Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 16/17

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. J. Enander, A. Pargner

https://cr.ikp.kit.edu/pargner/teaching/theoc1617/

Lösung zur Modulklausur 24.02.17

Hinweise zur Korrektur

- Beachtet bitte, dass in der Elektrodynamik unterschiedliche Einheitensysteme (vornehmlich CGS- und SI-Einheiten) verwendet werden. Die hier angegebenen Lösungen sind in CGS-Einheiten. Natürlich können alle Aufgaben auch in anderen Einheitensystemen korrekt gelöst werden.
- Beachtet bitte, dass es bei der Definition der Potentiale Φ und $\vec{A}$ unterschiedliche Konventionen gibt. Die hier verwendete Konvention wird in Aufgabe 2 b) ersichtlich und hält sich dabei an die Vorlesung. Natürlich können auch anderen Konventionen verwendet werden, um die Aufgaben korrekt zu lösen.
- Die *kursiv* angegeben Teilpunkte für Zwischenschenergebnisse sind als Vorschlag zu verstehen.

Aufgabe 1 *Elektrostatik* — 8 Punkte

a) **2 Punkte**

Das gaußsche Gesetz in differentieller Form lautet

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho \ . \tag{1}$$

Ausgehend davon finden wir zunächst

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\vec{E}\mathrm{d}\mathcal{V}}_{=\oint_f \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{f}} = 4\pi \int_{\mathcal{V}} \rho \mathrm{d}\mathcal{V} \ . \tag{3}$$

Es ist $\mathcal{V}$ zunächst ein beliebiges Volumen und f seine Oberfläche. Die Ladungsdichte einer Punktladung Q_1, die sich am Ort $\vec{r} = \vec{R}_1$ befinde, ist offensichtlich gegeben durch

$$\rho(\vec{r}) = Q_1\delta(\vec{r} - \vec{R}_1) \ . \tag{4}$$

0.5 Punkte

Dabei ist $\delta(\vec{r})$ die bekannte Dirac-Delta-Funktion in drei Dimensionen. Eingesetzt in das Gaußsche Gesetz in integraler Form liefert dies

$$\oint_f \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{f} = 4\pi \int Q_1\delta(\vec{r}\,' - \vec{R}_1)\mathrm{d}^3r' \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow 4\pi r^2 E_r = 4\pi Q_1 \ . \tag{6}$$

mit der Abkürzung für den Abstandsvektor $\vec{r} \equiv \vec{r} - \vec{R}_1$ und E_r zeigt entsprechend in die Richtung des Abstandsvektors. Als überintegriertes Volumen wurde eine Kugel mit der Ladung Q_1 im Zentrum gewählt. Dies führt zu

$$E_r = \frac{Q_1}{r^2} \ \Rightarrow \ \vec{E} = \frac{Q_1}{r^2}\hat{r} \ . \tag{7}$$

oder ausgeschrieben zu

$$\vec{E}_{Q_1}(\vec{r}) = \frac{Q_1}{|\vec{r}-\vec{R}_1|^2}\frac{\vec{r}-\vec{R}_1}{|\vec{r}-\vec{R}_1|} \,. \tag{8}$$

1 Punkt

Die Kraft dieser Ladung auf eine zweite Ladung Q_2 am Ort $\vec{r} = \vec{R}_2$ ist durch

$$\vec{F}_{Q_1 \to Q_2} = Q_2 \vec{E}_{Q_1}(\vec{r} = \vec{R}_2) \tag{9}$$

$$= \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{R}_2-\vec{R}_1|^2}\frac{\vec{R}_2-\vec{R}_1}{|\vec{R}_2-\vec{R}_1|} \tag{10}$$

$$= \frac{Q_1 Q_2}{r^2}\hat{r} \,, \tag{11}$$

wobei $\vec{r}$ der Abstandsvektor der beiden Ladungen ist.

