Aufgabe 1: Kurze Aufgaben (25 Punkte)

(a) [3pt] Was ist die Kapazität von zwei konzentrischen metallischen Kugelschallen mit Radien a und b?

(b) [1pt] Nehmen Sie an, das elektrostatische Potential sei Null an einem Punkt P im Raum. Können Sie, wenn überhaupt, etwas über das elektrische Feld am Punkt P ableiten?

(c) [3pt] Eine Punktladung q befindet sich in einer Entfernung a oberhalb einer unendlichen geerdeten und leitenden Ebene (siehe Abbildung 1). Sei $\vec{E} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y$ das elektrische Feld an einem Punkt $P = (b, a, 0)$. Bestimmen Sie E_x und E_y.

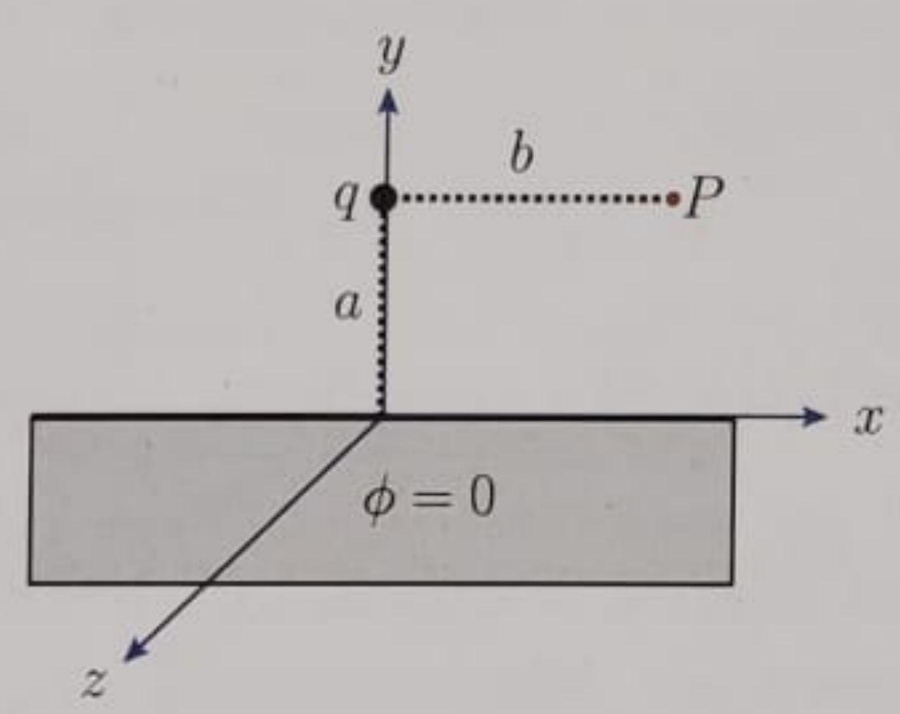

Abbildung 1: Eine Punktladung q befindet sich eine Distanz a oberhalb eines unendlichen Leiters, mit $P = (b, a, 0)$.

7

(d) [3pt] Eine Batterie mit elektromotischer Kraft $\mathcal{E}$ wird zur Zeit $t = 0$ durch einen Schalter mit einem Stromkreis verbunden. Der Stromkreis besteht aus einem Widerstand R und einem Kondensator C (siehe Abbildung 2). Der Kondensator ist zur Zeit $t = 0$ vollständig entladen. Berechnen Sie die Ladung $Q(t)$ des Kondensators.

