Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Prof. Dr. K. Melnikov 28.02.2023 14:00 - 16:00 Uhr

Klausur zur Vorlesung

- *Tragen Sie bitte Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf dem Deckblatt und auf jedes von Ihnen beschriebene Blatt ein. Nummerieren Sie Ihre Blätter fortlaufend durch.*
- *Was nicht bewertet werden soll, ist deutlich durchzustreichen.*
- *Die Titelseite und Klausuraufgaben sind nach Beendigung der Klausur mit abzugeben.*

Vorname: ____________________ Nachname: ____________________

Matrikelnummer: ____

Anzahl Lösungsblätter: ____

- *Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.*
- *Verwenden Sie nur ausgegebenes Papier. Falls Sie mehr Papier benötigen melden Sie sich.*
- *Bearbeiten jede neue Aufgabe auf einem neuen Blatt.*
- *Verwenden Sie weder Bleistifte noch rote oder grüne Stifte.*
- *Am Ende der Klausuraufgaben finden Sie eine kurze mathematische Formelsammlung. Die Benutzung anderer Hilfsmittel ist nicht gestattet.*
- *Wer zur Toilette geht, gibt das Aufgabenblatt samt Lösungen beim Aufsichtspersonal ab und erhält anschliessend alles zurück.*
- *Sie dürfen Ihre Klausur bis 20 Minuten vor Ende der Bearbeitungszeit abgeben. Falls Sie innerhalb der letzten 20 Minuten fertig werden sollten, bleiben Sie bitte bis zum Ende der Bearbeitungszeit an Ihrem Platz sitzen.*

Wir wünschen viel Erfolg!

Bitte auf dieser Seite ab hier nichts mehr ausfüllen!

Aufgabe	1)	2)	3)	4)	Summe
Punkte	/25	/25	/25	/25	/100
Kürzel					

Aufgabe 1: Kurze Aufgaben (25 Punkte)

(a) [3pt] Ein reiner elektrischer Dipol mit Dipolmoment $\vec{p} = p\vec{e}_z$ befindet sich im Ursprung eines Kartesischen Koordinatensystems. Am Punkt $P = (0, 0, a)$ wird das Potential V_P gemessen. Am Punkt $Q = (0, 0, 3a)$ wird das Potential $V_Q = kV_P$ gemessen. Bestimmen Sie die Konstante k.

(b) [3pt] Eine elektrische Ladung q befindet sich in einer Entfernung $\vec{d} = (0, 0, d)$ oberhalb einer unendlichen geerdeten und leitenden Ebene, $V = 0$. Welche Kraft wirkt auf die Ladung?

(c) [2pt] Betrachten Sie eine Punktladung q und eine dazu konzentrische kugelförmige Gauß'sche Oberfläche mit Radius r. Erklären Sie, wie sich der Fluß des elektrischen Felds durch die Oberfläche verändert wenn Sie den Radius verdoppeln.

(d) [2pt] Berechnen Sie den Gradienten $\vec{\nabla} r^2$.

(e) [4pt] Zeigen Sie, ob es sich bei dem folgenden Feld um ein gültiges *elektrostatisches* Feld handelt,

$$\vec{E} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{\Omega}) \,, \tag{1.1}$$

wobei $\vec{\Omega}$ parallel zur z-Achse ist, $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$, mit Ω eine Konstante.

(f) [3pt] Die Wellengleichung ist gegeben durch,

$$\Big(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big) E(ct, x) = 0 \,. \tag{1.2}$$

Schreiben Sie die *allgemeine* Lösung zu dieser Gleichung hin.

(g) [4pt] Ein Plattenkondensator besteht aus zwei metallischen Flächen der Fläche $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$, die sich in einer Entfernung $d = d_1 + d_2$ voneinander befinden. Der Plattenkondensator ist gefüllt mit zwei Dielektrika mit dielektrischen Konstanten ϵ_1 und ϵ_2. Bestimmen Sie die Kapazität der zwei Konfigurationen in Abbildung 1. Vernachlässigen Sie Randeffekte.

