

# Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

## Nachklausur

Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024  
Ausgabe: 21.03.2024, Dauer: 120 mins

---

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen** auf jedes Blatt.  
Benutzen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.

---

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5	Summe

# Aufgabe 1: Geladene Kugel

(10 P)

Betrachten Sie eine rotationssymmetrische Ladungsverteilung, die durch

$$\rho(r) = \frac{\sigma}{r}, \quad (1)$$

für  $r \neq 0$  gegeben ist. Dabei ist  $\sigma$  eine Konstante mit der Einheit einer Oberflächenladungsdichte.

1.a) Berechnen Sie die Gesamtladung innerhalb einer Kugel mit  $r > 0$  und nutzen Sie den Satz von Gauß, um das elektrische Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  zu bestimmen.

1.b) Bestimmen Sie das elektrische Potential  $\Phi(r)$  mithilfe des Wegintegrals

$$\Phi(r) = - \int d\vec{s} \cdot \vec{E} \quad (2)$$

entlang einer geraden Linie vom Ursprung zu einem Punkt mit dem Abstand  $r$ . Warum hängt das Ergebnis nicht von dem gewählten Weg ab?

1.c) Berechnen Sie  $\Delta\Phi(r)$  und bestätigen Sie explizit, dass das Ergebnis die Poisson-Gleichung erfüllt.

**Lösung 1.a)**

**(3 Punkte)**

Die Gesamtladung innerhalb einer Kugel mit beliebigem Radius ist gegeben durch:

$$Q(r) = \int_K d^3r' \rho(r') = \sigma \int_K r'^2 dr' d\Omega, \frac{1}{r'} = 4\pi\sigma \int_0^r r' dr' = 2\pi r^2 \sigma \quad (3)$$

Nun um das E-Feld zu bestimmen, betrachten wir eine Kugel mit dem Radius  $r$ . Nach dem Gaußschen Satz erhalten wir:

$$\int_K d^3r' \frac{\rho(r')}{\varepsilon_0} = \int_K d^3r' \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int_{\partial K} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int_{\partial K} E(r) \hat{e}_r \cdot (r^2 d\Omega \hat{e}_r) = 4\pi r^2 E(r) \quad (4)$$

wobei durch Symmetrieargumente  $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{e}_r$  genutzt haben.

Die linke Seite der Gleichung kann wie folgt erweitert werden:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_K d^3r' \rho(r') = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} = \frac{2\pi r^2 \sigma}{\varepsilon_0} \quad (5)$$

Aus den beiden vorherigen Schritten lässt sich schließen, dass  $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{e}_r$ . Dabei kann man überprüfen, dass die Einheiten korrekt sind, da  $\sigma$  die Dimensionen von Ladung pro Fläche hat ( $[\sigma] = Q/r^2$ ).

**Lösung 1.b)**

**(3 Punkte)**

Das Ergebnis ist unabhängig vom Weg, da  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$  (wenn es keine zeitlich veränderte magnetische Felder gibt). Das E-Feld ist wirbelfrei und somit ein konservatives Feld.

Das Skalarpotential  $\Phi$  lässt sich wie folgend bestimmen:

$$\Phi(r) = \Phi(0) - \int_0^r \vec{E}(r') \cdot (\hat{e}_r dr') = \Phi(0) - \int_0^r dr' \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \Phi(0) - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} r. \quad (6)$$

Für  $r = R$  dies ergibt  $\Phi(R) = \Phi(0) - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} R$ .

**Lösung 1.c)****(4 Punkte)**

Die Poisson Gleichung kann im kugelsymmetrischen Fall wie folgend geschrieben werden

$$\Delta\Phi(r) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}. \quad (7)$$

Aus der Formelsammlung kann der Ausdruck für den Laplace-Operator entnommen werden (keine  $\theta$  oder  $\varphi$  Abhängigkeiten):

$$\Delta\Phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} \right) \quad (8)$$

Wir führen die Ableitungen durch

$$\Delta\Phi(r) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial(r)}{\partial r} \right) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2)}{\partial r} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{2r}{r^2} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0 r}. \quad (9)$$

Das Ergebnis entspricht  $-\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$ . Somit ist es klar, dass die Poisson Gleichung erfüllt ist.

**Aufgabe 2: Poynting-Theorem****(10 P)**

In dieser Aufgabe wird der Energieerhaltungssatz der Elektrodynamik aus den Maxwell-Gleichungen hergeleitet.

2.a) Zeigen Sie (mithilfe von Indexnotation oder durch explizite Berechnung), dass

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}). \quad (10)$$

2.b) Zeigen Sie, dass

$$-\mu_0 \left( \vec{j} \cdot \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \right) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}). \quad (11)$$

2.c) Nutzen Sie das vorherige Ergebnis, um das Poynting-Theorem herzuleiten

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\text{em}} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}, \quad (12)$$

und geben Sie dabei die entsprechenden Definitionen von  $u_{\text{em}}$  und  $\vec{S}$  an.