0.5 Punkte

b) **2 Punkte**

Dem modifizierten Kraftgesetz entnehmen wir mit dem Ansatz

$$\vec{F}_{Q_1 \to Q_2} = Q_2 \vec{E}_{Q_1}(\vec{r} = \vec{R}_2) \,, \tag{12}$$

dass das elektrische Feld einer Punktladung nun durch

$$\vec{E}_{Q_1}(\vec{r}) = \frac{Q_1}{r^2}\left(1+\frac{r}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-r/\lambda}\hat{r} \tag{13}$$

gegeben sein muss.

0.5 Punkte

Nach dem Superpositionsprinzip können wir das elektrische Feld einer beliebigen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ als Superposition der Felder infinitesimal vieler Punktladungen betrachten und erhalten damit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}\,')\left(1+\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/\lambda}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \,. \tag{14}$$

1.5 Punkte

c) **1 Punkt**

Es gilt weiterhin $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$. Das neue Kraftgesetz und das damit gefundene elektrische Feld zeigt weiterhin in die gleiche Richtung wie das bekannte $\vec{E}$ Feld. Damit ist zum Beispiel das Feld einer Punktladung weiterhin rotationssymmetrisch. Für diesen Fall ist leicht ersichtlicht, dass $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$ gilt. Dank dem Superpositionsprinzip gilt dies für beliebige Ladungsverteilungen.

Also können wir nach dem Helmholtzschen Zerlegungssatz für bestimmte Vektorfelder weiter den herkömmliche Ansatz

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\Phi(\vec{r}) \tag{15}$$

machen.

d) **3 Punkte**

Das elektrische Potential bestimmen wir durch

$$\Phi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot \mathrm{d}\vec{r}\,' \,. \tag{16}$$

0.5 Punkte

Mit dem in b) gefundenen elektrischen Feld einer Punktladung führt dies zu

$$\Phi(\vec{r}) = -Q\int_\infty^r \frac{1}{r'^2}\left(1+\frac{r'}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-r'/\lambda}\mathrm{d}r' \tag{17}$$

$$= Q\left[\int_r^\infty \frac{\mathrm{e}^{-r'/\lambda}}{r'^2}\mathrm{d}r' + \int_r^\infty \frac{\mathrm{e}^{-r'/\lambda}}{r'\lambda}\mathrm{d}r'\right] \tag{18}$$

$$\stackrel{\text{PI}}{=} Q\left[-\frac{1}{r'}\mathrm{e}^{-r'/\lambda}\Big|_r^\infty - \int_r^\infty \frac{1}{r'\lambda}\mathrm{e}^{-r'/\lambda}\mathrm{d}r' + \int_r^\infty \frac{\mathrm{e}^{-r'/\lambda}}{r'\lambda}\mathrm{d}r'\right] \tag{19}$$

$$= \frac{Q}{r}\mathrm{e}^{-r/\lambda} \checkmark \tag{20}$$

2.5 Punkte

Aufgabe 2 *Maxwell-Gleichungen* **12 Punkte**

a) **1 Punkt**

Die Maxwell-Gleichungen in Vakuum mit $\rho(\vec{r})$ und $\vec{j}(\vec{r})$ als Quellen lauten:

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho\ , \tag{21}$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}\ , \tag{22}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0\ , \tag{23}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0\ . \tag{24}$$

Hier ist ρ die Ladungsdichte, $\vec{j}$ die Stromdichte und c die Lichtgeschwindigkeit in Vakuum.

b) **2 Punkte**

Wir drücken dei Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ durch die Potentiale Φ und $\vec{A}$ aus:

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\ , \tag{25}$$

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}\ . \tag{26}$$

0.5 Punkte

Setzen wir diesen Ansatz in die homogenen Maxwell-Gleichungen ein, finden wir

$$\mathrm{div}\vec{B} = \mathrm{div}\ \mathrm{rot}\vec{A} = 0 \checkmark \tag{27}$$

