

Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Klausur

Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024

Ausgabe: 27.02.2024, Dauer: 120 mins

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen** auf jedes Blatt.
Benutzen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Summe

Aufgabe 1: Aufwärmübung

(8 P)

1.a) Sei $\vec{V}(\vec{r}) = V_i(\vec{r})\hat{e}_i$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie, dass gilt

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r})) = 0. \quad (1)$$

1.b) Wie lauten die Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik? Zeigen Sie, dass aus diesen Gleichungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0$ folgt. Schreiben Sie diese Gleichung in Integralform und erläutern Sie die physikalische Interpretation.

1.c) Wie können die Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik durch das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ ausgedrückt werden? Wie vereinfacht sich das Ergebnis in der Coulomb-Eichung?

Hinweis: Sie können die Identität $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{r})) - \Delta \vec{V}(\vec{r})$ ohne Beweis nutzen.

1.d) Betrachten Sie die Fourier-Transformierten

$$\vec{A}(\vec{k}) = \int d^3r \vec{A}(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad \vec{j}(\vec{k}) = \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (2)$$

Leiten Sie die Beziehung zwischen $\vec{A}(\vec{k})$ und $\vec{j}(\vec{k})$ in der Coulomb-Eichung her.

Lösung 1.a)

(2 Punkte)

Am einfachsten lässt sich die Identität in Indexnotation zeigen:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r})) = \partial_k (\vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r}))_k = \partial_k (\epsilon_{ijk} \partial_i V_j) = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_k V_j = 0, \quad (3)$$

wobei die letzte Gleichheit daraus folgt, dass ϵ_{ijk} anti-symmetrisch ist.

Lösung 1.b)

(2 Punkte)

Die beiden Maxwell Gleichungen sind

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (4)$$

Daraus folgt direkt

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \vec{j}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0, \quad (5)$$

wobei die letzte Gleichheit in 1.a) gezeigt wurde.

In der Integralform wird die Gleichung zu

$$0 = \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (6)$$

Dies ist die Kontinuitätsgleichung in Abwesenheit von Ladungsquellen und -senken. Der Fluss durch eine geschlossene Oberfläche muss also erfüllen, dass der eingehende Fluss gleich dem ausgehenden Fluss ist.

Lösung 1.c)

(2 Punkte)

Die beiden Gleichungen werden zu:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0, \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \quad (7)$$

Die erste Gleichung besagt, dass die Divergenz von \vec{B} gleich 0 ist, daher können wir $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ schreiben. In der Coulomb-Eichung gilt $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, daher vereinfacht sich die zweite Gleichung zu $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$

Lösung 1.d)

(2 Punkte)

Im Ortsraum, in der Coulomb-Eichung gilt:

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (8)$$

im Fourierraum werden die Ableitungen zu \vec{k} :

$$-\vec{k}^2 \vec{A}(\vec{k}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{k}) \quad \rightarrow \quad \vec{A}(\vec{k}) = \frac{\mu_0}{k^2} \vec{j}(\vec{k}) \quad (9)$$

Dies kann auch explizit wie folgt gezeigt werden, mit $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{r}' \vec{A}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}_j r_j}$:

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \partial_i \partial_i \int d^3 \vec{r}' \vec{A}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}_j r_j} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{r}' (-i k_i) (-i k_i) \vec{A}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}_j r_j} \quad (10)$$

Damit haben wir:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{r}' \vec{k}^2 \vec{A}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}_j r_j} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{r}' \vec{j}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}_j r_j} \quad (11)$$

was zur gleichen Gleichung wie oben führt.

Aufgabe 2: Dipolmoment von Spiegelladung

(15 P)

Das elektrostatische Potential einer Punktladung q am Ort \vec{r}' ist gegeben durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (12)$$

Betrachten Sie nun eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ in der Nähe des Ursprungs.

2.a) Was ist das entsprechende elektrostatische Potential? Zeigen Sie, dass für große Abstände das Potential wie folgt approximiert werden kann:

$$\Phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right), \quad (13)$$

mit der Gesamtladung Q und dem Gesamtdipolmoment \vec{p} . Leiten Sie den Ausdruck für Q und \vec{p} sowohl für eine kontinuierliche Ladungsverteilung her, als auch für N Punktladungen mit Ladungen q_i an den Positionen \vec{r}_i ($i = 1, \dots, N$).

2.b) Nehmen Sie nun an, dass sich die Ladungsverteilung im Halbraum $z > 0$ befindet. Bei $z = 0$ sei nun eine unendlich ausgedehnte, perfekt leitende Oberfläche. Was sind die Randbedingungen für das elektrische Feld auf der Oberfläche? Was impliziert dies für das elektrostatische Potential?

