Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 16/17

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. J. Enander, A. Pargner
https://cr.ikp.kit.edu/pargner/teaching/theoc1617/

Lösung zur Modulklausur 05.04.17

Hinweise zur Korrektur

- Beachtet bitte, dass in der Elektrodynamik unterschiedliche Einheitensysteme (vornehmlich CGS- und SI-Einheiten) verwendet werden. Die hier angegebenen Lösungen sind in CGS-Einheiten. Natürlich können alle Aufgaben auch in anderen Einheitensystemen korrekt gelöst werden.
- Die *kursiv* angegeben Teilpunkte für Zwischenschenergebnisse sind als Vorschlag zu verstehen.

Aufgabe 1 *Maxwell-Gleichungen und Wellen* **10 Punkte**

a) **1 Punkt**

Die Maxwell-Gleichungen in Vakuum mit $\rho(\vec{r},t)$ und $\vec{j}(\vec{r},t)$ als Quellen lauten:

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho \ , \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \ , \tag{2}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \ , \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \ . \tag{4}$$

b) **3 Punkte**

Wir betrachten die Zeitableitung von Gl. (1):

$$\underbrace{\partial_t \mathrm{div}\vec{E}}_{=\mathrm{div}\partial_t\vec{E}=\mathrm{div}(c\ \mathrm{rot}\vec{B}-4\pi\vec{j})} = 4\pi\partial_t\rho \ . \tag{5}$$

Wobei wir Gl. (2) verwendet haben. Benutzen wir nun, dass die Divergenz einer Rotation verschwindet, erhalten wir

$$\partial_t\rho(\vec{r},t) + \mathrm{div}\vec{j}(\vec{r},t) = 0 \ . \tag{6}$$

Dies ist die Kontinuitätsgleichung der Elektrodynamik.

1 Punkt

Der physikalische Zusammenhang wird deutlich, wenn wir die Kontinuitätsgleichung in der Form

$$\partial_t \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3r\ \rho(\vec{r},t) + \oint \vec{j}(\vec{r},t)\cdot \mathrm{d}\vec{f} = 0 \tag{7}$$

1 Punkte

betrachten. Hierbei ist $\vec{f}$ die Oberfläche des Volumens $\mathcal{V}$ und wir haben den Satz von Gauß verwendet. Die Kontinuitätsgleichung bedeutet also, dass die zeitliche Änderung der Ladungsdichte in einem bestimmten Volumen, dem durch die Oberfläche des Volumens austretenden Ladungsstrom entsprechen muss. Somit ist der Betrag der Gesamtladung erhalten.

1 Punkt

c) **2 Punkte**

Wir setzen $\rho(\vec{r},t) = 0$ und $\vec{j}(\vec{r},t) = 0$ und betrachten die Zeitableitung von Gl. (3):

$$\mathrm{rot}\ \underbrace{\partial_t \vec{E}}_{=c\mathrm{rot}\vec{B}} + \frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} = 0 \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\mathrm{rot\ rot}\vec{B}}_{=\mathrm{grad\ div}\vec{B}-\Delta\vec{B}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} = 0 \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow \Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} = 0 \blacksquare . \tag{10}$$

Wobei wir verwendet haben, dass $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ gilt.

1 Punkt

Auf gleichem Wege lässt sich die Wellengleichung für das elektrische Feld herleiten.

1 Punkt

d) **3 Punkte**

Die Wellengleichung für das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r},t)$ lautet

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0 . \tag{11}$$

Wir machen den Fourier-Ansatz

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}^3k\ \tilde{\vec{E}}(\vec{k},\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \tag{12}$$

Eingesetzt in die Wellengleichung liefert dies

$$\left(\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{\vec{E}}(k,\omega) = 0 \tag{13}$$

Die einzig nichttrivialen Lösungen $\tilde{\vec{E}} \neq 0$ erhalten wir also, wenn

$$\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \tag{14}$$

gilt. Die Lösung hierfür ist offensichtlich $\omega = \pm|\vec{k}|c$. Es lässt sich aber zeigen, dass wir uns o.B.d.A. (wie üblich) auf positive Frequenzen beschränken können. Die Dispersionsrelation lautet also

$$\omega = c|\vec{k}| . \tag{15}$$

1 Punkte

Formal schreiben wir

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{k},\omega) = \tilde{\vec{E}}(\vec{k})\delta(\omega - |\vec{k}|c) \tag{16}$$

und finden damit die allgemeine Lösung

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \int \mathrm{d}^3k\ \tilde{\vec{E}}(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}\ \text{mit}\ \omega = |\vec{k}|c . \tag{17}$$

