Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)
Nachklausur

Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024
Kopie – erstellt auf Grundlage der Musterlösung

Ausgabe (ursprünglich): 21.03.2024

Aufgabe 1: Geladene Kugel (10 P)

Betrachten Sie eine rotationssymmetrische Ladungsverteilung, die durch

$$\rho(r) = \frac{\sigma}{r} \tag{1}$$

für $r \neq 0$ gegeben ist. Dabei ist σ eine Konstante mit der Einheit einer Oberflächenladung.

1.a) Berechnen Sie die Gesamtladung innerhalb einer Sphäre mit $r > 0$ und nutzen Sie den Satz von Gauß, um das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ zu bestimmen. [3]

1.b) Bestimmen Sie das elektrische Potential $\Phi(r)$ mithilfe des Wegintegrals [3]

$$\Phi(r) = -\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{2}$$

entlang einer geraden Linie vom Ursprung zu einem Punkt mit dem Abstand r. Warum hängt das Ergebnis nicht von dem gewählten Weg ab?

1.c) Berechnen Sie $\Delta\Phi(r)$ und bestätigen Sie explizit, dass das Ergebnis die Poisson-Gleichung erfüllt. [4]

Aufgabe 2: Poynting-Theorem (10 P)

In dieser Aufgabe wird der Ergieerhaltungssatz der Elektrodynamik aus den Maxwell-Gleichungen hergeleitet.

2.a) Zeigen Sie (mithilfe von Indexnotation oder durch explizite Berechnung), dass [2]

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})\,. \tag{3}$$

2.b) Zeigen Sie, dass [2]

$$-\mu_0 \left(\vec{j} \cdot \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \right) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E})\,. \tag{4}$$

2.c) Nutzen Sie das vorherige Ergebnis, um das Poynting-Theorem herzuleiten [3]

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\mathrm{em}} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}\,, \tag{5}$$

und geben Sie dabei die entsprechenden Definitionen von u_{em} und $\vec{S}$ an.

2.d) Was impliziert das Poynting-Theorem für die Gesamtenergie $U_{\mathrm{em}} = \int_{\mathbb{R}^3} u_{\mathrm{em}}\, \mathrm{d}^3 r$ eines elektromagnetischen Feldes im Vakuum ($\vec{j} = \vec{0}$)? [3]

Aufgabe 3: Zweidimensionaler Wellenleiter (10 P)

Gegeben seien zwei unendliche Leiterplatten. Eine liegt in der x−y-Ebene bei $z = 0$, und die andere parallel dazu bei $z = L$. Zwischen den beiden Platten ist ein Vakuum.

3.a) Im Folgenden betrachten wir elektromagnetische Wellen, die durch das Vakuum zwischen den beiden Platten propagieren. Das elektrische Feld soll hierbei in die x-Richtung zeigen: $\vec{E}(\vec{r}, t) = E_x(\vec{r}, t)\, \vec{e}_x$. Zeigen Sie, dass aus den Maxwell-Gleichungen folgt, dass E_x nicht von x abhängen kann. [1]

3.b) Das elektrische Feld zwischen den beiden Platten muss die Wellengleichung $\Delta E_x(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(\vec{r}, t) = 0$ erfüllen. Um die Gleichung zu lösen, betrachten Sie den Separationsansatz $E_x(y, z, t) = Y(y)\, Z(z)\, T(t)$. Zeigen Sie, dass aus der Wellengleichung [3]

$$Y''(y) = -k_y^2 Y(y) \tag{6}$$
$$Z''(z) = -k_z^2 Z(z) \tag{7}$$
$$T''(t) = -\omega^2 T(t) \tag{8}$$

folgt, mit geeigneten Konstanten k_y, k_z und ω. Welche Beziehung müssen diese Konstanten erfüllen.

3.c) Welche Randbedingungen muss $Z(z)$ bei $z = 0$ und $z = L$ erfüllen? Nutzen Sie diese, um zu zeigen, dass k_z nur diskrete Werte $k_z = n\pi/L$ mit $n \in \mathbb{N}$ annehmen kann. [3]

3.d) Finden Sie die allgemeine Lösung für $Y(y)$. Welche Werte kann k_y annehmen? Was ist der kleinstmögliche Wert für ω, für den das elektrische Feld nicht verschwindet? [3]

Aufgabe 4: Relativistischer Plattenkondensator (10 P)

Betrachten Sie zwei ruhende Platten parallel zur x−y-Ebene mit dem Abstand d zueinander und mit den Längen L_x und Breiten L_y. Die Platten sind mit entgegengesetzter Gesamtladung geladen: Die Platte bei $z = -d/2$ hat Ladung Q, die Platte bei $z = +d/2$ hat Ladung $-Q$. Sie können annehmen, dass die Platten groß genug sind, dass das elektrische Feld zwischen ihnen konstant ist und in die z-Richtung zeigt: $\vec{E} = E_z\, \vec{e}_z$.

4.a) Zeigen Sie, dass das elektrische Feld zwischen den beiden Platten durch [2]

$$E_z = \frac{Q}{\varepsilon_0 L_x L_y} \tag{9}$$

gegeben ist.