2.c) Betrachten Sie nun zwei Punktladung mit den Ladungen q_1 und q_2 , die sich bei $(0, 0, a_1)$ und $(0, 0, a_2)$ entlang der z -Achse befinden. Skizzieren Sie die induzierten Spiegelladungen in der x - z -Ebene und verifizieren Sie, dass die Randbedingung für das elektrostatische Potential erfüllt ist.

2.d) Berechnen Sie die Gesamtladung und das Dipolmoment der gesamten Ladungsverteilung (inklusive der Spiegelladungen), um die Näherung des elektrostatischen Potentials für große Abstände zu erhalten.

2.e) Wiederholen Sie die Berechnung nun für den Fall zweier Punktladungen mit entgegengesetzter Ladung $\pm q$, die sich bei $(\pm a/2, 0, a/2)$ befinden. Wie unterscheidet sich das elektrostatische Potential bei großen Abständen vom vorherigen Fall?

Lösung 2.a)

(4 Punkte)

Das folgende Ergebnis wurde schon in der Vorlesung, sowie dem Übungsblatt 5 behandelt.

Hier ist die folgende Vereinfachung nützlich $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} = r\sqrt{1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}$, was wir nun expandieren: $\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} = 1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{3\epsilon^2}{8} + o(\epsilon^3)$.

Damit haben wir:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} + \frac{3}{8} \left(2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)^2 \right) \quad (14)$$

Hier haben wir höhere Ordnungen, als für die Beantwortung der Frage notwendig, beibehalten. Diese zusätzlichen Terme werden für die letzte Frage dieser Aufgabe nützlich sein.

Das Gesamtpotential ist gegeben durch (für eine diskrete Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}') = \sum_i^{N_q} q_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}'_i)$):

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i^{N_q} q_i \left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'_i}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\sum_i^{N_q} q_i}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \sum_i^{N_q} q_i \vec{r}'_i}{r^3} \right) \quad (15)$$

wobei wir die Gesamtladung und den Dipolmoment identifizieren können als $Q = \sum_i^{N_q} q_i$ and $\vec{p} = \sum_i^{N_q} q_i \vec{r}'_i$.

Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ ist das Gesamtpotential gegeben durch:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'_i}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}')}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \vec{r}'}{r^3} \right) \quad (16)$$

hier lassen sich leicht die Gesamtladung und der Dipolmoment $Q = \int d\vec{r}' \rho(\vec{r}')$ und $\vec{p} = \int d\vec{r}' \rho(\vec{r}') \vec{r}'$ identifizieren. Wenn man $\rho(\vec{r}') = \sum_i^{N_q} q_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}'_i)$ in die kontinuierliche Lösung einsetzt erhalten wir das selbe Ergebnis, wie für die diskrete Ladungsverteilung. Dies ist ebenfalls eine legitime Lösung für die Herleitung der Lösung für die diskrete Ladungsverteilung.

Lösung 2.b)

(2 Punkte)

Wie üblich für Leiter, muss das elektrische Feld innerhalb des Leiters verschwinden, was bedeutet, dass es 0 auf der Oberfläche sein muss. Für das Potential impliziert dies, dass es auf der Oberfläche konstant sein muss.

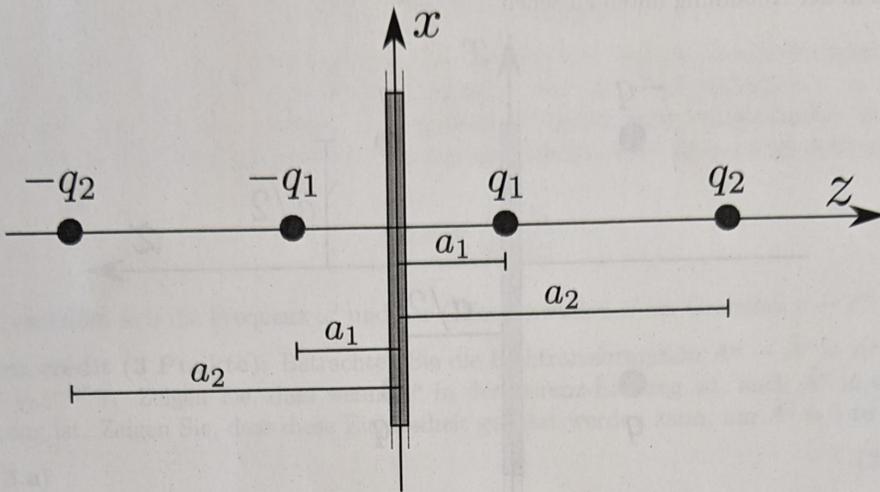
Um etwas präziser zu sein: $E_x, E_y \propto \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}$, wobei E_x und E_y die Komponenten des elektrischen Feldes sind, die parallel zur Oberfläche laufen, also was wir üblicherweise als \vec{E}_{\parallel} bezeichnen. Diese Komponenten sind kontinuierlich, und weil sie auf der Oberfläche und hinter dem Leiter verschwinden, kann das Potential nicht in x oder y variieren. Daher muss das Potential konstant auf der Oberfläche sein. Die senkrechte Komponente des E -Felds muss jedoch nicht gegen 0 gehen nahe der Oberfläche. Tatsächlich kann seine Diskontinuität genutzt werden um die Ladungsverteilung auf der Oberfläche herzuleiten.