1 Punkt

$E = E_0 e^{i(\vec{k}x-\omega t)}$

Da das elektrische Feld eine reele Größe ist, die rechte Seite von Gl. (17) im Allgemeinen aber komplex ist, schreiben wir für die physikalische Lösung

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re} \int \mathrm{d}^3k\ \tilde{\vec{E}}(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \text{ mit } \omega = |\vec{k}|c\ . \quad \pm|\vec{k}|c \tag{18}$$

1 Punkt

Nicht gefordert: Bemerke, dass $\tilde{\vec{E}}$ weiterhin eine komplexe Größe der Form $\tilde{\vec{E}} = \tilde{\vec{E}}_1 + \mathrm{i}\tilde{\vec{E}}_2$ ist. Die beiden reellen Funktionen $\tilde{\vec{E}}_{1,2}$ werden durch die Anfangsbedingunend $\vec{E}(\vec{r},t=t_0)$ und $\dot{\vec{E}}(\vec{r},t=t_0)$ bestimmt.

e)

1 Punkt

Es ist zu zeigen, dass die Lösung der Wellengleichung in einer Dimension im Allgemeinen der Form

$$E(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \tag{19}$$

entsprechen.

Dies lässt sich auf zwei Wegen zeigen.

- *Variante 1*: Wir setzen die gegeben Lösung in die Wellengleichung ein und finden

$$\left(\partial_x^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) f(x-ct) = f''(x-ct) - \frac{1}{c^2}f''(x-ct)(-c)^2 \tag{20}$$

$$= f''(x-ct) - f''(x-ct) = 0\ . \tag{21}$$

  Gleichges gilt für $g(x+ct)$. Damit haben wir gezeigt, dass das $E(x,t)$ aus Gl.(19) die Wellengleichung löst.

- *Variante 2*: In d) haben wir die allgemeine Form der Lösung der Wellengleichung hergeleitet. Betrachten wir diese in einer Dimension:

$$E(x,t) = \mathrm{Re}\int \mathrm{d}k\tilde{E}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \tag{22}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \left[\tilde{E}(k)\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)} + \tilde{E}^*(k)\mathrm{e}^{-i(kx-\omega t)}\right] \tag{23}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \left[\tilde{E}(k)\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)} + \tilde{E}^*(-k)\mathrm{e}^{i(kx+\omega t)}\right] \tag{24}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}k \left[\tilde{E}(k)\mathrm{e}^{ik(x-ct)} + \tilde{E}^*(-k)\mathrm{e}^{ik(x+ct)}\right] \tag{25}$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}k \left[\tilde{E}(k)\mathrm{e}^{ik(x+ct)} + \tilde{E}^*(-k)\mathrm{e}^{ik(x-ct)}\right] \tag{26}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \left[f_k\mathrm{e}^{ik(x-ct)} + g_k\mathrm{e}^{ik(x+ct)}\right] \tag{27}$$

$$= f(x-ct) + g(x+ct)\ . \tag{28}$$

  Wobei wir

$$f_k = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\begin{cases}\tilde{E}(k) & k>0\\ \tilde{E}^*(-k) & k<0\end{cases}\ , \tag{29}$$

$$g_k = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\begin{cases}\tilde{E}^*(-k) & k>0\\ \tilde{E}(k) & k<0\end{cases} \tag{30}$$

  definiert haben und die Dispersionsrelation verwendet haben, d.h. $\omega = kc$ für $k>0$ und $\omega = -kc$ für $k<0$. Beachte, dass Faktoren $1/\sqrt{2\pi}$ Konventionssache sind.

  Nicht gefordert: Bemerke, dass $f(x-ct)$ einer in positiver x-Richtung laufenden Wellen entspricht. Entsprechend propagiert $g(x+ct)$ in negative x-Richtung.

