Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 16/17

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. J. Enander, A. Pargner
`https://cr.ikp.kit.edu/pargner/teaching/theoc1617/`

Modulklausur
05.04.17

Name:	
Matr.Nr.:	
PO :	
Tut. Nr.:	

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Summe

Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Bitte wenden.

Hinweise

- Als Hilfsmittel ist ein von Ihnen beidseitig, handgeschriebenes DIN A4 Blatt erlaubt.
- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt zwei Stunden.
- Die Ergebnisse der Klausur werden vorraussichtlich am 12.04.17 per Aushang im Foyer des Physikhochhauses bekannt gegeben.
- Die Klausureinsicht findet vorraussichtlich am 21.04.17 statt. Genauer Ort und Uhrzeit werden rechtzeitig auf der Vorlesungshomepage bekannt gegeben.
- Beachten Sie, dass auf dem Aufgabenblatt CGS-Einheiten verwendet werden. Sie können die Aufgaben aber auch in einem Einheitensystem Ihrer Wahl lösen.

Sie können folgende Relationen ohne Beweis verwenden:

- Es gilt
$$\Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \, .$$
Dabei ist Δ der Laplace-Operator und $\delta(\vec{r})$ die Delta-Funktion.
- Der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten $\rho,\ \phi,\ z$ ist durch
$$\Delta\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\vec{A}}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial z^2}$$
gegeben. Wobei $\vec{A}(\vec{r})$ ein differenzierbares Vektorfeld ist.
- Die Rotation in Zylinderkoordinaten $\rho,\ \phi,\ z$ ist durch
$$\mathrm{rot}\vec{A} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\hat{e}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right]\hat{e}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right]\hat{e}_z$$
gegeben. Wobei $\vec{A} = (A_\rho, A_\phi, A_z)$ ein differenzierbares Vektorfeld ist.
- Die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta,\phi)$ können wie folgt durch die zugeordneten Legendre-Polynome $P_l(\cos\theta)$ ausgedrückt werden,
$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \, .$$
Dabei ist $l = 0,1,2,\ldots$, $m = -l,-l+1,\ldots,l-1,l$.
- Für die zugeordneten Legendre-Polynome gilt
$$P_0^0(x) = 1,\ P_1^0(x) = x,\ P_1^1(x) = -\sqrt{1-x^2},\ P_1^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} \, .$$
- Es gilt folgender Zusammenhang zwischen den sphärischen Multipolmomenten q_{00}, $q_{1,0}$, $q_{1,\pm1}$ und den kartesischen Mulitpolmomenten q, $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$
$$q_{00} = q \ , \ q_{10} = p_3 \ , \ q_{1,\pm1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp p_1 + \mathrm{i}p_2) \, .$$
- Eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$y''(t) - \omega^2 y(t) = 0$$
ist durch $y(t) = C_1\cosh(\omega t) + C_2\sinh(\omega t)$ gegeben. Dabei sind $C_{1,2}$ beliebige Konstanten.

Aufgabe 1 ***Maxwell-Gleichungen und Wellen*** **10 Punkte**

a) Geben Sie die Maxwell-Gleichungen im Vakuum für das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r},t)$ und das magnetische Feld $\vec{B}(\vec{r},t)$ in Anwesenheit einer Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$ und einer Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t)$ an.

1 Punkt

b) Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen die Kontinuitätsgleichung für die Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$ und die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t)$ her. Integrieren Sie die Kontinuitätsgleichung über eine konstantes Volumen $\mathcal{V}$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis physikalisch.

3 Punkte

c) Betrachten Sie nun die quellenfreien Maxwell-Gleichungen, d.h. setzen Sie $\rho(\vec{r},t) = 0$ und $\vec{j}(\vec{r},t) = 0$. Leiten Sie daraus die Wellengleichungen

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E}(\vec{r},t) = 0 \ , \qquad (1)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B}(\vec{r},t) = 0 \qquad (2)$$

ab. Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit in Vakuum.

2 Punkte

d) Betrachten Sie die Wellengleichung für das elektrische Feld und führen Sie eine Fourietransformation in den Variablen x, y, z und t durch. Bestimmen Sie so die Dispersionsrelation $\omega(k)$ und geben Sie die allgemeine, physikalische Lösung für $\vec{E}(\vec{r},t)$ an.

3 Punkte

e) Betrachten Sie nun die Wellengleichung für das elektrische Feld in nur einer räumlichen Dimension x, d.h. $\Delta \to \partial^2/\partial x^2$. Zeigen Sie, dass die Lösung dieser Gleichung von der Form

$$E(x,t) = f(x - c\cdot t) + g(x + c\cdot t) \qquad (3)$$

ist. Dabei seien $f(x)$ und $g(x)$ beliebige, stetig differenzierbare Funktionen.

1 Punkt

Bitte wenden.

Aufgabe 2 *Magnetostatik* **12 Punkte**

a) Betrachten Sie die Maxwell-Gleichungen im statischen Fall, d.h. alle elektrischen und magnetischen Felder sind zeitlich konstant. Begründen Sie, warum das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ durch ein Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ dargestellt werden kann. Ist dieses Vektorpotential eindeutig definiert? Geben Sie die Eichtransformation für $\vec{A}(\vec{r})$ an und zeigen Sie, dass $\vec{B}(\vec{r})$ invariant unter diesen Transformationen ist. Erläutern Sie davon ausgehend kurz den Begriff der Eichfreiheit.

3 Punkte

b) Wählen Sie eine geeignete Eichung für das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$, um aus den Maxwell-Gleichungen die Poisson-Gleichung

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}) \tag{4}$$

herzuleiten. Zeigen Sie weiter, dass eine allgemeine Lösung dieser Gleichung durch

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{5}$$

gegeben ist.