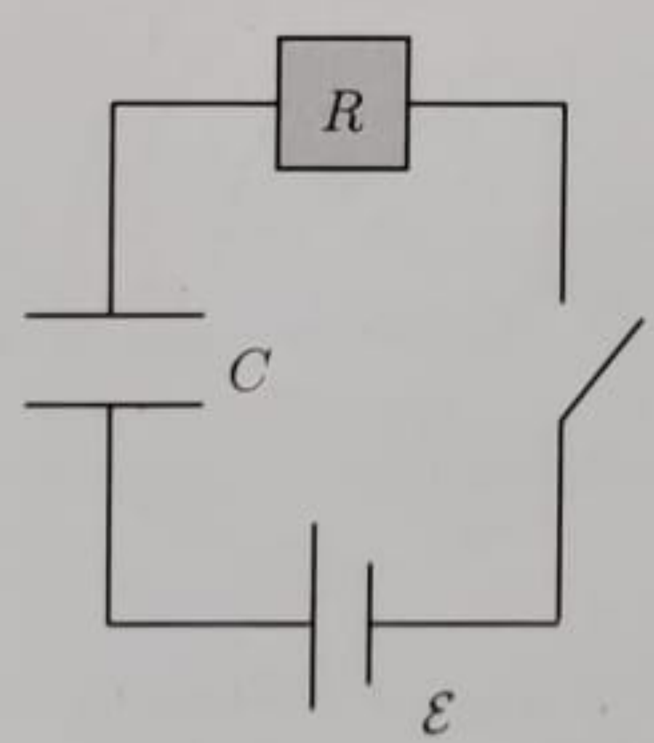

Abbildung 2: RC Stromkreis: Reihenschaltung eines Kondensators C mit einem Widerstand R und einer Batterie.

?

(e) [2pt] Ein Teilchen mit der Ladung q bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_y$, $v > 0$ und tritt in ein Gebiet mit einem gleichförmigen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$, $B > 0$ ein. Dies führt zu einer Auslenkung in **negativer** x-Richtung. Ist das Teilchen positiv oder negativ geladen, und welche Arbeit wird für die Auslenkung geleistet?

?

(f) [3pt] Gegeben sei das Vektorpotential $\vec{A} = k\vec{e}_\phi$ in zylindrischen Koordinaten, mit k eine Konstante. Bestimmen Sie das Magnetfeld und die damit verbundene Stromdichte.

(g) [4pt] Welche der folgenden zwei Funktionen,

i) $f(z,t) = A\sin(kz)\sinh(kct)$,

ii) $g(z,t) = A\sin(kz)\cos(kct)$,

sind mögliche Lösungen der Wellengleichung,

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u(z,t) = 0\,? \tag{1.1}$$

Hierin sind c die Lichtgeschwindigkeit, k der Wellenvektor und A eine Konstante.

(h) [3pt] Seien $\vec{E}$ und $\vec{E}'$ zwei monochromatische ebene Wellen, die sich in z-Richtung bewegen, mit Amplituden $\vec{E}_0$ und $\vec{E}'_0 = 2\vec{E}_0$. Seien U und $U' = kU$ die in den Wellen $\vec{E}$ und $\vec{E}'$ gespeicherten Energien. Bestimmen Sie die Konstante k.

(i) [3pt] Betrachten Sie die Stromschleife in Abbildung 3 mit einem stationären Strom I wie abgebildet. Was ist der Beitrag der Seiten a und b zum Magnetfeld $\vec{B}$ am Punkt P? Begründen Sie Ihre Antwort. **Es ist keine Integration erforderlich.**

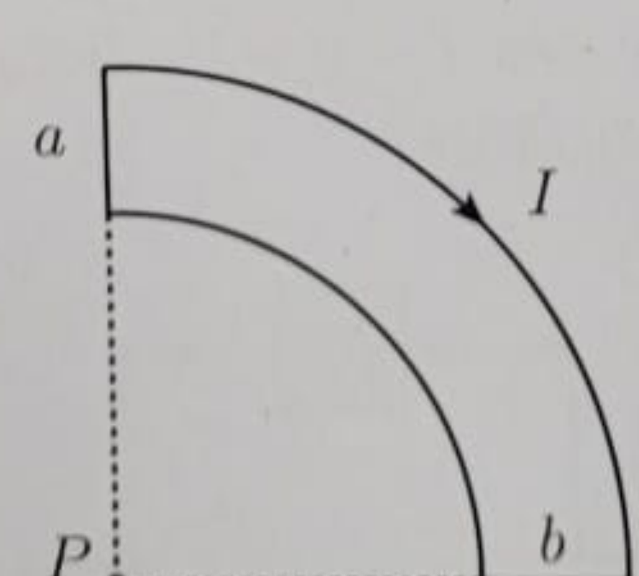

Abbildung 3: Stromschleife mit geraden Seiten a und b.

Aufgabe 2: Zylindrische Hülle (25 Punkte)

Eine unendlich lange zylindrische Hülle mit innerem Radius a und äusserem Radius b trägt die Ladungsdichte,

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & , s < a\,, \\ ks & , a \leq s \leq b\,, \\ 0 & , b < s\,. \end{cases} \tag{2.1}$$

Hierin sind k eine Konstante und s die radiale Komponente in zylindrischen Koordinaten. Siehe Abbildung 4.