Aufgabe 2 ***Magnetostatik*** **12 Punkte**

a) **3 Punkte**

Die für das Magnetfeld interessanten Maxwell-Gleichungen im statischen Fall lauten

$$\text{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}\ , \tag{31}$$

$$\text{div}\vec{B} = 0\ . \tag{32}$$

Wegen Gl (32) können wir $\vec{B}$ mittels

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \tag{33}$$

durch ein Vektorpotential $\vec{A}$ ausdrücken, denn div rot$\vec{A} = 0$ für beliebige $\vec{A}$. *Anmerkungen*: Da Gl. (32) auch im nichtstatischen Fall gilt, können wir $\vec{B}$ natürlich immer durch ein Vektorpotential $\vec{A}$ ausdrücken.

1 Punkt

Aus der Definition in Gl. (33) folgern wir, dass $\vec{A}$ nur bis auf eine Konstante einedeutig bestimmt ist. Diese Konstante können wir durch den Gradient eines beliebigen Skalarfeldes Λ ausdrücken. Denn wir beobachten, dass das $\vec{B}$-Feld invariant unter Transformationen der Form

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}\Lambda \tag{34}$$

ist. Da

$$\vec{B}' = \text{rot}\vec{A}' = \text{rot}\vec{A} + \underbrace{\text{rot grad}\Lambda}_{=0} = \vec{B}\ . \tag{35}$$

1 Punkt

Solche Transformationen bezeichnen wir als Eichtransformationen. Die Freiheit das Vektorpotential $\vec{A}$ mittels dem Gradient eines Skalarfeldes Λ zu redefinieren, ohne das physiklische Feld $\vec{B}$ zu verändern, bezeichnen wir als Eichfreiheit.

1 Punkt

b) **3 Punkte**

Wir betrachten

$$\text{rot}\vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r})\ . \tag{36}$$

Nun drücken wir $\vec{B}(\vec{r})$ durch ein Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ aus, $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ und finden

$$\text{rot rot}\vec{A} = \text{grad div}\vec{A} - \Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}\ . \tag{37}$$

Auf Grund der zuvor diskutierten Eichfreiheit können wir nun $\vec{A}$ so wählen, dass div$\vec{A} = 0$ gilt. Diese Eichung nennt man Coulomb-Eichung.

Damit finden wir die Poisson-Gleichung

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\ . \tag{38}$$

1.5 Punkte

Um eine allgemeine Lösung dieser Gleichung zu bestimmen gehen wir komplett analog zu Aufgabe 3 auf Übungsblatt 3 vor. Wir verwenden also die Greensche Methode. D.h. wir müssen

Fließbach Kap. 14 S. 127

zunächst die Greensche Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ des Laplace-Operators bestimmen. Wegen der bekannten Relation (gegeben in den Hinweisen auf dem Deckblatt, hergeleitet auf dem 2. Übungsblatt)

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \tag{39}$$

ist diese durch

$$G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{40}$$

gegeben. Also finden wir eine allgemeine Lösung durch

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3r' G(\vec{r}, \vec{r}\,') \left(-\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}\,')\right) \tag{41}$$

$$= \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \; . \; \blacksquare \tag{42}$$

1.5 Punkte

Nicht gefordert: Bemerke, dass die Bedingung für die Coulomb-Eichung immer erfüllt werden kann. Nehmen wir dazu an, das Vektorpotential $\vec{A}$ die Coulomb-Bedingung nicht erfüllt. Aus der Forderung, dass das transformierte Potential $\vec{A}'$ der Bedinungen genügt, d.h.

$$\mathrm{div}\vec{A}' = 0 \; , \tag{43}$$

erhalten wir

$$\Delta\Lambda = -\mathrm{div}\vec{A} \; . \tag{44}$$

Dies ist eine Poisson-Gleichung für Λ. Für diese existiert immer eine Lösung Λ. D.h. dank der Eichfreiheit finden wir immer ein $\vec{A}$, das der Coulomb-Eichung genügt.

c)

4 Punkte

Wie auf dem Aufgabenblatt erläutert ist die in b) hergeleitete Integralformel für die angegebene Stromdichte nicht die optimale Wahl um $\vec{A}$ zu bestimmen. Daher gehen wir wie in Aufgabe 2 b) auf Übungsblatt 4 vor und lösen die Poisson-Gleichung direkt.