Lösung 2.c)

(3 Punkte)

Jede Ladung erzeugt jeweils eine Spiegelladung mit der gegensätzlichen elektrischen Ladung bei gleichem Abstand (in entgegengesetzter Richtung) von der Leiterfläche. Wie in der Abbildung unten, q_1

erzeugt eine Spiegelladung $-q_1$ bei $(0, 0, -a_1)$, während q_2 durch die Spiegelladung $-q_2$ bei $(0, 0, -a_2)$ ausgeglichen wird.



Hier können wir uns fragen, ob unsere Intuition für die Platzierung von Ladungen ausreicht. Um das zu überprüfen (in diesem Fall ist dies einfach und auch von der Aufgabe erfordert) berechnen wir das Potential an einem beliebigen Punkt auf der Leiterfläche, also für $(x, y, 0)$. Mit den vier diskreten Ladungen haben wir:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|} = & (17) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + a_1^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + a_2^2}} + \frac{(-q_1)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (-a_1)^2}} + \frac{(-q_2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (-a_2)^2}} \right) = 0 & (18) \end{aligned}$$

Das Potential ist also auf der Oberfläche konstant. Tatsächlich ist es 0, jedoch kommt dies daher, dass das Potential bis auf eine konstante definiert ist, also ist es nicht notwendig, dass es 0 ist.

Lösung 2.d)

(3 Punkte)

Bevor wir die Berechnung angehen, können wir aufgrund physikalischer Argumente erwarten, dass die Gesamtladung 0 sein muss, da jede Ladung eine entgegengesetzte Spiegelladung hat. Im Gegensatz dazu erwarten wir, dass das Dipolmoment ungleich null ist. Die Berechnung selbst ist unkompliziert:

$$Q = \sum_i^{N_q} q_i = q_1 + q_2 + (-q_1) + (-q_2) = 0 \quad (19)$$

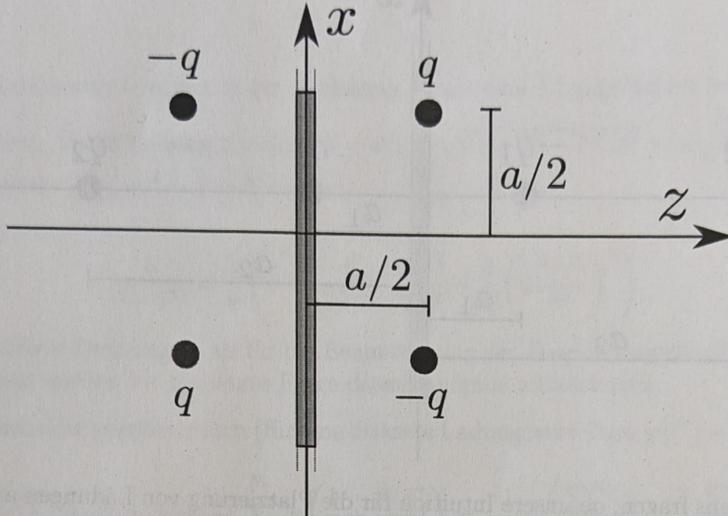
$$\vec{p} = \sum_i^{N_q} q_i \vec{r}'_i = q_1 a_1 \hat{e}_z + q_2 a_2 \hat{e}_z + (-q_1)(-a_1) \hat{e}_z + (-q_2)(-a_2) \hat{e}_z = (2q_1 a_1 + 2q_2 a_2) \hat{e}_z \quad (20)$$

Also ist die Gesamtladung tatsächlich 0 und der Dipolmoment verschwindet im allgemeinen nicht. Genauer gesagt würde dieser verschwinden, wenn $q_1 a_1 = -q_2 a_2$, also gibt es mögliche Dipolmoment-freie Ladungskonfigurationen, was wir auch in der nächsten Teilaufgabe sehen werden.