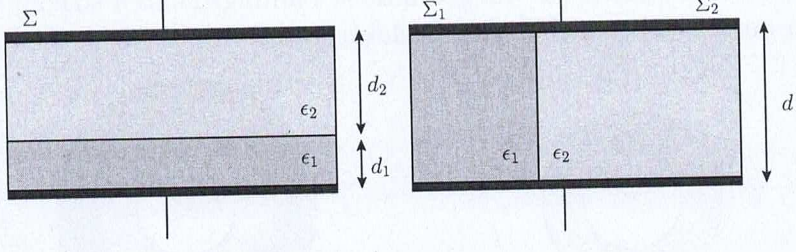

Abbildung 1: Plattenkondensatoren

(h) [4pt] Bestimmen Sie den Widerstand zwischen den Punkten A und B im Stromkreis in Abbildung 2.

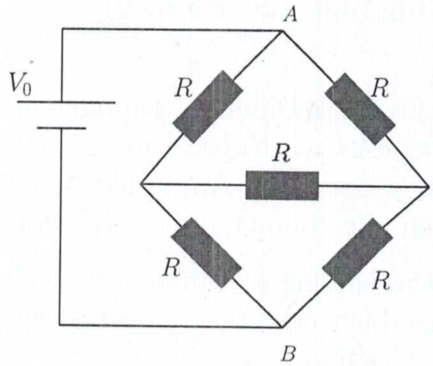

Abbildung 2: Stromkreis

Aufgabe 2: Geladene Hohlkugel (25 Punkte)

Eine Hohlkugel trägt die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & , r < a \\ \frac{k}{r^3} & , a \leq r \leq b \ , \\ 0 & , b < r \end{cases} \tag{2.1}$$

wobei k eine Konstante ist und $r = |\vec{r}|$. Siehe Abbildung 3 (links).

(a) [5pt] Berechnen Sie das elektrische Feld in den drei Gebieten, (i) $r < a$, (ii) $a \leq r \leq b$ und (iii) $b < r$.

(b) [5pt] Bestimmen Sie das Potenzial im Zentrum des Hohlraums.

(c) [5pt] Berechnen Sie die Energie außerhalb der Hohlkugel, $r > b$.

Wir beschichten die Außenseite der Hohlkugel, bis zum Radius $c > b$, mit einem linearen Dielektrikum, das eine Dielektrizitätskonstante ϵ hat. Siehe Abbildung 3 (rechts).

(d) [5pt] Bestimmen Sie erneut das elektrische Feld außerhalb der Hohlkugel, $r > b$.

(e) [5pt] Die Polarisierung eines linearen Dielektrikums ist durch $\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E}$ gegeben. Berechnen Sie die gebundene Ladungsdichten sowohl innerhalb als auch an den Oberflächen des Dielektrikums.

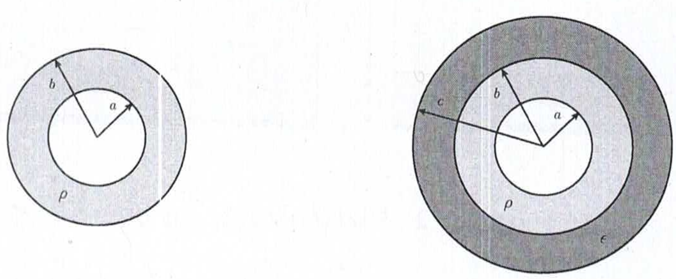

Abbildung 3: Geladene Hohlkugel. Ohne Dielektrikum (links) für Aufgaben (a) - (c) und mit Dielektrikum (rechts) für Aufgaben (d) - (e).

Aufgabe 3: Strompuls und induzierter Strom (25 Punkte)

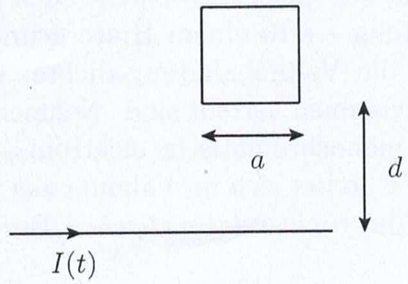

Abbildung 4: Ein unendlich langer Draht und eine quadratische Drahtschleife.

Ein unendlicher gerader Draht erhält einen plötzlichen Strompuls,

$$I(t) = q_0 \delta(t) \,, \tag{3.1}$$

und ist elektrisch neutral. Eine geschlossene Drahtschleife wird im Abstand d zum unendlich langen Draht gelegt, siehe Abbildung 4. Die Schleife hat die Form eines Quadrats mit Seitenlänge a und Widerstand R.

(a) [2pt] Wie lange dauert es bis sich der Fluss durch die Schleife durch den Strompuls ändert?