Die Stromdichte ist in den Zylinderkoordinate ρ, ϕ, z durch

$$\vec{j}(\vec{r}) = \hat{e}_z \begin{cases} \frac{I}{\pi R^2} & \rho \le R \\ 0 & \rho > R \end{cases} \tag{45}$$

gegeben. Die Poisson-Gleichung lautet

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \; . \tag{46}$$

Wegen $\vec{j} = j(\rho)\hat{e}_z$ ist auch $\vec{A}$ parallel zur z-Richtung, d.h. $\vec{A}(\vec{r}) = A(\vec{r})\hat{e}_z$. Auf Grund der Rotations- und Translationssymmetrie des Problems kann das Vektorpotential nur von ρ abhängen. Also ist $A(\vec{r}) = A(\rho)$.

1 Punkt

Dementsprechend lautet die Poisson-Gleichung

$$\Delta\vec{A} = \Delta\left(A(\rho)\hat{e}_z\right) = -\frac{4\pi}{c}\hat{e}_z \begin{cases} \frac{I}{\pi R^2} & \rho \le R \\ 0 & \rho > R \end{cases} \; . \tag{47}$$

Da $\hat{e}_z$ konstant ist können wir $\hat{e}_z$ auf beiden Seiten kürzen. Beachte, dass dies nicht der Fall wäre falls $\vec{j}$ parallel zu $\hat{e}_{\rho,\phi}$ wäre.

Den Hinweisen auf dem Deckblatt entnehmen wir den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten und finden die Gleichung

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}A\right) = \begin{cases} -\frac{4I}{cR^2} & \rho \leq R \\ 0 & \rho > R \end{cases} . \tag{48}$$

Nach einmaliger Integration erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial\rho}A = \begin{cases} -\frac{2I}{c}\frac{\rho}{R^2} + \frac{C_1}{\rho} & \rho \leq R \\ \frac{C_2}{\rho} & \rho > R \end{cases} . \tag{49}$$

Nach einer weiteren Integration

$$A = \begin{cases} -\frac{I}{c}\frac{\rho^2}{R^2} + C_1 \ln\rho + D_1 & \rho \leq R \\ C_2 \ln\rho + D_2 & \rho > R \end{cases} . \tag{50}$$

Wobei $C_{1,2}$ und $D_{1,2}$ zunächst beliebige Integrationskonstanten sind. Nun können wir zunächst $D_{1,2}$ so wählen, dass wir

$$A = \begin{cases} -\frac{I}{c}\frac{\rho^2}{R^2} + C_1 \ln\frac{\rho}{R} + \bar{D}_1 & \rho \leq R \\ C_2 \ln\frac{\rho}{R} + \bar{D}_2 & \rho > R \end{cases} . \tag{51}$$

schreiben können.

Auf dem Aufgabenblatt wurde darauf hingewiesen, dass das Potential regulär sein soll. Dies bedeutet insbesondere, dass es nicht singulär sein darf. Die gefährliche Stelle ist hier $\rho = 0$. Dementsprechend wählen wir $C_1 = 0$. Weiter soll das Potential bei $\rho = R$ verschwinden. Also setzen wir $\bar{D}_2 = 0$ und $\bar{D}_1 = I/c$. Bemerke, dass dadurch das Potential $A(\rho)$ stetig an der Stelle $\rho = R$ ist. Aus der Stetigkeit der ersten Ableitung $A'(\rho)$ an der Stelle $\rho = R$ finden wir $C_2 = -2I/c$.

Damit ist das gesuchte Vektorpotential durch

$$\vec{A}(\vec{r}) = A(\rho)\hat{e}_z = \frac{I}{c}\hat{e}_z \begin{cases} 1 - \frac{\rho^2}{R^2} & \rho \leq R \\ -2\log\frac{\rho}{R} & \rho > R \end{cases} . \tag{52}$$

gegeben.