Lösung 2.e)

(3 Punkte)

Auch hier werden die Spiegelladungen die entgegengesetzte Ladung und den entgegengesetzten Wert von z haben. Also hat q bei $(a/2, 0, a/2)$ eine Spiegelladung $-q$ bei $(a/2, 0, -a/2)$. Die Zweite folgt analog, wie in der Abbildung unten zu sehen.



Das Potential würde sich wie $1/r$ verhalten, wenn es eine nicht verschwindende Gesamtladung gäbe, da jedoch

$$Q = \sum_i^{N_q} q_i = q + q + (-q) + (-q) = 0 \quad (21)$$

also nimmt das Potential schneller ab als $1/r$. Wenn es einen Gesamt-Dipolmoment gibt, dann verhält es sich wie $1/r^2$, jedoch haben wir

$$\vec{p} = \sum_i^{N_q} q_i \vec{r}'_i = q \left(\frac{a}{2} \hat{e}_x + \frac{a}{2} \hat{e}_z \right) - q \left(-\frac{a}{2} \hat{e}_x + \frac{a}{2} \hat{e}_z \right) + q \left(-\frac{a}{2} \hat{e}_x - \frac{a}{2} \hat{e}_z \right) - q \left(\frac{a}{2} \hat{e}_x - \frac{a}{2} \hat{e}_z \right) = 0 \quad (22)$$

Was können wir nun daraus schließen? Von der Multipolentwicklung wissen wir, dass das Potential mindestens wie $1/r^3$, oder schneller abnimmt. Falls es einen nicht verschwindenden Quadrupolmoment gibt, ist dies das Verhalten des Potentials.

Für die Aufgabe ist es nicht notwendig den Quadrupolmoment zu berechnen, aber es sei angemerkt, dass dieser nicht 0 ist, da $Q_{xz} = Q_{zx} = 3qa^2$. Also skaliert das Potential mit $1/r^3$. Wenn der Quadrupolmoment auch 0 wäre, würde das Potential mit mindestens $1/r^4$ skalieren.

Aufgabe 3: Relativistische Wellen

(12+3 P)

Das Skalar- und Vektorpotential einer elektromagnetischen Welle mit der Frequenz ω und dem Wellenvektor \vec{k} sind durch $\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$ und $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$ gegeben, wobei Φ_0 und \vec{A}_0 die Amplituden beschreiben.

- 3.a) Welche Relation müssen \vec{k} und ω erfüllen, damit $\Phi(\vec{r}, t)$ and $\vec{A}(\vec{r}, t)$ Lösungen der homogenen Wellengleichung sind? Welche Relation müssen Φ_0 und \vec{A}_0 in der Lorenz-Eichung erfüllen?
- 3.b) Drücken Sie ihre Ergebnisse der vorherigen Teilaufgabe durch das 4-Potential $A^\mu = (\Phi/c, \vec{A})$ und den 4-Wellenvektor $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$ aus. Berechnen Sie den elektromagnetischen Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$. Zeigen Sie, dass $k_\mu F^{\mu\nu} = 0$ gilt.

3.c) In dem Inertialsystem \mathcal{I} sendet ein ruhender Emitter zwei elektromagnetische Wellen mit der Frequenz ω in die positive und negative z Richtung aus. Bestimmen sie die Wellenvektoren \vec{k} und die zugehörigen 4-Wellenvektoren k^μ der beiden Wellen.

3.d) Betrachten Sie nun ein zweites Inertialsystem \mathcal{I}' , das sich mit der Geschwindigkeit $(-v, 0, 0)$ relativ zu \mathcal{I} bewegt, sodass sich in \mathcal{I}' der Emitter mit der Geschwindigkeit v in die x Richtung bewegt. Bestimmen Sie den 4-Wellenvektor k'^μ beider elektromagnetischer Wellen in \mathcal{I}' . Berechnen Sie den Öffnungswinkel α' zwischen den Wellen, welcher wie folgt definiert ist

$$\cos \alpha' = \frac{\vec{k}'_1 \cdot \vec{k}'_2}{|\vec{k}'_1| |\vec{k}'_2|} \quad (23)$$

Wie verhalten sich die Frequenz ω' und der Öffnungswinkel α' im Grenzfall $v \rightarrow c$?