4.b) Betrachten Sie nun einen Beobachter, der sich zwischen den Platten mit der Geschwindigkeit v in die x-Richtung bewegt: $\vec{r} = (vt, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Was sind die Längen L'_x und Breiten L'_y der Platten im Bezugssystem des Beobachters? Was folgt daraus für das elektrische Feld E'_z? [2]

4.c) Zeigen Sie, dass das gleiche Ergebnis aus der direkten Anwendung der Formeln für die Lorentz-Transformation von elektrischen Feldern folgt: [3]

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \tag{10}$$
$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B})\,. \tag{11}$$

4.d) Was ist das magnetische Feld im Bezugssystem des bewegten Beobachters? Berechnen Sie $\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2$ sowohl im unbewegten Bezugssystem, als auch im System des bewegten Beobachters. [3]

Aufgabe 5: Spule mit Material (10 P)

Gegeben sei eine unendlich lange Spule entlang der z-Achse mit Radius R und N_w Windungen pro Länge d_s, durch die der Strom I fließt. Für den Fall eines Vakuums innerhalb der Spule wurde in der Vorlesung gezeigt, dass

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 N_w I}{d_s}\, \vec{e}_z\,, \tag{12}$$

innerhalb der Spule, und $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{0}$ außerhalb der Spule.

5.a) Betrachten Sie nun den Fall, dass die Spule mit einem paramagnetischen Material mit Permeabilität μ gefüllt ist. Bestimmen Sie durch Vergleich der Maxwell-Gleichungen im Vakuum und in Materie die magnetische Feldstärke $\vec{H}(\vec{r})$ und die magnetische Flussdichte $\vec{B}(\vec{r})$ innerhalb des Materials. [3]

5.b) Betrachten Sie nun den Fall, dass die Spule den Radius R_2 hat und mit einem paramagnetischen Material bis zum Radius $R_1 < R_2$ gefüllt ist, während zwischen R_1 und R_2 Vakuum ist. Nehmen Sie an, dass es keine freien Ladungen oder Ströme an der Grenze zwischen Material und Vakuum gibt. Geben Sie (ohne Herleitung) die Stetigkeitsbedingungen für das H-Feld und das B-Feld an. Bestimmen Sie $\vec{H}$ und $\vec{B}$ für die beiden Regionen $0 < \rho < R_1$ und $R_1 < \rho < R_2$. [3]

5.c) Betrachten Sie eine kreisförmige Schleife L um das paramagnetische Material, das heißt, eine Schleife mit Radius R_1, die in der x−y-Ebene liegt und um die z-Achse zentriert ist: $x^2 + y^2 = R_1^2, z = 0$. Zeigen Sie, dass der magnetische Fluss Φ_B durch die Schleife durch [2]

$$\Phi_B = \pi \mu R_1^2 \frac{N_w I}{d_s} \tag{13}$$

gegeben ist.

5.d) Nehmen Sie nun an, dass der Strom durch die Spule mit der Zeit variiert: $I(t) = \alpha t$, wobei α eine Konstante mit Einheit A/s ist. Durch die zeitliche Änderung wird ein elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r}) = E(\rho)\,\vec{e}_\phi$ innerhalb der Spule erzeugt. Bestimmen Sie $E(R_1)$. [2]

Hinweise

- Als Hilfsmittel ist ein von Ihnen beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt erlaubt.
- In der Klausur wird das SI-Einheitensystem verwendet.
- Sie können folgende Formeln ohne Beweis benutzen:

Vektoroperatoren in zylindrischen Koordinaten

Für $f = f(\rho, \varphi, z)$ und $\vec{A} = A_\rho(\rho, \varphi, z)\,\vec{e}_\rho + A_\varphi(\rho, \varphi, z)\,\vec{e}_\varphi + A_z(\rho, \varphi, z)\,\vec{e}_z$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial \rho}\,\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z \\
\Delta f &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\varphi\right) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z
\end{aligned}$$

Vektoroperatoren in Kugelkoordinaten

Für $f = f(r, \theta, \varphi)$ und $\vec{A} = A_r(r, \theta, \varphi)\,\vec{e}_r + A_\theta(r, \theta, \varphi)\,\vec{e}_\theta + A_\varphi(r, \theta, \varphi)\,\vec{e}_\varphi$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\vec{e}_\varphi \\
\Delta f &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\
\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(A_\varphi \sin\theta\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r A_\varphi\right)\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r A_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

Kugelflächenfunktionen

Die Kugelflächenfunktionen sind durch

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,P_l^{(m)}(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

gegeben, mit den assoziierten Legendre-Polynomen

$$\begin{aligned}
P_l^{(m)}(x) &= (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)\,, \\
P_l(x) &= \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l\,.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial \varphi^2} + l(l+1)Y_{lm} &= 0\,, \\
\int Y^*_{l'm'}(\theta, \varphi)Y_{lm}(\theta, \varphi)\,\mathrm{d}\Omega &= \delta_{ll'}\delta_{mm'}\,, \\
\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta', \varphi')Y_{lm}(\theta, \varphi) &= \delta(\cos\theta' - \cos\theta)\delta(\varphi' - \varphi)\,.
\end{aligned}$$