3 Punkte

d) **2 Punkte**

Es ist

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r}) \tag{53}$$

In den Hinweisen auf dem Deckblatt ist der Rotationsopertator in Zylinderkoordinaten gegeben. Damit ist

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A} = -A'(\rho)\hat{e}_\phi . \tag{54}$$

Also finden wir

$$\vec{B} = \frac{2I}{c}\hat{e}_\phi \begin{cases} \frac{\rho}{R^2} & \rho \leq R \\ \frac{1}{\rho} & \rho > R \end{cases} . \tag{55}$$

Aufgabe 3 *Multipolentwicklung*

10 Punkte

a)

3 Punkte

In den kartesischen Koordinaten x, y, z ist die Ladungsverteilung offensichtlich durch

$$\rho(\vec{r}) = q\left[\delta(x-a)\delta(y)\delta(z) + \delta(x)\delta(y-a)\delta(z) - \delta(x+a)\delta(y)\delta(z) - \delta(x)\delta(y+a)\delta(z)\right] \tag{56}$$

gegeben.

1 Punkt

Diese Ladungsverteilung soll nun in den Kugelkoordinaten r, θ, ϕ ausgedrückt werden. Es gilt

$$x = r\sin\theta\cos\phi\ , \tag{57}$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi\ , \tag{58}$$

$$z = r\cos\theta\ . \tag{59}$$

Betrachten wir zunächst nur den Beitrag ρ_1 der positiven Ladung bei $x = a$ und drücken hier x, y, z entsprechend durch r, θ, ϕ aus:

$$\rho_1 = q\delta(x-a)\delta(y)\delta(z) \tag{60}$$

$$= q\delta(r\sin\theta\cos\phi - a)\delta(r\sin\theta\sin\phi)\underbrace{\delta(r\cos\theta)}_{=\frac{1}{|r|}\delta(\cos\theta)} \tag{61}$$

$$= \frac{q}{r}\delta(r\sin\theta\cos\phi - a)\underbrace{\delta(r\sin\theta\sin\phi)}_{\frac{1}{r|\sin\theta|}\delta(\sin\phi)}\delta(\cos\theta)\ . \tag{62}$$

In der zweiten Zeile haben wir verwendet, dass $\delta(r\cos\theta)$ impliziert, dass entweder $\cos\theta = 0$ oder $r = 0$ sein muss. Letzteres widerspricht natürlich der ersten δ-Funktion. Daher schließen wir, dass $r \neq 0$ und $\cos\theta = 0$ sein muss. Daher können wir die bekannte Relation $\delta(Cx) = \delta(x)/|C|$ verwenden, um $\delta(r\cos\theta) = \delta(\cos\theta)/|r|$ zu schreiben. Weiter haben wir verwendet haben, dass $r > 0$ per Definition. Die letzte Delta-Funktion impliziert $\cos\theta = 0$. An diesen Stellen gilt $\sin\theta = \pm 1$, also $|\sin\theta| = 1$. Wir finden

$$\rho_1 = \frac{q}{r^2}\delta(\pm r\cos\phi - a)\delta(\sin\phi)\delta(\cos\theta)\ . \tag{63}$$

Es ist $\delta(\sin\phi)$ nicht eindeutig. Mit der Definition des Azimutwinkels und der Abbildung schließen wir aber, dass die gesuchte Nullstelle $\phi = 0$ ist. Also ist $\delta(\sin\phi)$ hier äquivalent zu $\delta(\phi)$. Dies impliziert offensichtlich $\cos\phi = 1$. Also fassen wir zusammen

$$\rho_1 = \frac{q}{r^2}\delta(\pm r - a)\delta(\phi)\delta(\cos\theta)\ . \tag{64}$$

Verwenden wir für die erste Delta-Funktion $\delta(h(x)) = \delta(x - x_0)/|h'(x)|$ und, dass $\delta(r-a)$, $r = a$ impliziert, erhalten wir schließlich

$$\rho_1 = \frac{q}{a^2}\delta(r-a)\delta(\phi)\delta(\cos\theta)\ . \tag{65}$$

Analog finden wir die Beiträge der drei übrigen Ladungen und erhalten

$$\rho(\vec{r}) = \frac{q}{a^2}\delta(r-a)\delta(\cos\theta)\left[\delta(\phi) + \delta(\phi - \frac{\pi}{2}) - \delta(\phi - \pi) - \delta(\phi - \frac{3\pi}{2})\right]\ . \blacksquare \tag{66}$$