0.5 Punkte

und

$$\mathrm{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \mathrm{rot}\left(-\mathrm{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{A} \tag{28}$$

$$= -\underbrace{\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\Phi}_{=0} - \frac{1}{c}\mathrm{rot}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{A} = 0 \checkmark \tag{29}$$

1 Punkt

c) **4 Punkte**

Es sei Λ ein beliebiges Skalarfeld. Wir beobachten, dass die Eichtransformation

$$\Phi \to \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Lambda \equiv \Phi' \tag{30}$$

$$\vec{A} \to \vec{A} + \mathrm{grad}\Lambda \equiv \vec{A}' \tag{31}$$

0.5 Punkte

die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ unverändert lässt. Denn

$$\vec{E}' = -\,\mathrm{grad}\Phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}' \tag{32}$$

$$= -\,\mathrm{grad}\left(\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Lambda\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \mathrm{grad}\Lambda\right) \tag{33}$$

$$= -\,\mathrm{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = \vec{E} \tag{34}$$

1.5 Punkt

und

$$\vec{B}' = \mathrm{rot}\vec{A}' = \mathrm{rot}\vec{A} + \mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\Lambda = \mathrm{rot}\vec{A} = \vec{B}\ . \tag{35}$$

1 Punkt

D.h. das Skalarfeled Λ ist frei wählber, wenn die Potential $\vec{A}$ und Φ entsprechend Gl (30) und (31) transformiert werden. Die physikalischen Felder bleiben unverändert. Dies bezeichnen wir als Eichfreiheit.

1 Punkt

d) **5 Punkte**

Wir setzen zunächst die Potentialdarstellung von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in die inhomogenen Maxwell-Gleichungen ein:

$$\mathrm{rot}\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{36}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\vec{A}}_{=\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mathrm{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{37}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} - \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{38}$$

2 Punkte

und

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho \tag{39}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{div}\left(-\mathrm{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) = 4\pi\rho \tag{40}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\Delta\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{A} = 4\pi\rho\ . \tag{41}$$

1 Punkt

Um Gl (38) zu vereinfachen nutzen wir die Eichfreiheit für $\vec{A}$ und Φ, um

$$\mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi = 0 \tag{42}$$

zu fordern. Diese Eichung nennt man Lorenz-Eichung.

1 Punkt

In dieser speziellen Eichung finden wir

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\,, \tag{43}$$

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi = -4\pi\rho\,. \tag{44}$$

1 Punkt

Was zu zeigen war.

Nicht gefordert: Bemerke, dass die Bedingung für die Lorenz-Eichung immer erfüllt werden kann. Nehmen wir dazu an, die Potentiale $\vec{A}$ und Φ erfüllen die Lorenz-Bedingung nicht. Aus der Forderunge, dass die transformierten Potentiale $\vec{A}'$, Φ' die Lorenz-Bedinungen genügen, d.h.

$$\mathrm{div}\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi' = 0\,, \tag{45}$$

erhalten wir

$$\Delta\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda = -\left(\mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right)\,. \tag{46}$$

Dies ist eine inhomogene Wellengleichung für Λ. Für diese existiert immer eine Lösung Λ. D.h. dank der Eichfreiheit finden wir immer Potentiale Φ und $\vec{A}$ die der Lorenz-Eichung genügen.

Aufgabe 3 *Elektromagnetische Wellen* — 10 Punkte

a) **3 Punkte**

Aus den Maxwell-Gleichungen (quellenfrei) wissen wir:

$$\mathrm{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0\,. \tag{47}$$

Mit dem Ansatz $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ finden wir sofort

$$\mathrm{rot}\vec{E} - \frac{\mathrm{i}\omega}{c}\vec{B} = 0 \tag{48}$$

$$\Leftrightarrow \vec{B}(\vec{r},t) = -\frac{\mathrm{i}c}{\omega}\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r},t)\,. \tag{49}$$

