Aufgabe 1: Kurzfragen $\boxed{16\text{ P}}$

(a) $\boxed{3\text{ P}}$ Welches Grundprinzip steckt hinter der Kontinuitätsgleichung? Leiten Sie die Gleichung aus den kovarianten Maxwell-Gleichungen ab.

(b) $\boxed{3\text{ P}}$ Wie ist ein raumartiger und ein lichtartiger Vierer-Vektor definiert?

(c) $\boxed{3\text{ P}}$ Nennen Sie die definierende Eigenschaft einer Greensfunktion.

(d) $\boxed{4\text{ P}}$ Skizzieren Sie den Verlauf eines homogenen elektrischen Feldes welches von Luft mit einem Einfallswinkel $\alpha_0 = 45°$ in ein ebenes Medium mit $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ eindringt. Was passiert qualitativ mit den Tangential- und Parallelkomponenten des Feldes.
Hinweis:
Auf der Grenzfläche befinden sich keine Oberflächenladungen bzw Oberflächenströme.

(e) $\boxed{3\text{ P}}$ Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Begründen Sie. "Gegeben sei ein statisches elektrisches Feld. Die Bahnkurven geladener Testteilchen mit beliebigen Anfangsbedingungen stimmen immer mit den Feldlinien des elektrischen Feldes überein."

Aufgabe 2: Multipolentwicklung $\boxed{23\text{ P}}$

Zwei kreisförmige Drähte mit den Radien a und b ($a < b$) seien in der xy-Ebene um den Ursprung angeordnet. Auf diesen Kreisringen seien die Ladungen $+q$ (Ring mit Radius a) und $-q$ (Ring mit Radius b) homogen verteilt.

(a) $\boxed{7\text{ P}}$ Zeigen Sie, dass die Ladungsdichte gegeben ist durch

$$\rho(\vec{r}) = A\delta(r-a)\delta(\Theta - \tfrac{\pi}{2}) - B\delta(r-b)\delta(\Theta - \tfrac{\pi}{2}) \quad .$$

und bestimmen Sie die Koeffizienten A und B.
Hinweis:
Nutzen Sie Kugelkoordinaten und begründen Sie $\delta(z) = \frac{1}{r}\delta(\Theta - \frac{\pi}{2})$.
Die Dicke der Kreisringe sei vernachlässigbar.

(b) $\boxed{16\text{ P}}$
Bestimmen Sie die Multipolmomente q_{lm} der Ladungsverteilung bis einschließlich des Quadrupolterms $l = 2$.

Aufgabe 3: Platten $\boxed{22\ \text{P}}$

Ein mit Luft ($\varepsilon = \varepsilon_0$) gefüllter Plattenkondensator bestehe aus zwei kreisrunden Platten mit Radius a um die z-Achse mit Abstand $d \ll a$ zueinander (d. h., Randeffekte können vernachlässigt werden). Auf der unteren Platte ($z = -d/2$) sitzt die konstante Ladung $Q_1 = Q$ und auf der oberen Platte ($z = d/2$) $Q_2 = -Q_1$.

(a) $\boxed{6\ \text{P}}$ Zeigen Sie, dass das elektrische E-Feld des Kondensators zwischen den Platten gegeben ist durch:

$$\vec{E} = \frac{Q}{\pi \varepsilon_0 a^2} \hat{z}$$

(b) $\boxed{16\ \text{P}}$ Der Plattenkondensator wird nun an eine Wechselspannungsquelle angeschlossen, sodass sich auf der unteren Platte die Ladung $Q_1(t) = Q_0 \cos(\omega t)$ befindet (mit $Q_0 > 0$). Berechnen Sie in der quasistationären Näherung das elektrische Feld zwischen den Platten, daraus mittels der Maxwell-Gleichungen das magnetische Feld und schließlich den Energiestrom durch die Mantelfläche des Zylinders, der von den beiden Platten aufgespannt wird.

Aufgabe 4: Geboostete Wellen $\boxed{24\ \text{P}}$

In einem Inertialsystem S im quellfreien Raum wird eine elektromagnetische Strahlung mit

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = E_0 \hat{x} \sin(k \cdot x) ,$$

beobachtet, wobei $k^\mu = (\omega/c, 0, k, 0)$, $x^\mu = (ct, \vec{x})$.

(a) $\boxed{9\text{P}}$ Zeigen Sie, dass das zugehörige B-Feld durch

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = B_0 \hat{z} \sin(k \cdot x) ,$$

gegeben ist. Bestimmen Sie B_0.

(b) Ein zweiter Beobachter bewegt sich mit einem System S' parallel zur y–Achse von S mit der Geschwindigkeit $v > 0$ und misst die elektromagnetischen Felder $\vec{E}'$ und $\vec{B}'$.

(i) $\boxed{9\ \text{P}}$ Bestimmen Sie $\vec{E}'$ und $\vec{B}'$ in S'.

(ii) $\boxed{6\ \text{P}}$ Drücken Sie das Quadrat des Feldstärketensors $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus.

Aufgabe 5: Relativistische Kinematik $\boxed{15\ \mathrm{P}}$

(a) $\boxed{6\mathrm{P}}$ Untersuchen Sie, ob der Zerfall eines Photons mit Energie E_γ (Masse $m_\gamma = 0$) in ein Elektron Positron-Paar, welche jeweils die Masse m_e besitzen, kinematisch erlaubt ist.

(b) $\boxed{9\mathrm{P}}$ Betrachten Sie nun den Stoß eines Photons mit Viererimpuls $k^\mu = \left(E_\gamma/c, \vec{k}\right)$ und eines Elektrons mit Viererimpuls $p^\mu = (E_e/c, \vec{p})$ im Schwerpunktsystem S, welches wie folgt definiert ist:

$$p^\mu + k^\mu = \left(E_S/c, \vec{0}\right) .$$

Bestimmen Sie die Energie des Photons E_γ und die Energie des Elektrons E_e in diesem Intertialsystem als Funktion von E_S und m_e.

Formelsammlung:

- Kugelflächenfunktionen:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} , \qquad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\Theta , \qquad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\Theta e^{i\varphi}$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2}\cos^2\Theta - \frac{1}{2}\right) , Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\Theta \cos\Theta e^{i\varphi} , Y_{22} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\Theta e$$

$$Y_{l,-m} = (-1)^m Y^*_{lm} .$$

Transformation von $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld:

$$\vec{E} \to \gamma\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{E}\right)\vec{\beta} ,$$

$$\vec{B} \to \gamma\left(\vec{B} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{B}\right)\vec{\beta} .$$