3.e) **Extra credit (3 Punkte):** Betrachten Sie die Eichtransformation $A^\mu \rightarrow \tilde{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$ mit $\chi = \chi_0 e^{-ik^\nu x_\nu}$. Zeigen Sie, dass wenn A^μ in der Lorenz-Eichung ist, auch \tilde{A}^μ in der Lorenz-Eichung ist. Zeigen Sie, dass diese Eichfreiheit genutzt werden kann, um $\tilde{A}^0 = 0$ zu setzen.

(3 Punkte)

Lösung 3.a)

Die Wellengleichung lautet

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \rightarrow -\vec{k}^2 \Phi + \frac{\omega^2}{c^2} \Phi = 0 \rightarrow |\vec{k}| = \frac{\omega}{c} \quad (24)$$

Dass der Δ Operator zu $-\vec{k}^2$ wird ist im Fourierraum leicht zu sehen. Alternativ kann man hierfür die Indexnotation verwenden:

$$\Delta \Phi \propto \partial_i \partial_i e^{ik_j r_j} = \partial_i (\partial_i (ik_j r_j) e^{ik_j r_j}) = (ik_i) \partial_i e^{ik_j r_j} = (ik_i) (\partial_i (ik_j r_j) e^{ik_j r_j}) = -k_i k_i e^{ik_j r_j} \quad (25)$$

Für das magnetische Potential folgt das Ergebnis analog, da Φ_0 und \vec{A}_0 beide konstanten sind und somit nur der Exponentialteil relevant ist, welcher für das elektrische wie magnetische Potential gleich ist.

Die Lorenz Eichbedingung ist:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{A}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} - i \frac{\omega}{c^2} \Phi_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} = i e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} (\vec{k} \cdot \vec{A}_0 - \frac{\omega}{c^2} \Phi_0) = i (\vec{k} \cdot \vec{A} - \frac{\omega}{c^2} \Phi) \quad (26)$$

Auch hier ist der einfachste Weg die Divergenz in ein Skalarprodukt mit \vec{k} umzuschreiben durch eine Fourierexpansion. Ansonsten erhält man das Ergebnis auch durch schlichtes anwenden der Indexnotation:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial_i A_i = A_{0,i} \partial_i e^{ik_j r_j - i\omega t} = A_{0,i} (ik_j \delta_{ij}) e^{ik_j r_j - i\omega t} = i A_{0,i} k_i e^{ik_j r_j - i\omega t} = ik_i A_i = i\vec{k} \cdot \vec{A} \quad (27)$$

Lösung 3.b)

(4 Punkte)

Der 4-Vektor k^μ ist durch $k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$ gegeben, während das 4-Potential $A^\mu = (\frac{\Phi}{c}, \vec{A})$ ist.

Die erste Bedingung ist schon aus der Vorlesung als Dispersionsrelation bekannt und hat die kovariante Form $k^\mu k_\mu = 0$. Diese Bedingung involviert nur den Photon 4-Impuls und nicht das Potential.

Die andere Bedingung ist $\vec{k} \cdot \vec{A} - \frac{\omega}{c^2} \Phi = 0$, was "offensichtlich" dass das Produkt des 4-Potential und dem 4-Impuls ist.

$$A^\mu k_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\mu k^\nu = \frac{\Phi \omega}{c c} - \vec{k} \cdot \vec{A}. \quad (28)$$

also kann die zweite Bedingung als $A^\mu k_\mu = 0$ geschrieben werden.

Der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ ist $\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Wie oben gesehen können wir A^μ als $A_0^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}$ schreiben, wobei A_0^μ eine Konstante ist. Damit haben wir

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu (A_0^\nu e^{-ik^\alpha x_\alpha}) - \partial^\nu (A_0^\mu e^{-ik^\alpha x_\alpha}) = (A_0^\nu \partial^\mu (-ik^\alpha x_\alpha) - A_0^\mu \partial^\nu (-ik^\alpha x_\alpha)) e^{-ik^\alpha x_\alpha} = \quad (29)$$

$$= (A_0^\nu (-ik^\mu) - A_0^\mu (-ik^\nu)) e^{-ik^\alpha x_\alpha} = -i(k^\mu A_0^\nu - k^\nu A_0^\mu) e^{-ik^\alpha x_\alpha} = i(A^\mu k^\nu - k^\mu A^\nu). \quad (30)$$

Der Term $k_\mu F^{\mu\nu}$ ist damit 0, da sowohl $k_\mu k^\mu$, als auch $k_\mu A^\mu$ 0 sind, wie zuvor gezeigt.