2 Punkte

Hinweis: Es ist auch möglich direkt die Relation für Delta-Funktionen in krummlinige Koordinatensystemen zu verwenden. Diese besagt im Wesentlichen, dass die Delta-Funktion ausgedrückt in den krummlinigen Koordinaten das Inverse der Funktionaldeterminante (ausgewertet an der Nullstelle) als Vorfaktor erhält. Also gilt in Kugelkoordinaten

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r^2\sin\theta|_{\vec{r}_0}}\delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)\delta(\phi - \phi_0)\ . \tag{67}$$

Dies reproduziert natürlich gerade unser Resultat von oben.

b) **4 Punkte**

Wir bestimmen die Multipolmomente q_{lm} der Ladungsverteilung mit der angegebenen Formel

$$q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int d^3r' \rho(\vec{r}\,') r'^l Y^*_{lm}(\theta', \phi') \ , \tag{68}$$

wobei die Kugelflächenfunktionen mit dem Hinweis auf dem Deckblatt durch

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \tag{69}$$

ausgedrückt werden können. Dabei sind $P_l^m(\cos(\theta))$ die zugeordneten Legendre-Polynome. Diese sind reel. Setzen wir diese Definition und die Ladungsverteilung aus a) in Gl. (68) finden wir

$$\begin{aligned} q_{lm} =& \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \int r'^{2+l} dr' d\cos\theta' d\phi' \frac{q}{a^2} \delta(r-a)\delta(\cos\theta) \\ & \times \left[\delta(\phi) + \delta(\phi - \frac{\pi}{2}) - \delta(\phi - \pi) - \delta(\phi - \frac{3\pi}{2})\right] P_l^m(\cos\theta') e^{-im\phi'} \ . \end{aligned} \tag{70}$$

Dank der Delta-Funktionen sind alle Integrationen trivial und wir finden

$$q_{lm} = qa^l \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(0) \left[\underbrace{e^{-im0}}_{=1} + \underbrace{e^{-im\pi/2}}_{=(-i)^m} - \underbrace{e^{-im\pi}}_{=(-1)^m} - \underbrace{e^{-im3\pi/2}}_{=i^m}\right] \tag{71}$$

$$= qa^l \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(0) \left[1 + (-1)^m i^m - (-1)^m - i^m\right] \tag{72}$$

$$= qa^l \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(0) \left[1 - (-1)^m\right]\left[1 - i^m\right] \tag{73}$$

$$\Rightarrow q_{lm} = \begin{cases} 2qa^l \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(0)\left[1 - i^m\right] & m \text{ ungerade} \\ 0 & m \text{ gerade} \end{cases} \tag{74}$$

Dies ist der gesuchte Ausdruck.

c) **3 Punkte**

Zunächst bemerken wir, dass

$$q_{00} = 0 \ . \tag{75}$$

Also verschwindet das Monopolmoment q dieser Ladungsverteilung.

0.5 Punkte

Wir benutzen die Hinweise für die zugeordenten Legendre-Polynome auf dem Deckblatt und stellen fest, dass

$$P_1^0(0) = 0, \ P_1^1(0) = -1, \ P_1^{-1} = \frac{1}{2} \ . \tag{76}$$

Damit finden wir

$$q_{1,0} = 0 \ , \tag{77}$$

$$q_{1,1} = \frac{2qa}{\sqrt{2}}(-1 + i) \ , \tag{78}$$

$$q_{1,-1} = \frac{2qa}{\sqrt{2}}(1 + i) \ . \tag{79}$$

Dies ist der erste Satz nicht verschwindender Momente.