(a) [5pt] Berechnen Sie das elektrische Feld in den drei Gebieten, (i) $s < a$, (ii) $a \leq s \leq b$ und (iii) $b < s$.

(b) [5pt] Bestimmen Sie die Potentialdifferenz zwischen der inneren und äusseren Oberfläche des Zylinders.

(c) [5pt] Berechnen Sie die gespeicherte Energie pro Längeneinheit L im Gebiet $a \leq s \leq b$.

Statt einer Verteilung von freien Ladungen, trägt der Zylinder nun eine feste Magnetisierung,

$$\vec{M} = ks\,\vec{e}_z\,, \quad a \leq s \leq b\,. \tag{2.2}$$

(d) [5pt] Berechnen Sie die gebundene Volumen- und Oberflächenstromdichte. Zeigen Sie explizit, dass der gesamte gebundene Strom verschwindet.

(e) [5pt] Berechnen Sie das magnetische Feld in den drei Gebieten, (i) $s < a$, (ii) $a \leq s \leq b$ und (iii) $b < s$.

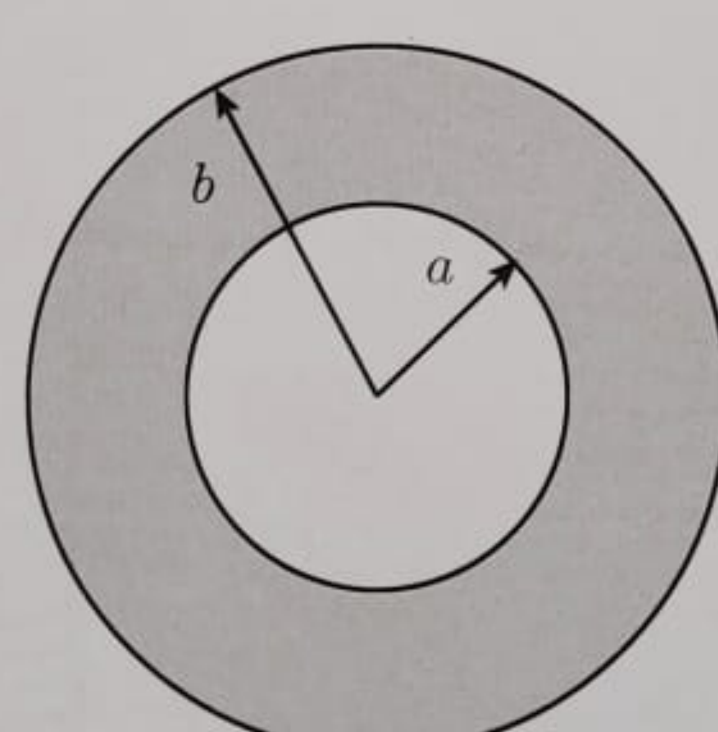

Abbildung 4: Querschnitt einer unendlich langen zylindrischen Hülle. Der Zylinder hat inneren Radius a und äusseren Radius b. In Aufgaben (a)-(c) trägt der Zylinder die Ladungsdichte ρ, siehe Gleichung (2.1). In Aufgaben (d)-(e) trägt der Zylinder eine feste Magnetisierung $\vec{M}$, siehe Gleichung (2.2).

Aufgabe 3: Oszillierendes Feld in einer unendlich langen Spule (25 Punkte)

Betrachten Sie eine eng gewundene, unendlich langen Spule, mit n Wicklungen pro Längeneinheit, die um eine zylinderförmige Röhre mit Radius R gewickelt ist und einen *zeitabhängigen* Strom $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ trägt, wobei ω die Winkelfrequenz bezeichnet (Abbildung. 5). *Ignorieren Sie jegliche Retardationseffekte in dieser Aufgabe.*

[Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Wicklungen im Wesentlichen kreisrund sind, d.h. die Spule ist äquivalent zu einem Zylinder mit Radius R und Oberflächenstrom $\vec{K} = nI\vec{e}_\phi$.]