1 Punkt

Dies ist der gesuchte Zusammenhang. Also berechnen wir zunächst

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\ E_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\exp[\mathrm{i}(kz-\omega t))\right]\\ 0\end{pmatrix} \tag{50}$$

$$= \begin{pmatrix}-E_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) ik\exp[\mathrm{i}(kz-\omega t)]\\ 0\\ \frac{\pi}{a}E_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\exp[\mathrm{i}(kz-\omega t)]\end{pmatrix} \tag{51}$$

und damit schließlich

$$\vec{B}(\vec{r},t) = cE_0 e^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\left[-\frac{k}{\omega}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{e}_x - \frac{\mathrm{i}\pi}{\omega a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{e}_z\right]\,. \tag{52}$$

2 Punkte

b) **1 Punkt**

Die Dispersionsrelation folgt aus der Wellengleichung

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0\,. \tag{53}$$

0.5 Punkte

Mit dem gegebenen $\vec{E}$ finden wir

$$\left\{\left[-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + (\mathrm{i}k)^2\right] - \frac{(\mathrm{i}\omega)^2}{c^2}\right\}\vec{E} = 0\,. \tag{54}$$

Damit ist die Dispersionsrelation durch

$$\omega^2 = c^2\left(k^2 + \frac{\pi^2}{a^2}\right) \tag{55}$$

bestimmt.

0.5 Punkte

c) **6 Punkte**

Den Poynting-Vektor $\vec{S}$ bestimmen wir durch

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left(\mathrm{Re}\vec{E} \times \mathrm{Re}\vec{B}\right)\,. \tag{56}$$

Zunächst einmal gilt

$$\mathrm{Re}\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(kz - \omega t\right)\hat{e}_y \tag{57}$$

und

$$\mathrm{Re}\vec{B} = \frac{cE_0}{\omega}\left[-k\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(kz-\omega t\right)\hat{e}_x + \frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(kz-\omega t\right)\hat{e}_z\right]\,. \tag{58}$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned}\vec{S} =& \frac{1}{4\pi}\frac{c^2E_0^2}{\omega}\left[\frac{\pi}{a}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(kz-\omega t\right)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(kz-\omega t\right)\hat{e}_x\right.\\ &\left.+ k\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2\left(kz-\omega t\right)\hat{e}_z\right]\,.\end{aligned} \tag{59}$$

1 Punkt

Die Energiedichte w_{EM} bestimmen wir durch

$$w_{\mathrm{EM}} = \frac{1}{8\pi}\left(\mathrm{Re}\vec{E}^2 + \mathrm{Re}\vec{B}^2\right)\,. \tag{60}$$

Wir finden

$$\begin{aligned}w_{\mathrm{EM}} =& \frac{1}{8\pi}\left[E_0^2\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(kz-\omega t)\right.\\ &\left.+ E_0^2\frac{c^2}{\omega^2}\left(k^2\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(kz-\omega t) + \frac{\pi^2}{a^2}\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin^2(kz-\omega t)\right)\right]\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}=& \frac{1}{8\pi}E_0^2\frac{c^2}{\omega^2}\left[\underbrace{\frac{\omega^2}{c^2}}_{=k^2+\pi^2/a^2}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(kz-\omega t)\right.\\ &\left.+ k^2\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(kz-\omega t) + \frac{\pi^2}{a^2}\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin^2(kz-\omega t)\right]\end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}=& \frac{1}{8\pi}E_0^2\frac{c^2}{\omega^2}\left[\frac{\pi^2}{a^2}\left(\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(kz-\omega t) + \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin^2(kz-\omega t)\right)\right.\\ &\left.+ 2k^2\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(kz-\omega t)\right]\end{aligned} \tag{63}$$

1 Punkt

Der gesuchte Zusammenhang zwischen Energiedichte und Poynting-Vektor lautet nach dem Satz von Poynting:

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{\mathrm{EM}} + \mathrm{div}\vec{S} = 0\ . \tag{64}$$

Dies stellt die Energieerhaltung dar.