0.5 Punkte

Den Hinweisen auf dem Deckblatt entnehmen wir die Relation zwischen den sphärischen Multipolmomenten q_{1m} und dem Dipolmoment $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$

$$q_{1,0} = p_3 \ , \tag{80}$$

$$q_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-p_1 + \mathrm{i}p_2\right) \ , \tag{81}$$

$$q_{1,-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(p_1 + \mathrm{i}p_2\right) \ . \tag{82}$$

Dies formen wir um zu

$$p_3 = q_{1,0} \ , \tag{83}$$

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-q_{1,1} + q_{1,-1}\right) \ , \tag{84}$$

$$p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{i}} \left(q_{1,1} + q_{1,-1}\right) \tag{85}$$

und finden damit das Dipolmoment $\vec{p}$ in kartesischen Koordinaten

$$\vec{p} = 2qa(\hat{e}_x + \hat{e}_y) \ . \tag{86}$$

1.5 Punkte

Wir skizzieren die Richtung des Dipolmomentes in die Ladungsverteilung. Dies ist gezeigt in Abb. 1.

0.5 Punkte

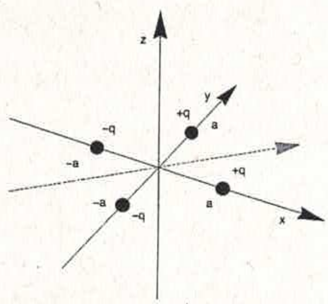

Abbildung 1

Aufgabe 4 *Relativistik* **8 Punkte**

a) **4 Punkte**

Die relativistische Bewegungsgleichung für das Teilchen mit Masse m und Ladung q im elektrischen Feld $\vec{E} = E\hat{e}_z$ lautet

$$m\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = \frac{q}{c} F^{\alpha\beta} u_\beta \ . \tag{87}$$

Mit der Vierergeschwindigkeit $u^\alpha = \gamma(c, \vec{v})$, $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}t$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ und τ ist die Eigenzeit des bewegten Systems mit $\mathrm{d}t = \gamma \mathrm{d}\tau$. Im Folgenden bezeichnen wir mit $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$. $F^{\alpha\beta}$ ist der elektromagnetische Feldstärketensor. Für konstantes elektrisches Feld $\vec{E} = E\hat{e}_z$ finden wir

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{88}$$

Damit ist die relativistische Bewegungsgleichung gegeben durch

$$m\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = \frac{q}{c}\begin{pmatrix} -Eu_3 \\ 0 \\ 0 \\ Eu_0 \end{pmatrix} = \frac{q}{c}\begin{pmatrix} Eu^3 \\ 0 \\ 0 \\ Eu^0 \end{pmatrix} . \tag{89}$$

1 Punkt

Also gilt es folgendes System gekoppelter Differentialgleichungen zu lösen

$$\dot{u}^0 = \frac{a}{c}u^3 \ , \dot{u}^1 = \dot{u}^2 = 0 \ , \dot{u}^3 = \frac{a}{c}\dot{u}^0 \ . \tag{90}$$

Wobei wir die Abkürzung $a = qE/m$ eingeführt haben. Wir schreiben die erste Gleichung mittels der letzten Gleichung um zu

$$\ddot{u}^0 - \frac{a^2}{c^2}u^0 = 0 \ . \tag{91}$$

1 Punkt

Eine allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist in den Hinweisen auf dem Aufgabenblatt angegeben. Damit finden wir

$$u^0(\tau) = C_1 \cosh\frac{a\tau}{c} + C_2 \sinh\frac{a\tau}{c} \ , \tag{92}$$

$$\Rightarrow u^3(\tau) = C_2 \cosh\frac{a\tau}{c} + C_1 \sinh\frac{a\tau}{c} \ . \tag{93}$$

Mit der Anfangsbedingung

$$u^\alpha(\tau = 0) = \begin{pmatrix} \gamma_0 c \\ \gamma_0 v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{94}$$

bestimmen wir schließlich die Konstanten und finden

$$u^\alpha(\tau) = \begin{pmatrix} \gamma_0 c \cosh\frac{a\tau}{c} \\ \gamma_0 v_0 \\ 0 \\ \gamma_0 c \sinh\frac{a\tau}{c} \end{pmatrix} . \tag{95}$$

1 Punkt

Die Bahn $x(\tau)$ finden wir durch nochmalige Integration unter der Anfangsbedingung $x(\tau = 0) = (0, 0, 0, 0)$

$$x^\alpha(\tau) = \begin{pmatrix} \gamma_0 \frac{c^2}{a} \sinh\frac{a\tau}{c} \\ \gamma_0 v_0 \tau \\ 0 \\ \gamma_0 \frac{c^2}{a}\left[\cosh\frac{a\tau}{c} - 1\right] \end{pmatrix} . \tag{96}$$