7

(a) [5pt] Zeigen Sie, dass das Magnetfeld $\vec{B}_0$ im Innern einer unendlich langen Spule die einen Strom I trägt gegeben ist durch,

$$\vec{B}_0 = \mu_0 n I \vec{e}_z \,. \tag{3.1}$$

7

(b) [7pt] Betrachten Sie das magnetische Feld $\vec{B}_0 = \vec{B}_0(t)$ in Gleichung (3.1) für einen Zeit-abhängigen Strom $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$. Zeigen sie, dass das elektrische Feld $\vec{E}(\rho, t)$ bei einem Radius $\rho < R$ im Innern der Spule gegeben ist als

$$\vec{E}(\rho, t) = -\frac{1}{2}\rho\mu_0 n I_0 \omega \cos(\omega t)\vec{e}_\phi \,. \tag{3.2}$$

(c) [4pt] Berechnen Sie den Fluss des elektrischen Feldes $\vec{E}(\rho, t)$ in Gleichung (3.2) durch die rechteckige Schleife wie auf der rechten Seite in Abbildung 5 dargestellt.

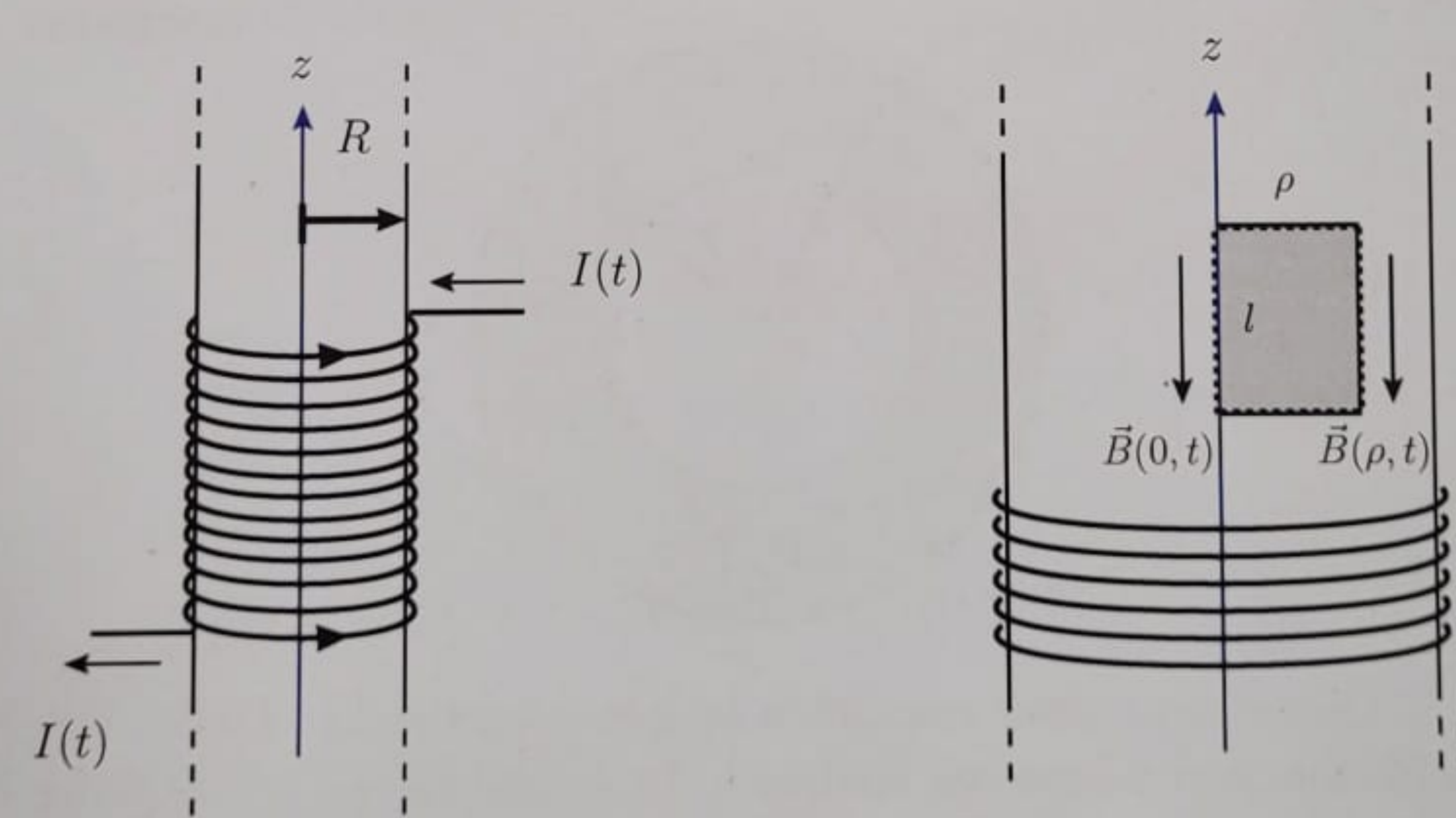

Abbildung 5: Unendlich lange Spule mit Windungszahl n, Radius R und Strom $I(t)$ (links) mit rechteckiger Ampèr'scher Schleife der Höhe l und Breite $\rho < R$ für Aufgaben (c) und (d) (rechts). Die abgebildete Richtung von $\vec{B}$ gilt für $\omega t \in [0, \pi/2]$.