Lösung 3.c)

(2 Punkte)

Der Impuls des Photons ist $\vec{k} = \pm k \hat{e}_z$ für die positive und negative z -Richtung. Auch wissen wir schon, dass $k = \omega/c$.

Im Folgenden nennen wir Sie $k_{1,2}^\mu$ und erhalten:

$$k_1^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, 0, 0, k\right) = (k, 0, 0, k) \quad k_2^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, 0, 0, -k\right) = (k, 0, 0, -k). \quad (31)$$

Es ist zwar nicht gefragt, aber der Winkel zwischen den beiden ist $\alpha = \pi$, was wir auch mit der Formel aus der nächsten Aufgabe bestätigen können:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2}{|\vec{k}_1| |\vec{k}_2|} = \frac{k \hat{e}_z \cdot (-k \hat{e}_z)}{k k} = -1 \rightarrow \alpha = \pi. \quad (32)$$

Lösung 3.d)

(3 Punkte)

Um \vec{k}'_i zu erhalten, wenden wir einen Lorentz Boost auf k_i^μ an.

$$k_i'^{\mu} = \Lambda^\mu{}_\nu (-v \hat{e}_x) k_i^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ \pm k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma k \\ \gamma\beta k \\ 0 \\ \pm k \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Wir können explizit überprüfen, dass $k'^{\mu} k'_\mu = k^2(\gamma^2 - \gamma^2\beta^2 - 1) = 0$. Wobei wir $\gamma^2 = (1 - \beta^2)^{-1}$ verwendet haben.

Dies bedeutet auch, dass $\vec{k}'_{1,2} = \gamma\beta k \hat{e}_x \pm k \hat{e}_z$, wobei der Betrag

$$|\vec{k}'_{1,2}| = \gamma\beta k \hat{e}_x \pm k \hat{e}_z$$

ist. Insgesamt haben wir also

$$\cos \alpha' = \frac{\vec{k}'_1 \cdot \vec{k}'_2}{|\vec{k}'_1| |\vec{k}'_2|} = \frac{\gamma^2 \beta^2 k^2 - k^2}{\gamma^2 k^2} = \beta^2 - \frac{1}{\gamma^2} = 2\beta^2 - 1. \quad (34)$$

Im ultrarelativistischen Limit geht die Frequenz nach Unendlich mit γ , da sie sich wie $\omega' = \gamma\omega$ verhält. Für den Winkel sehen wir, dass der Cosinus nach 1 geht, was bedeutet, dass $\alpha' \rightarrow 0$

Es ist nützlich den Winkel für kleine Werte zu expandieren:

$$2\beta^2 - 1 = \cos \alpha' \simeq 1 - \frac{\alpha'^2}{2} \rightarrow \alpha'^2 \simeq 4(1 - \beta^2) = \frac{4}{\gamma^2} \rightarrow \alpha' \simeq \frac{2}{\gamma} \quad (35)$$

Lösung 3.e)

(3 extra credit Punkte)

Wenn das ursprüngliche 4-Potential in der Lorenz Eichung ist, bedeutet das, dass $\partial_\mu A^\mu = 0$. Wir erinnern uns an eine nützliche Eigenschaften: $\partial_\mu x^\nu = \delta^\nu_\mu = \partial^\nu x_\mu$ und natürlich $k^\nu x_\nu = k_\nu x^\nu$.

Damit haben wir

$$\partial_\mu \tilde{A}^\mu = \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu \chi = \partial_\mu \partial^\mu (\chi_0 e^{-ik_\nu x^\nu}) = \chi_0 \partial_\mu (\partial^\mu (-ik^\nu x_\nu) e^{-ik_\nu x^\nu}) = \quad (36)$$

$$= -i\chi_0 k^\mu \partial_\mu (-ik_\nu x^\nu) e^{-ik_\nu x^\nu} = -\chi_0 k^\mu k_\mu e^{-ik_\nu x^\nu} = 0, \quad (37)$$

was aus der Dispersionsrelation $k^\mu k_\mu = 0$ folgt.

