Karlsruher Institut für Technologie **Prof. Dr. M. Steinhauser**
Institut für Theoretische Teilchenphysik **Dr. M. Fael, Dr. V. Shtabovenko**

Klausur zur Vorlesung
Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)
18. Februar 2022

Vorname: ______________________________

Nachname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Übungsgruppe: ______________________________

Aufgabe:	1	2	3	4	Summe
Punkte:	10	10	10	10	40
Erhalten:					

- Schreiben Sie Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer** auf dieses Blatt und auf **jedes weitere Blatt**, welches Sie abgeben möchten.
- Als **einziges Hilfsmittel** ist ein eigenhändig beschriebenes DIN A4 Blatt zugelassen.
- Die Lösungen müssen detailliert und leserlich geschrieben sein.
- Diese Klausur umfasst **4 Aufgaben**. Die maximal erreichbare Punktzahl beträgt **40 Punkte**.
- Auf der letzten Seite befindet sich eine kleine **Formelsammlung**.
- Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.
- Bei Klausurende bitte **alle** Blätter abgeben — auch das Aufgabenblatt.
- Weiterführende Informationen zu den Klausurergebnissen und der Klausureinsicht werden voraussichtlich am **23.02.2022** auf der **ILIAS-Seite** zur Vorlesung veröffentlicht.
- Die Klausureinsicht findet voraussichtlich am **25.02.2022** statt.

Aufgabe 1: Kurzaufgaben .... *10 Punkte*

(a) (2P) Berechnen Sie $(\partial/\partial x^\mu)(1/x^2)$, wobei x der 4-Ortsvektor ist.

(b) (2P) Gegeben sei eine skalare Funktion $f(\vec{r}) = \sin(|\vec{r}|)$. Berechnen Sie $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r})$.

(c) (2P) Geben Sie die Lorentz-Transformation $\Lambda^\mu{}_\nu$ für eine Spiegelung am Koordinatenursprung (3D) an.

(d) (2P) $\vec{p}$ sei das elektrische Dipolmoment in einem Koordinatensystem K. Geben Sie $\vec{p}$ in K' an, das gegenüber K um 90 Grad um die x-Achse gedreht ist.

(e) (2P) Vereinfachen Sie den Ausdruck $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$, wobei das Ergebnis aus zwei Termen bestehen und den Vektor $(\vec{a} \times \vec{b})$ beinhalten sollte. Bei $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ handelt es sich um gewöhnliche 3-Vektoren.

Aufgabe 2: Elektromagnetische Wellen .... *10 Punkte*

Eine elektromagnetische Welle breitet sich in $\vec{k}$-Richtung aus. Das $\vec{B}$-Feld ist gegeben durch

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\,.$$

(a) (2P) Zeigen Sie, dass $\vec{k}$ senkrecht auf $\vec{B}$ steht. Berechnen Sie außerdem $\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t)$.

(b) (4P) Geben Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ an.
Hinweis: Beim Lösen der Differentialgleichung darf die Integrationskonstante o. B. d. A. Null gewählt werden.

(c) (4P) Sei $\varphi(\vec{r}, t) = 0$. Bestimmen Sie das zugehörige Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Was folgt für die ortsabhängige Integrationskonstante $\vec{c}_0(\vec{r})$ aus $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$? Wie muss $\vec{c}_0(\vec{r})$ gewählt werden, damit $\vec{A}$ die Lorenz-Eichung erfüllt?

Aufgabe 3: Magnetfeld und Plattenkondensator .... *10 Punkte*

Ein Plattenkondensator mit der Kapazität C wird langsam über einen Widerstand R entladen, wobei die Zeitabhängigkeit der Ladung Q auf den Platten gegeben ist durch

$$Q(t) = Q_0 \exp(-t/(RC))\,.$$

Dabei sind die Anfangsladungen auf den Platten Q_0 und $-Q_0$, wobei die Platten sind um die z-Achse zentriert sind.

(a) (2P) Berechnen Sie das elektrische Feld unter der Annahme, dass Sie die Formeln der Elektrostatik verwenden dürfen (“langsame Entladung”)

(b) (4P) Zeigen Sie mithilfe der Maxwell-Gleichungen und Symmetrieüberlegungen, dass das B-Feld nur eine Komponente in die ϕ-Richtung haben darf.

(c) (4P) Berechnen Sie $\vec{B}(\vec{r}, t)$ aus der Rotation der magnetischen Induktion, indem Sie die zugehörige Differentialgleichung lösen.