Setzen wir $x^1 = x = \gamma_0 v_0 \tau \Leftrightarrow \tau = x/(\gamma_0 v_0)$ in $x^3 = z$ finden wir

$$z(x) = \frac{\gamma_0 c^2}{a}\left[\cosh\frac{ax}{\gamma_0 v_0 c} - 1\right] . \tag{97}$$

1 Punkt

b)

4 Punkte

Betrachten wir zunächst einen Lorentz-Boost mit der Geschwindigkeit v_1 in die x_1 Richtung. Im geboosteten Bezugsystem lauten die Koordinaten

$$x_0' = \gamma_1(x_0 - \beta_1 x_1) , \tag{98}$$
$$x_1' = \gamma_1(x_1 - \beta_1 x_0) , \tag{99}$$

mit den Abkürzungen

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} , \tag{100}$$
$$\beta_1 = v_1/c , \tag{101}$$
$$x_0 = ct . \tag{102}$$

0.5 Punkte

Wir betrachten nun einen weiteren Lorentz-Boost mit der Geschwindigkeit v_2, so dass

$$x_0'' = \gamma_2(x_0' - \beta_2 x_1') , \tag{103}$$
$$x_1'' = \gamma_2(x_1' - \beta_2 x_0') \tag{104}$$

gilt. Drücken wir nun hier die gestrichenen Koordinaten durch die ursprünglichen ungestrichenen Koordinaten aus, finden wir

$$x_0'' = \gamma_2(\gamma_1(x_0 - \beta_1 x_1) - \beta_2\gamma_1(x_1 - \beta_1 x_0)) , \tag{105}$$
$$x_1'' = \gamma_2(\gamma_1(x_1 - \beta_1 x_0) - \beta_2\gamma_1(x_0 - \beta_1 x_1)) . \tag{106}$$

0.5 Punkte

Wir formen Gl. (106) ein wenig um zu

$$x_1'' = \gamma_2(\gamma_1(x_1 - \beta_1 x_0) - \beta_2\gamma_1(x_0 - \beta_1 x_1)) \tag{107}$$
$$= \gamma_2\gamma_1(x_1(1 + \beta_2\beta_1) - x_0(\beta_1 + \beta_2)) \tag{108}$$

Identifizieren wir diese zwei aufeinander folgenden Transformation mit $\gamma_{1,2}$ und $\beta_{1,2}$ mit einer einzelnen Transformation mit dem Boost-Faktoren γ und β, so muss gelten

$$x_0'' = \gamma(x_0 - \beta x_1) , \tag{109}$$
$$x_1'' = \gamma(x_1 - \beta x_0) . \tag{110}$$

Ein Koeffizientenvergleich von Gl (108) und (110) liefert zum Beispiel

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_2\beta_1) \tag{111}$$

2 Punkte

Also (beachte, dass im Folgenden $c \equiv 1$ gesetzt wird)

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2}}\frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2}}(1 + v_1 v_2) \tag{112}$$

Dies lässt sich nach v auflösen:

$$\frac{1}{1-v^2} = \frac{(1+v_1v_2)^2}{(1-v_1^2)(1-v_2^2)} \tag{113}$$

$$\Leftrightarrow\ 1-v^2 = \frac{(1-v_1^2)(1-v_2^2)}{(1+v_1v_2)^2} \tag{114}$$

$$\Leftrightarrow\ v^2 = 1-\frac{(1-v_1^2)(1-v_2^2)}{(1+v_1v_2)^2} \tag{115}$$

$$\Leftrightarrow\ v = \frac{\sqrt{(1+v_1v_2)^2-(1-v_1^2)(1-v_2^2)}}{1+v_1v_2} \tag{116}$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{v_1+v_2}{1-v_1v_2/c^2}\ \blacksquare \tag{117}$$

1 Punkt

Anmerkung: Bedenkt, dass die Addition der Geschwindigkeiten und damit die gesuchte Formel auch auf anderen Wegen gezeigt werden kann.