Für die 0-Komponente haben wir:

$$\tilde{A}^0 = A^0 + \chi_0 \partial^0 (e^{-ik_\nu x^\nu}) = A^0 - ik^0 \chi_0 e^{-ik_\nu x^\nu} = \frac{\Phi_0}{c} e^{-ik_\nu x^\nu} - i \frac{\omega \chi_0}{c} e^{-ik_\nu x^\nu}, \quad (38)$$

was wir 0 setzen können, in dem wir $\Phi_0 = i\omega \chi_0$ setzen. AM: Check factor i and c

Aufgabe 4: Kugelwellen und Kugelflächenfunktionen (15 P)

Gegeben sei eine Kugelwelle mit

$$\vec{E} = \frac{E_0 \hat{e}_\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{f(\theta, \varphi)}{r} e^{-i\omega(t-r/c)}, \quad (39)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{e}_r \times \vec{E}, \quad (40)$$

wobei $f(\theta, \varphi)$ von den Details des Emitters abhängt.

4.a) Berechnen Sie den zeitlich gemittelten Poyntingvektor $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{4\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}^* + \vec{E}^* \times \vec{B})$.

4.b) Zeigen Sie, dass der Energiefluss durch eine Sphäre mit dem Radius R wie folgt gegeben ist:

$$P = \frac{E_0^2 c}{32\pi^2 \epsilon_0} \int |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega. \quad (41)$$

4.c) Die Funktion $f(\theta, \varphi)$ kann in den Kugelflächenfunktionen expandiert werden:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \varphi). \quad (42)$$

Geben Sie einen expliziten Ausdruck für die Koeffizienten $c_{\ell m}$ an.

4.d) Zeigen Sie, dass wenn $f(\theta)$ von φ unabhängig ist, $c_{\ell m} = 0$ für $m \neq 0$.

4.e) Zeigen Sie, dass in diesem Fall folgendes gilt:

$$P = \frac{E_0^2 c}{32\pi^2 \epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} |c_{\ell 0}|^2. \quad (43)$$

$\vec{e}_r \times \vec{e}_r \times \vec{e}$

(3 Punkte)

Lösung 4.a)

Zunächst einmal haben wir $\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_\varphi$ und für die konjugierten Felder \vec{E}^* und \vec{B}^* wechselt der Exponent das Vorzeichen, also haben wir $e^{i\omega(t-r/c)}$. Zusammen haben wir damit:

$$\vec{E} = \frac{E_0 \hat{e}_\theta f(\theta, \phi)}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-i\omega(t-r/c)}, \quad \vec{E}^* = \frac{E_0 \hat{e}_\theta f^*(\theta, \phi)}{4\pi\epsilon_0 r} e^{i\omega(t-r/c)} \quad (44)$$

$$\vec{B} = \frac{E_0 \hat{e}_\varphi f(\theta, \phi)}{4\pi\epsilon_0 c r} e^{-i\omega(t-r/c)}, \quad \vec{B}^* = \frac{E_0 \hat{e}_\varphi f^*(\theta, \phi)}{4\pi\epsilon_0 c r} e^{i\omega(t-r/c)} \quad (45)$$

Wir wissen auch, dass $\hat{e}_\theta \times \hat{e}_\varphi = \hat{e}_r$, also:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{4\mu_0 c} \left(\frac{E_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{|f(\theta, \phi)|}{r} \right)^2 (2\hat{e}_r) = \frac{E_0^2 c}{2\epsilon_0} \left(\frac{|f(\theta, \phi)|}{4\pi r} \right)^2 \hat{e}_r \quad (46)$$

da die Exponenten sich wegen der komplexen Konjugation aufheben.

Lösung 4.b)

3 (2 Punkte)

Das Oberflächenelement einer Kugel mit Radius R ist durch $d\vec{S} = R^2 d\Omega \hat{e}_r$ gegeben. Der Energiefluss durch die Kugel ist damit:

$$\frac{dP}{d\Omega} \Big|_{r=R} = R^2 \langle \vec{S} \rangle_{r=R} \cdot \hat{e}_r = \frac{E_0^2 c}{2\epsilon_0} \frac{|f(\theta, \phi)|^2}{16\pi^2} \quad (47)$$

Nach der Integration über den Raumwinkel erhalten wir:

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} \Big|_{r=R} d\Omega = \frac{E_0^2 c}{32\pi^2 \epsilon_0} \int |f(\theta, \phi)|^2 d\Omega \quad (48)$$

Lösung 4.c)

(3 Punkte)

Wie in der Vorlesung und auf den Übungsblättern gesehen können wir die folgende Relation ausnutzen

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta Y_{\ell'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (49)$$

um herzuleiten, dass (primed and unprimed have been switched for consistency here)

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) f(\theta, \phi) = \sum_{\ell'=0}^\infty \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell' m'}(\theta, \varphi) = \quad (50)$$

$$= \sum_{\ell'=0}^\infty \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} c_{\ell' m'} = c_{\ell m} \quad (51)$$

Vorausgesetzt, dass wir den Ausdruck für $f(\theta, \phi)$ kennen, können wir die Koeffizienten der Expansion in Kugelflächenfunktionen herleiten.