Bitte wenden →

Aufgabe 4: Greensche Funktion .... *10 Punkte*

Gegeben sei eine im Ursprung zentrierte geerdete Metallkugel von Radius R. Am Ort $(0,0,a)$ befindet sich eine Punktladung q, wobei $R < a$ gilt. Die Greensche Funktion für die Kugelgeometrie lautet

$$4\pi\varepsilon_0 G_D(\vec{r},\vec{r}\,') = |\vec{r}\,' - \vec{r}|^{-1} - \left|\frac{r'}{R}\vec{r} - \frac{R}{r'}\vec{r}\,'\right|^{-1} .$$

Als Randbedingung fordern wir das Verschwinden des Potentials $\varphi(\vec{r})$ auf der Kugeloberfläche.

(a) (3P) Bestimmen Sie $\varphi(\vec{r})$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne von Spiegelladungen. An welchen Orten gibt es Bildladungen und wie sind sie geladen?

(b) (3P) Wenden Sie das Konzept der Bildladungen an, um die gesamte von der Punktladung q influenzierte Flächenladung $\tilde{q}$ anzugeben. Berechnen Sie auch die Kraft $\vec{F}$, mit der die Punktladung von der Metallkugel angezogen wird.
Hinweis: Für diese Teilaufgabe müssen keinerlei Integrale berechnet werden.

(c) (4P) Berechnen Sie die auf der Oberfläche influenzierte Flächenladungsdichte $\sigma(\vartheta)$.
Zur Kontrolle:

$$\sigma(\vartheta) = \frac{q}{4\pi}\frac{R^2 - a^2}{R(a^2 - 2aR\cos\vartheta + R^2)^{3/2}}$$

Nützliche Formeln

- Eigenschaften des Levi-Civita-Tensors
$$\sum_{i=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{iln}=\delta_{jl}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{kl},\quad \sum_{i,j=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl}=2\delta_{kl}.$$
- Nabla in Zylinderkoordinaten (ρ,ϑ,z)
$$\begin{aligned}\vec{\nabla}&=\vec{e}_\rho\partial_\rho+\frac{1}{\rho}\vec{e}_\phi\partial_\phi+\vec{e}_z\partial_z,\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{V}(\vec{r})&=\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho V_\rho)+\frac{1}{\rho}\partial_\phi V_\phi+\partial_z V_z,\\ \vec{\nabla}\times\vec{V}(\vec{r})&=\left(\frac{1}{\rho}\partial_\phi V_z-\partial_z V_\phi\right)\vec{e}_\rho+(\partial_z V_\rho-\partial_\rho V_z)\vec{e}_\phi+\frac{1}{\rho}\left(\partial_\rho(\rho V_\phi)-\partial_\phi V_\rho\right)\vec{e}_z,\\ \vec{\nabla}^2 f(\vec{r})&=\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho f\right)+\frac{1}{\rho^2}\partial_\phi^2 f+\partial_z^2 f.\end{aligned}$$
- Nabla in Kugelkoordinaten (r,ϑ,ϕ)
$$\begin{aligned}\vec{\nabla}&=\vec{e}_r\partial_r+\frac{1}{r}\vec{e}_\vartheta\partial_\vartheta+\frac{1}{r\sin\vartheta}\vec{e}_\phi\partial_\phi,\\ \vec{\nabla}^2 f(\vec{r})&=\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r f)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta\,\partial_\vartheta f)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\partial_\phi^2 f.\end{aligned}$$
- Elektrostatisches Potential aus der Greenschen Funktion
$$\varphi(\vec{r})=\int_V \mathrm{d}^3r'\rho(\vec{r}')G(\vec{r},\vec{r}')-\varepsilon_0\int_{S(V)}\mathrm{d}f'\left(\varphi(\vec{r}')\frac{\partial G}{\partial n'}-G(\vec{r},\vec{r}')\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right).$$
- Rotation in zwei Dimensionen um den Winkel α
$$R=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$
- Maxwell-Gleichungen
$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}&=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\\ \vec{\nabla}\times\vec{E}&=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$
- Statisches elektrisches Feld in einem Plattenkondensator mit Kapazität C, Plattenabstand d und Ladung Q
$$|\vec{E}|=\frac{U}{d}=\frac{Q}{Cd}.$$
- Influenzierte Flächenladung auf der Fläche F
$$\tilde{q}=\int_F df\sigma=\int_F df\,\varepsilon_0\vec{n}\cdot\vec{E}(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in F}.$$
- Vektorpotential in kovarianter Schreibweise
$$A^\mu=\left(\frac{\varphi}{c},\vec{A}\right)^T.$$
- Lorenz-Eichung
$$\partial_\mu A^\mu=0.$$