(d) [4pt] Das zeitabhängige elektrische Feld $\vec{E}(\rho, t)$ in Gleichung (3.2) wird ein veränderliches magnetische Feld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ im Innern der Spule produzieren. Berechnen Sie die Differenz $\Delta B(\rho, t) \equiv B(\rho, t) - B(0, t)$, wobei $B(0, t)$ und $B(\rho, t)$ das induzierte magnetische Feld jeweils entlang der Spulenachse und bei einem Radius $\rho < R$ im Innern der Spule bezeichnet (siehe rechte Seite in Abbildung 5).

(e) [5pt] Bestimmen Sie schliesslich den Betrag des Verhältnisses $\Delta B(\rho, t)/B_0(t)$ mithilfe Ihres Resultats aus Aufgabe (d) und des magnetischen Feldes $B_0(t)$ in Gleichung (3.1) für $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$. Unter welchen Umständen ist ΔB vernachlässigbar, d.h. können wir annehmen, dass das magnetische Feld im Innern der Spule ausschliesslich durch $B_0(t)$ gegeben ist?

Aufgabe 4: Reflexion und Transmission bei schrägem Einfall (25 Punkte)

Nehmen Sie an die $x-y$ Ebene bildet eine Grenzfläche zweier linearen Medien mit $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Eine monochromatische ebene Welle der Frequenz ω mit Polarisation senkrecht zur Einfallsebene (d.h. das elektrische Feld weist in y-Richtung) trifft die Grenzfläche mit einem beliebigen Einfallswinkel θ_I (siehe Abbildung 7).

(a) [2pt] Skizzieren Sie den Aufbau. Geben Sie sowohl den Einfalls-, Ausfalls- und Brechungswinkel an, als auch die Wellenvektoren und Richtungen der elektrischen und magnetischen Felder für die einfallende, reflektierte und trnsmittierte Welle.

(b) [1pt] Alle drei Wellen weisen dieselbe Frequenz ω auf (diese wird an der Quelle festgelegt). Bestimmen Sie die Gleichung die die Wellenzahlen miteinander verknüpft.

