

Aufgabe 1

$$a) \partial_\mu \frac{1}{x^2} = \left[\frac{1}{x^2} \right]^2 \underbrace{\partial_\mu x^2}_{2x_\mu} = -\frac{2x_\mu}{[x^2]^2}$$

$$b) \vec{\nabla}^2 \sin(r) = \frac{2 \cos(r)}{r} - \sin(r)$$

$$c) \Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad x^\mu = (ct, \vec{x})$$
$$\Lambda^\mu_\nu x^\nu = (ct, -\vec{x})$$

$$d) R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ -p_z \\ p_y \end{pmatrix}$$

$$e) (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \varepsilon_{ijk} (\vec{a} \times \vec{b})_j \varepsilon_{klm} c_l d_m$$
$$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) (\vec{a} \times \vec{b})_j c_l d_m$$
$$= \vec{c} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d} - \vec{d} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Aufgabe 2

a) Aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ folgt

$$-\vec{B}_0 \cdot \vec{k} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = 0 \Rightarrow \vec{B}_0 \cdot \vec{k} = 0$$

somit gilt $\vec{k} \cdot \vec{B} \sim \vec{B}_0 \cdot \vec{k} = 0$

$$\text{Dann: } \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{k} \times \vec{B}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$\textcircled{a} \text{ Benutze } \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} \int d\vec{E} = \int_{t_0}^t dt' \vec{\nabla} \times \vec{B} = \left[-\frac{\vec{k} \times \vec{B}_0}{\omega} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t') \right]_{t_0}^t$$

$$\Rightarrow \vec{E}(t) = -c^2 \frac{\vec{k} \times \vec{B}_0}{\omega} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$c = \omega/k \quad - \omega \frac{\vec{k} \times \vec{B}_0}{k^2} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$

$$\text{c) Es gilt } \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Mit $\varphi = 0$ hat man $\vec{A}(\vec{r}, t)$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \Rightarrow \int_{\vec{A}(\vec{r}_0, t_0)}^{\vec{A}(\vec{r}, t)} d\vec{A} = - \int_{t_0}^t dt' \vec{E}(\vec{r}, t')$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = - \frac{\vec{k} \times \vec{B}_0}{k^2} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + \vec{C}_0(\vec{r})$$

$$\text{Aus } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = - \underbrace{\frac{\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{B}_0)}{k^2}}_{\vec{B}_0, \text{ da } \vec{k} \perp \vec{B}_0} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + \vec{\nabla} \times \vec{C}_0(\vec{r}) \quad \text{folgt } \vec{\nabla} \times \vec{C}_0(\vec{r}) = 0.$$

$\vec{C}_0$ wirbelfrei $\Rightarrow$ es muss ein Gradientenfeld sein
d.h. $\vec{C}_0(\vec{r}) = \vec{\nabla} \varphi_0(\vec{r})$

$$\text{Lorenz-Eichung: } \underbrace{\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}}_{=0} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}^2 \varphi_0(\vec{r}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{C}_0(\vec{r}) = 0$$

$\Rightarrow$ Jede Wahl

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r}, t) = 0 \\ \vec{A} = - \frac{\vec{k} \times \vec{B}_0}{k^2} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + \vec{\nabla} \varphi_0(\vec{r}) \end{cases}$$

mit $\vec{\nabla}^2 \varphi_0(\vec{r}) = 0$ erfüllt die Lorenz-Eichung.

Aufgabe 3

a) Langsame Entladung $\Rightarrow \vec{E}(t) = E(t) \vec{e}_z$

$$E(t) = \frac{Q(t)}{Cd} = \frac{Q_0}{Cd} e^{-\frac{t}{RC}}$$

b) MG: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}(t)}{dt} \sim \vec{e}_z$

Symmetrieüberlegungen:

- keine z-Komponente wegen $\vec{\nabla} \times \vec{B} \parallel \vec{e}_z$
- Zylindersymmetrie: kein z- oder φ -Abh.

• 2. MG $0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \int_V d\vec{f} \cdot \vec{B} \Rightarrow B_r = 0$

$$\Rightarrow \vec{B}(r, t) = B_\phi(r, t) \vec{e}_\phi$$

c) Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\frac{1}{r} (\partial_r (r B_\phi(r, t))) \vec{e}_z = \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \frac{dE(t)}{dt}}_{\equiv \mathcal{K}, \text{ hängt nicht v. } r \text{ ab!}} \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \partial_r (r B_\phi(r, t)) = r \mathcal{K}$$

$$\Rightarrow B_\phi = - \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2} \frac{Q_0}{RC^2} \frac{r}{d} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Aufgabe 4-

a) Die Kugel ist geerdet, d.h. $\varphi|_{|\vec{r}|=R} = 0$

G_D erfüllt $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ f. $|\vec{r}'| = R$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \int_V d^3r' \rho(r') G_D(\vec{r}, \vec{r}')$$

$$\rho(\vec{r}') = q \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{a}), \quad \vec{a} = (0, 0, a)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}') &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{a}) \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{\left| \frac{R}{a} \vec{r}' - \frac{R}{a} \vec{r} \right|} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{r} - \vec{a}|} - \frac{q \frac{R}{a}}{\left| \vec{r} - \frac{R^2}{a^2} \vec{a} \right|} \right) \end{aligned}$$

Interpretation: Ladung q bei $\vec{a}$,

Bildladung $-q \frac{R}{a}$ bei $\frac{R^2}{a^2} \vec{a}$

b) $\tilde{q}$ muss gleich

der fiktiven Bildladung aus a) sein,

d.h.
$$\tilde{q} = -q \frac{R}{a}$$

Betrachte
die Kraft zw. der Bildladung $\tilde{q}$ und q
 $\tilde{q}$ befindet sich bei $\frac{R^2}{a^2} \vec{a}$

$$\vec{F} = q \vec{E}(\vec{r} = \vec{a}) \quad \begin{array}{c} \tilde{q} = -q \frac{R}{a} \quad q \\ \text{---} \frac{R^2/a}{a} \rightarrow z \end{array}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \tilde{q}}{|\vec{a} - \frac{R^2}{a^2} \vec{a}|^3} \left(\vec{a} - \frac{R^2}{a^2} \vec{a} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \tilde{q} a^2}{(a^2 - R^2)^2} \vec{e}_z = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R a}{(a^2 - R^2)^2} \vec{e}_z$$

c) Influenzierte Flächenladungsdichte

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{n} \cdot \vec{E} \Big|_{r=R} = -\epsilon_0 \vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \Big|_{r=R}$$

$$= -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

wähle $\vec{r} \cdot \vec{a} = r a \cos \vartheta$

$$= - \frac{q}{4\pi} \left(\partial_r \frac{1}{(r^2 - 2ar \cos \vartheta + a^2)^{1/2}} - \frac{R}{a} \partial_r \frac{1}{(r^2 - 2 \frac{R^2}{a^2} r a \cos \vartheta + \frac{R^4}{a^2})^{1/2}} \right) \Big|_{r=R}$$

$$= \dots = - \frac{q}{4\pi} \frac{a^2 - R^2}{R(a^2 - 2aR \cos \vartheta + R^2)^{3/2}}$$