Lösung 4.d)

(3 Punkte)

Die Kugelflächenfunktionen können wir als

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = N_{\ell m} P_\ell^{(m)}(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (52)$$

schreiben, wobei $\mathcal{N}_{\ell m}$ eine Normalisierungskonstante ist, die nicht von θ und ϕ abhängt.

Mit dem vorherigen Ergebnis erhalten wir:

$$c_{\ell m} = \mathcal{N}_{\ell m} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta P_\ell^{(m)}(\cos \theta) e^{-im\varphi} f(\theta) \stackrel{m \neq 0}{=} \mathcal{N}_{\ell m} \left(\frac{1 - e^{-im2\pi}}{im} \right) \int_0^\pi \sin \theta d\theta P_\ell^{(m)}(\cos \theta) f(\theta) \stackrel{1}{=} 0 \quad (53)$$

wobei das wir ausgenutzt haben, dass $e^{-im2\pi} = 1$ für $m \in \mathbb{Z}$.

Für $m = 0$ jedoch hält dieses Ergebnis nicht, da wir nicht durch m teilen können. In diesem Fall haben wir

$$c_{\ell 0} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{\ell 0}(\cos \theta) f(\theta) = \sqrt{\pi(2\ell + 1)} \int_0^\pi \sin \theta d\theta P_\ell^{(0)}(\cos \theta) f(\theta) \quad (54)$$

Lösung 4.e)

3 (4 Punkte)

Wir haben

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} c_{l0} Y_{l0}(\theta, \phi), \quad (55)$$

was wiederum Folgendes impliziert

$$|f(\theta)|^2 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} c_{l0} c_{l'0}^* Y_{l0}(\theta, \phi) Y_{l'0}^*(\theta, \phi). \quad (56)$$

Mit dem vorherigen Ergebnis kombinieren

$$P = \frac{E_0^2 c}{32\pi^2 \epsilon_0} \int |f(\theta)|^2 d\Omega = \frac{E_0^2 c}{32\pi^2 \epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} c_{l0} c_{l'0}^* \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{l0}(\theta, \phi) Y_{l'0}^*(\theta, \phi). \quad (57)$$

Jetzt nutzen wir die Orthogonalität $\int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{\ell\ell'}(\theta, \phi) Y_{\ell'\ell''}^*(\theta, \phi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{m m'}$ um Folgendes zu erhalten:

$$P = \frac{E_0^2 c}{32\pi^2 \epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} c_{l0} c_{l'0}^* \delta_{\ell\ell'} = \frac{E_0^2 c}{32\pi^2 \epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} |c_{l0}|^2 \quad (58)$$

was genau das gewünschte Ergebnis ist.

Hinweise

- Als Hilfsmittel ist ein von Ihnen beidseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt erlaubt.
- In der Klausur wird das SI-Einheitensystem verwendet.
- Sie können folgende Formeln ohne Beweis benutzen:

Vektoroperatoren in zylindrischen Koordinaten

Für $f = f(\rho, \varphi, z)$ und $\vec{A} = A_\rho(\rho, \varphi, z) \hat{e}_\rho + A_\varphi(\rho, \varphi, z) \hat{e}_\varphi + A_z(\rho, \varphi, z) \hat{e}_z$:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z \\ \Delta f &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \vec{A} &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{e}_z\end{aligned}$$

Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten

Für $f = f(r, \theta, \varphi)$ und $\vec{A} = A_r(r, \theta, \varphi) \hat{e}_r + A_\theta(r, \theta, \varphi) \hat{e}_\theta + A_\varphi(r, \theta, \varphi) \hat{e}_\varphi$:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi \\ \Delta f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ \nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \hat{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\varphi\end{aligned}$$

Kugelflächenfunktionen

Die Kugelflächenfunktionen sind gegeben durch

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_\ell^{(m)}(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

mit den assoziierten Legendre-Polynomen

$$P_\ell^{(m)} = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{\ell m}}{\partial \varphi^2} + \ell(\ell + 1) Y_{\ell m} &= 0, \\ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{\ell' m'}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) &= \delta_{\ell' \ell} \delta_{m' m}, \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi) &= \delta(\cos \theta' - \cos \theta) \delta(\varphi' - \varphi).\end{aligned}$$