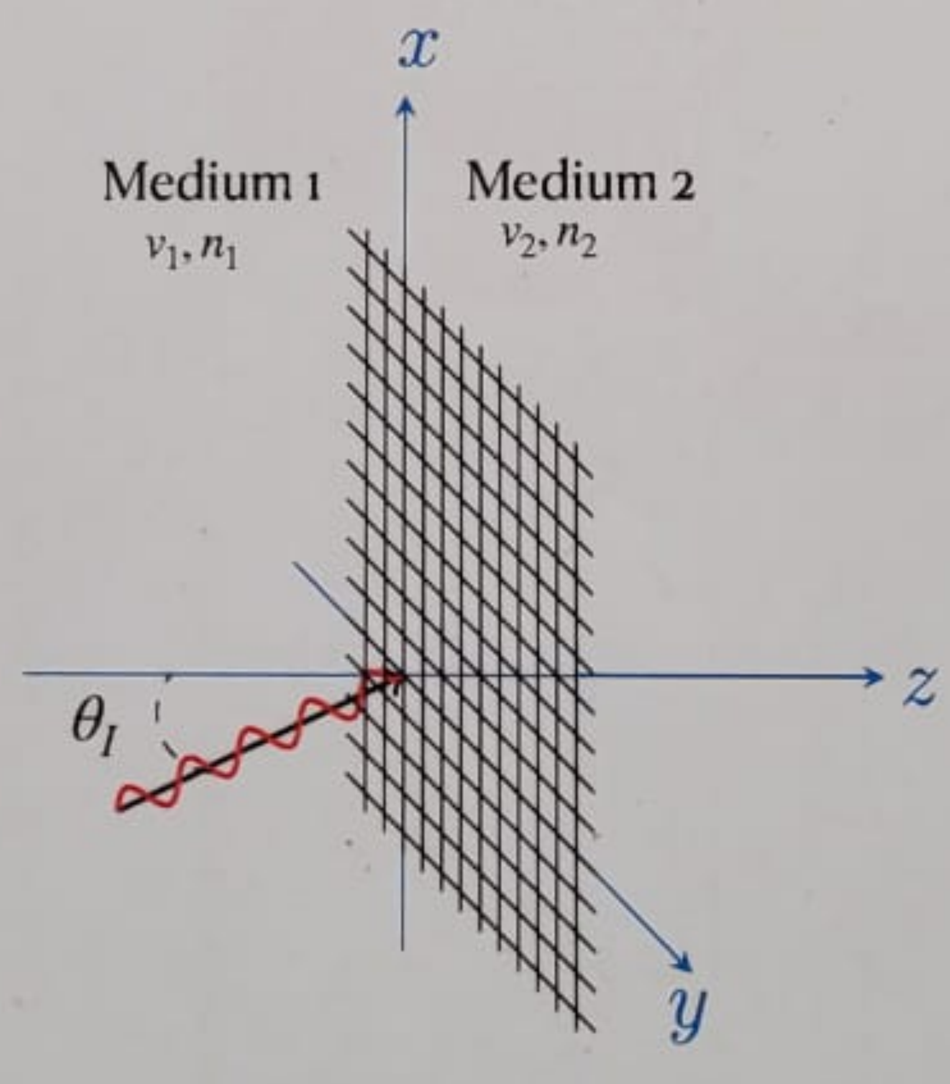

Abbildung 7: Eine einfallende Welle trifft die Grenzfläche zweier linearen Medien 1 und 2.

(c) [2pt] Schreiben Sie die Randbedingungen auf welche die elektrischen und magnetischen Felder erfüllen müssen.

(d) [5pt] Es ist bekannt, dass $\theta_I = \theta_R$ (θ_R ist der Ausfallswinkel) und dass die einfallenden, reflektierten und transmittierten Wellenvektoren eine Ebene bilden. Argumentieren Sie wieso dies der Fall ist, indem Sie die Phasen der Wellen bei $z = 0$ berücksichtigen.

(e) [1pt] Leiten Sie mithilfe Ihrer Lösungen zu den Aufgaben (b) und (d) das Snell'sche Gesetz her,

$$\frac{\sin\theta_T}{\sin\theta_I} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_2}{v_1}\,. \tag{4.1}$$

(f) [4pt] Schreiben Sie die Ausdrücke für die elektrischen und magnetischen Felder für die einfallenden, reflektierten und transmittierten Wellen auf.

(g) [5pt] Benutzen Sie die Randbedingungen aus Aufgabe (c) und das Snell'sche Gesetz, Gleichung 4.1, um die folgenden Gleichungen zwischen den ausgehenden Amplituden ($E_{0,T}$ und $E_{0,R}$) und der eingehenden Amplitude ($E_{0,I}$) herzuleiten:

$$\begin{cases} E_{0,T} = \frac{2}{1+\alpha\beta}\, E_{0,I}\,, \\ E_{0,R} = \frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta}\, E_{0,I}\,, \end{cases} \tag{4.2}$$

wobei $\alpha \equiv \cos\theta_2/\cos\theta_1$, $\beta \equiv v_1/v_2$.

(h) [2pt] Zeigen Sie, dass die reflektierte Amplitude $E_{0,R}$ niemals Null ist, ausser die Medien sind optisch nicht voneinander zu unterscheiden.

(i) [3pt] Berechnen Sie die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten und überprüfen Sie, dass sie zu 1 addieren.

Nützliche Formeln

Vektoranalysis

$$\vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{u}) = \vec{v}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) - \vec{u}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) + \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} - \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - \vec{\nabla}^2\vec{v}$$

Trigonometrische Identitäten

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,,$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,.$$

Sphärische Koordinaten

$$d\vec{l} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,d\phi\,\vec{e}_\phi$$
$$d^3r = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$
$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\vec{e}_\phi$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta v_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta\,v_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rv_\phi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\phi$$
$$\vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

Kartesische Koordinaten

$$d\vec{l} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$
$$d^3r = dxdydz$$
$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$
$$\vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Zylinderkoordinaten

$$d\vec{l} = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,d\phi\,\vec{e}_\phi + dz\,\vec{e}_z$$
$$d^3r = \rho\,d\rho d\phi dz$$
$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\phi}\vec{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right)\vec{e}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial\rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial\phi}\right)\vec{e}_z$$
$$\vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$