0.5 Punkte

Wir zeigen, dass dieser Zusammenhang ür unser Ergebnis für $\vec{S}$ und w_{EM} gilt. D.h. wir berechnen

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{S} =& \frac{1}{4\pi}\frac{c^2 E_0^2}{\omega}\left[\frac{\pi^2}{a^2}\left(\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(kz-\omega t)\cos(kz-\omega t) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(kz-\omega t)\sin(kz-\omega t)\right)\right.\\ &\left. - 2k^2\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(kz-\omega t)\cos(kz-\omega t)\right]\end{aligned} \tag{65}$$

1 Punkt

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} w_{\mathrm{EM}} =& \frac{1}{8\pi}E_0^2\frac{c^2}{\omega^2}\left[\frac{\pi^2}{a^2}2\omega\left(\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(kz-\omega t)\cos(kz-\omega t) - \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(kz-\omega t)\cos(kz-\omega t)\right)\right.\\ &\left. + 4k^2\omega\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(kz-\omega t)\cos(kz-\omega t)\right]\ .\end{aligned} \tag{66}$$

1 Punkt

Damit gilt offensichtlich

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{\mathrm{EM}} + \mathrm{div}\vec{S} = 0\ \checkmark\ . \tag{67}$$

0.5 Punkte

Um $\mathrm{div}\vec{S}$ und $\partial_t w_{\mathrm{EM}}$ zu bestimmen, haben wir mehrfach verwendet, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin^2\omega t = 2\omega\cos\omega t\sin\omega t\ , \tag{68}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos^2\omega t = -2\omega\cos\omega t\sin\omega t\ . \tag{69}$$

Das zeitliche Mittel des Poynting-Vektors $\langle\vec{S}\rangle$ zeigt in z-Richtung (in die Bewegungsrichtung der Welle). Dies ist dadurch ersichtlich, dass die Terme $\sim \sin\omega t\cos\omega t$ in Gl. (59) verschwinden und die Terme $\sim \cos^2\omega t$ nicht. Beachte hierzu auch die in den Hinweisen zu Beginn angegebenen Relationen

$$\int_0^T \cos(2\pi t/T)\sin(2\pi t/T)\,\mathrm{d}t = 0\ , \tag{70}$$

$$\int_0^T \cos^2(2\pi t/T)\,\mathrm{d}t = T/2\ . \tag{71}$$

1 Punkt

Aufgabe 4 *Kovariante Formulierung der Elektrodynamik* **10 Punkte**

In Übung 13 wurde hergeleitet, dass mit der Definition $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ und $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$ folgt:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{72}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{73}$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{74}$$

Diese Relationen können ohne Beweis verwendet werden. Sie können aber auch leicht aus der Definition des elektromagnetischen Feldstärketensors hergeleitet werden.

a) **2 Punkte**

Mit den Matrix-Darstellungen berechnen wir

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\vec{E}^2 + (-E_x^2 + B_z^2 + B_y^2) + (-E_y^2 + B_z^2 + B_x^2) + (-E_z^2 + B_y^2 + B_x^2) \tag{75}$$

$$= 2\left(\vec{B}^2 - \vec{E}^2\right). \tag{76}$$

2 Punkte

Und Weiter ist

$$F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -\vec{E}\cdot\vec{B} + (-E_xB_x - E_zB_z - E_yB_y)$$

$$+ (-E_yB_y - E_zB_z - E_xB_x) + (-E_zBz - E_yB_y - E_xB_x) \tag{77}$$

$$= -4\vec{E}\cdot\vec{B}. \tag{78}$$

2 Punkte

Beachte, dass die beiden gesuchten Objekte $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ und $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ als Spur über ein Matrixprodukt interpretiert werden kann.

b) **3 Punkte**

Es ist zu zeigen, dass $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ invariant unter Lorentz-Transformationen ist. Also

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F'_{\mu\nu}F^{\mu\nu'}. \tag{79}$$

