen dem magnetischen und dem elektrischen Feld her und berechnen Sie damit $\vec{B}(\vec{r},t)$.

3 Punkte

b) Bestimmen Sie die Dispersionsrelation $\omega(k)$.

1 Punkt

c) Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S}$ und die Energiedichte w_{EM} dieser Welle. Welcher Zusammenhang gilt im Allgemeinen zwischen $\vec{S}$ und w_{EM}? Was bedeutet dieser Zusammenhang physikalisch? Zeigen Sie, dass dieser Zusammenhang für Ihr Ergebnis für $\vec{S}$ und w_{EM} erfüllt ist. In welche Richtung zeigt das zeitliche Mittel $\langle\vec{S}\rangle$ des Poynting-Vektors?

Hinweis: Die Fragen können Sie ohne explizite Rechnung beantworten. Den gesuchten Zusammenhang können Sie ohne Beweis angeben. Um die Richtung von $\langle\vec{S}\rangle$ zu bestimmen, reicht es aus wenn Sie Ihre Antwort begründen.

6 Punkte

Bitte wenden.

Aufgabe 4 *Kovariante Formulierung der Elektrodynamik* **10 Punkte**

Es ist $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ der elektromagnetische Feldstärketensor, $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ der duale Feldstärketensor und $A^\mu = \left(\Phi, \vec{A}\right)$ das elektromagnetische Viererpotential.

a) Drücken Sie $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ und $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass Sie die Form von $F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}$ und $\tilde{F}^{\mu\nu}$ ausgedrückt durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ bereits kennen.

4 Punkte

b) Zeigen Sie explizit, dass $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ invariant unter Lorentz-Transformationen ist.

3 Punkte

c) Zeigen Sie, dass eine Lagrange-Dichte der Form

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{6}$$

invariant unter CP-Transformationen ist. Dabei bezeichnet eine CP-Transformation das Hintereinanderausführen einer P-Transformation (Raumspiegelung) und einer C-Transformation (Ladungskonjugation).

Hinweis: Sie können die Eigenschaften von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ unter P- und C-Transformationen ohne Beweis verwenden. Aus der Bedingung, dass die Maxwell-Gleichungen invariant unter Raumspiegelungen P (d.h. $\vec{x} \to -\vec{x}$) und Ladungskonjugation C (d.h. $\rho \to -\rho$ und $\vec{j} \to -\vec{j}$) sein sollen, können Sie diese Eigenschaften aber auch leicht herleiten.

2 Punkte

d) Zeigen Sie nun, dass eine Lagrange-Dichte der Form

$$\mathcal{L} = -\frac{g}{4}aF_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \tag{7}$$

nicht invariant unter CP-Transformationen ist. Nehmen Sie dazu an, dass die Konstante g und das Feld a unverändert unter C- und P-Transformationen bleiben.

1 Punkt

Viel Erfolg!