3 Punkte

Ein undendlich langer, zylindrischer Leiter mit Radius R sei homogen von einem Strom I durchflossen. Wählen wir die z-Achse als Symmetrieachse des Drahtes, ist die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ in den Zylinderkoordinaten ρ, ϕ, z durch

7

$$\vec{j}(\vec{r}) = \hat{e}_z \begin{cases} \frac{I}{\pi R^2} & \rho \leq R \\ 0 & \rho > R \end{cases} \tag{6}$$

gegeben.

c) Zeigen Sie, dass das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ dieses Leiters durch

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I}{c}\hat{e}_z \begin{cases} 1-\frac{\rho^2}{R^2} & \rho \leq R \\ -2\log\frac{\rho}{R} & \rho > R \end{cases} \tag{7}$$

beschrieben werden kann.

Hinweis: Die in Gl. (5) auftretenden elliptischen Integrale lassen sich für dieses Problem nicht ohne Weiteres lösen. Daher bietet es sich hier an nicht die Integralform in Gl. (5) zu verwenden, sondern die angegebene Stromdichte direkt in die Poisson-Gleichung einzusetzen und diese für $\vec{A}(\vec{r})$ zu lösen. Verwenden Sie dazu, dass $\vec{A}(\vec{r})$ in z-Richung zeigt, d.h. $\vec{A}(\vec{r}) = A(\vec{r})\hat{e}_z$. Überlegen Sie sich zunächst auf Grund welcher Symmetrien $A(\vec{r}) = A(\rho)$ gelten muss. Wählen Sie auftretende Integrationskonstanten so, dass das Vektorpotential bei $\rho = R$ verschwindet. Beachten Sie auch, dass das Potential $A(\rho)$ und seine Ableitung $A'(\rho)$ stetig und regulär sein sollten.

4 Punkte

d) Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ des Leiters.

2 Punkte

Aufgabe 3 *Multipolentwicklung* **10 Punkte**

Betrachten Sie die Ladungsverteilung in Abb. 1: Puntkladungen mit $Q = +q$ befinden sich jeweils an den Orten $x = a, y = 0, z = 0$ und $x = 0, y = a, z = 0$. Punktladungen mit $Q = -q$ befinden sich jeweils an den Orten $x = -a, y = 0, z = 0$ und $x = 0, y = -a, z = 0$.

a) Geben Sie zunächst die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ dieser Verteilung mit Hilfe von Delta-Funktionen in den kartesischen Koordinaten $x,\ y,\ z$ an. Drücken Sie dann $x,\ y,\ z$ durch die Kugelkoordinaten $r,\ \phi,\ \theta$ aus und benutzen Sie bekannte Rechenregeln für die Delta-Funktion, um zu zeigen, dass die Ladungsdichte in diesen Koordinaten durch

$$\rho(\vec{r}) = \frac{q}{a^2}\delta(r-a)\delta(\cos\theta)\left[\delta(\phi) + \delta(\phi - \frac{\pi}{2}) - \delta(\phi - \pi) - \delta(\phi - \frac{3\pi}{2})\right] \tag{8}$$

ausgedrückt werden kann.

3 Punkte

b) Berechnen Sie für diese Ladungsverteilung die sphärischen Multipolmomente q_{lm} in Abhängigkeit von l und m. Die sphärischen Multipolmomente q_{lm} lassen sich durch

$$q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int \mathrm{d}^3r'\rho(\vec{r}\,')r'^l Y^*_{lm}(\theta', \phi') \tag{9}$$

bestimmen. Hierbei ist $l = 0, 1, 2, \ldots$, $m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$ und $Y_{lm}(\theta, \phi)$ sind die Kugelflächenfunktionen.

4 Punkte

c) Geben Sie die Momente für $l = 0$ und $l = 1$ explizit an. Drücken Sie diese auch in kartesischen Koordinaten aus. Bestimmen Sie so das Dipolmoment $\vec{p}$ dieser Ladungsverteilung in Abhängigkeit von q und a. Skizzieren Sie die Ladungsverteilung und zeichnen Sie die Richtung des Dipolmomentes in Ihre Skizze.

3 Punkte

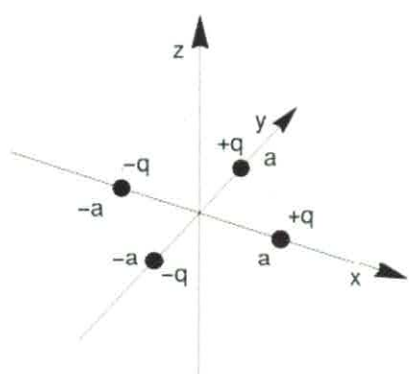

Abbildung 1

Aufgabe 4 *Relativisitk*

8 Punkte

a) Ein Teilchen mit Masse m, Ladung q und Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v} = v_0 \hat{e}_x$ fliege durch das konstante elektrische Feld $\vec{E} = E\hat{e}_z$ eines Kondensators. Finden Sie die Bahnkurve $z(x)$ des Teilchens indem Sie die relativistische Bewegungsgleichung integrieren. Nehmen Sie an, dass das Teilchen im Ursprung starte.

4 Punkte

b) Zeigen Sie explizit, dass zwei aufeinander folgende Lorentz-Boosts in die gleiche Richtung, äquivalent zu einer einzigen Lorentz-Transformation mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} \tag{10}$$

sind.

4 Punkte

Viel Erfolg!