(b) [8pt] Zeigen Sie, dass das erzeugte Vektorpotential des unendlichen Drahts durch

$$\vec{A}(\rho, t) = \frac{\mu_0 q_0 c}{2\pi} \vec{e}_z \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c^2t^2-\rho^2}} & , ct > \rho \,, \\ 0 & , ct < \rho \,, \end{cases} \tag{3.2}$$

gegeben ist.

(c) [4pt] Berechnen Sie das elektrische und magnetische Feld.

(d) [4pt] Was ist der Fluss des magnetischen Felds durch die Schleife für $ct > d + a$?

(e) [4pt] Bestimmen Sie den in der Schleife induzierten Strom für $ct > d + a$.

(f) [3pt] Berechnen Sie den Betrag der magnetischen Kraft auf die Schleife für $ct > d + a$.

Aufgabe 4: Plasma (25 Punkte)

Ein "dünnes Plasma" besteht aus *nicht-wechselwirkenden* freien elektrischen Ladungen der Masse m und Ladung $-e$ in einem Hintergrund aus *starren* Ionen mit Ladungen $q = +e$. Sei n die Volumenladungsdichte, wobei die Ladungen gleichmäßig über das gesamte Volumen verteilt sind. Nehmen Sie an, dass das Plasma insgesamt *neutral* ist. Eine monochromatische elektromagnetische ebene Welle mit Frequenz ω und Wellenzahl k breitet sich im Vakuum aus und trifft auf das Plasma. Im Folgenden arbeiten wir im *nicht-relativistischen* Bereich ($\dot{\vec{x}} \ll c$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist).

(a) [5pt] Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für eine einzelne Ladung an der Position $\vec{x}$ auf. Wieso ist der Beitrag des *magnetischen* Feldes in der Bewegungsgleichung vernachläßigbar?

(b) [6pt] Zeigen Sie mithilfe Ihres Resultats aus Teil (a) und dem Ohm'schen Gesetz,

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}\,, \tag{4.1}$$

wobei $\vec{J}$ die Stromdichte bezeichnet, dass die Leitfähigkeit σ des Plasmas als Funktion von ω gegeben ist als,

$$\sigma = \frac{-ne^2}{im\omega}\,. \tag{4.2}$$

Nehmen Sie an, dass der Beitrag der Ionen zur Leitfähigkeit vernachlässigbar ist. Wieso können Sie konstante Beträge zur Geschwindigkeit vernachläßigen?

(c) [6pt] Finden Sie mithilfe der Maxwell Gleichungen die Beziehung zwischen k und ω.

(d) [4pt] Bestimmen Sie den Brechungsindex als Funktion von ω. Definieren Sie dabei die Plasmafrequenz als $\omega_p^2 = ne^2/(\epsilon_0 m)$.

(e) [4pt] Sei $\omega < \omega_p$. Welche Bedeutung hat das für die Ausbreitung der Welle innerhalb des Plasmas?

Nützliche Formeln

Vektoranalysis

$$\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{u}) = \vec{v}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right) - \vec{u}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\right) + \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{v} - \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{u}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{\nabla}^2\vec{v}$$

Dirac'sche Deltafunktion

$$\delta\left(a - f(x)\right) = \sum_i \frac{\delta\left(x - x_i^\star\right)}{|f'(x_i^\star)|}, \quad \text{wobei } f(x_i^\star) = a \text{ und } f'(x_i^\star) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_i^\star}$$

Sphärische Koordinaten

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{l} &= \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\vec{e}_\phi \\
\mathrm{d}^3r &= r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{e}_\phi \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta v_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} \\
\vec{\nabla} \times \vec{v} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta\, v_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right)\vec{e}_r \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(r v_\phi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\phi \\
\vec{\nabla}^2 f &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) \\
&\quad + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}
\end{aligned}$$

Kartesische Koordinaten

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{l} &= \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z \\
\mathrm{d}^3r &= \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla} \times \vec{v} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y \\
&\quad + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z \\
\vec{\nabla}^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{l} &= \mathrm{d}\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\phi\,\vec{e}_\phi + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z \\
\mathrm{d}^3r &= \rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z \\
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla} \times \vec{v} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right)\vec{e}_\phi \\
&\quad + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial\rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial\phi}\right)\vec{e}_z \\
\vec{\nabla}^2 f &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}$$