Explizit lässt sich dies zeigen durch:

$$F'_{\mu\nu}F^{\mu\nu'} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}F^{\alpha\beta'}F^{\mu\nu'} \tag{80}$$

$$= g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\Lambda^\alpha{}_\rho\Lambda^\beta{}_\sigma F^{\rho\sigma}\Lambda^\mu{}_\gamma\Lambda^\nu{}_\delta F^{\gamma\delta} \tag{81}$$

$$= \Lambda^\alpha{}_\rho\Lambda^\mu{}_\gamma g_{\mu\alpha}\Lambda^\beta{}_\sigma\Lambda^\nu{}_\delta g_{\nu\beta}F^{\rho\sigma}F^{\gamma\delta} \tag{82}$$

$$= g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}F^{\rho\sigma}F^{\gamma\delta} = F_{\gamma\delta}F^{\gamma\delta} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \checkmark \tag{83}$$

In der vorletzten Zeile haben wir die Definition der Lorentz-Transformationen verwendet, d.h.

$$\Lambda^\alpha{}_\rho\Lambda^\mu{}_\gamma g_{\mu\alpha} = g_{\rho\gamma}. \tag{84}$$

Dies folgt gerade aus der Forderung, dass Skalarprodukte $x_\mu y^\mu$ invariant unter Lorentz-Transformationen sein sollen.

c)

2 Punkte

Zunächst rekapitulieren wir die Eigenschaften von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ unter P- und C-Transformationen. Diese kennen wir aus Übung 10 und können ohne Beweis verwendet werden. Es gilt

$$\vec{E} \xrightarrow{P} -\vec{E}, \tag{85}$$
$$\vec{B} \xrightarrow{P} \vec{B}, \tag{86}$$
$$\vec{E} \xrightarrow{C} -\vec{E}, \tag{87}$$
$$\vec{B} \xrightarrow{C} -\vec{B}. \tag{88}$$

Bemerke, dass sich die Aufgabe auch lösen lässt ohne zu wissen, welches Feld ungerade Parität hat. Es reicht zu wissen, dass sich *ein* Feld wie ein Pseudovektor verhält.

Die Lagrange-Dichte hat die Form

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \,. \tag{89}$$

Mit unserem Ergebnis aus a) finde wir

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2\pi}\left(\vec{B}^2 - \vec{E}^2\right) \,. \tag{90}$$

0.5 Punkte

Wir benutzen die bekannten Eigenschaften von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ und finden

$$\mathcal{L} \xrightarrow{P} \mathcal{L}' = -\frac{1}{2\pi}\left[\vec{B}^2 - \left(-\vec{E}\right)^2\right] \tag{91}$$
$$\xrightarrow{CP} \mathcal{L}'' = -\frac{1}{2\pi}\left[\left(-\vec{B}\right)^2 - \left(-\vec{E}\right)^2\right] = \mathcal{L} \,. \tag{92}$$

Also ist die gegebene Lagrange-Dichte invariant unter CP. Offensichtlich ist sie auch invariant unter P und C.

1.5 Punkte

d)

1 Punkt

Wieder benutzen wir das Ergebnis aus a) und stellen fest

$$\mathcal{L} = -\frac{g}{4} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = ga\left(\vec{E} \cdot \vec{B}\right) \,. \tag{93}$$

Mit den Eigenschaften von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ finden wir

$$\mathcal{L} \xrightarrow{P} \mathcal{L}' = ga\left[\left(-\vec{E}\right) \cdot \vec{B}\right] \tag{94}$$
$$\xrightarrow{CP} \mathcal{L}'' = ga\left(\vec{E}\right) \cdot \left(-\vec{B}\right) \neq \mathcal{L} \,. \tag{95}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die gegebene Lagrange-Dichte nicht invariant unter CP-Transformationen ist.

Anmerkung: Eine Lagrange-Dichte dieser Form tritt zum Beispiel bei der Axion-Photon-Kopplung auf.