2.d) Was impliziert das Poynting-Theorem für die Gesamtenergie  $U_{\text{em}} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r u_{\text{em}}$  eines elektromagnetischen Feldes in Vakuum ( $\vec{j} = 0$ )?

**Lösung 2.a)****(2 Punkte)**

Es gibt zwei Lösungswege.

**1. Lösungsweg: with index notation**

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \partial_k \epsilon_{ijk} E_i B_j = \epsilon_{ijk} (\partial_k E_i) B_j + \epsilon_{ijk} E_i (\partial_k B_j) = \epsilon_{kij} (\partial_k E_i) B_j - \epsilon_{kji} E_i (\partial_k B_j) = \quad (13)$$

$$= (\vec{\nabla} \times \vec{E})_j B_j - E_i (\vec{\nabla} \times \vec{B})_i = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (14)$$

## 2. Lösungsweg: explicit calculation

Die explizite Form des Kreuzproduktes ist

$$\vec{E} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ E_x & E_y & E_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (E_y B_z - E_z B_y) \hat{e}_x + (E_z B_x - E_x B_z) \hat{e}_y + (E_x B_y - E_y B_x) \hat{e}_z \quad (15)$$

und seine Divergenz

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \partial_x (E_y B_z - E_z B_y) + \partial_y (E_z B_x - E_x B_z) + \partial_z (E_x B_y - E_y B_x). \quad (16)$$

Im vorherigen Ausdruck sind insgesamt 12 Terme. Wir berechnen nun die rechte Seite der Gleichung:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = (\partial_y E_z - \partial_z E_y) \hat{e}_x + (\partial_z E_x - \partial_x E_z) \hat{e}_y + (\partial_x E_y - \partial_y E_x) \hat{e}_z \quad (17)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (\partial_y B_z - \partial_z B_y) \hat{e}_x + (\partial_z B_x - \partial_x B_z) \hat{e}_y + (\partial_x B_y - \partial_y B_x) \hat{e}_z \quad (18)$$

Die Skalarprodukte ergeben:

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = (\partial_y E_z - \partial_z E_y) B_x + (\partial_z E_x - \partial_x E_z) B_y + (\partial_x E_y - \partial_y E_x) B_z \quad (19)$$

$$\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = (\partial_y B_z - \partial_z B_y) E_x + (\partial_z B_x - \partial_x B_z) E_y + (\partial_x B_y - \partial_y B_x) E_z \quad (20)$$

Insgesamt erscheinen 12 Terme, wenn wir die Differenz zwischen dem ersten und dem zweiten Term nehmen. Durch direkten Vergleich kann festgestellt werden, dass die Gleichung erfüllt ist.

### Lösung 2.b)

(2 Punkte)

Wir können mit der linken Seite der Gleichung anfangen:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (21)$$

$$= -\vec{E} \cdot \left( \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (22)$$

$$= -\mu_0 \left( \vec{j} \cdot \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \right) \quad (23)$$

wobei wir die hergeleitete Gleichung aus 2.a und die Maxwellgleichung  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  angewendet haben.

### Lösung 2.c)

(3 Punkte)

Mithilfe der zweiten Maxwellgleichung  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  kann die vorherige Gleichung umgeschrieben werden

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{B} \cdot \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\vec{E} \cdot \left( \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (24)$$

Nach Umstellung der Gleichung sowie Teilen durch  $\mu_0$  und Umschreiben der Partialableitungen, bekommen wir

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) + \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} + \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial \vec{B}^2}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (25)$$

Durch Vergleich mit der Poynting-Gleichung ist es einfach zu sehen, dass

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \quad (26)$$

$$u_{\text{em}} = \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}. \quad (27)$$

### Lösung 2.d)

(3 Punkte)

In Abwesenheit von Strömen, die Poynting-Gleichung ist einfach

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\text{em}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{S} \quad (28)$$

Wir integrieren zuerst über ein beliebiges Volumen und verwenden den Gauß'schen Integralsatz:

$$\frac{\partial U_{\text{em}}}{\partial t} = \int_V d^3r \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} = - \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = - \int_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{f} \quad (29)$$

Die zeitliche Änderung der Energiedichte in einem Volumen  $V$  ist gleich dem Fluss des Poynting-Vektors durch die Oberfläche.

Da der Randterm (der Fluss durch die Oberfläche) im Fall eines unendlichen Volumens  $\mathbb{R}^3$  null ist, bleibt die Gesamtenergie im gesamten System erhalten.

## Aufgabe 3: Zweidimensionaler Wellenleiter

(10 P)

Gegeben seien zwei unendliche Leiterplatten. Eine liegt in der  $x - y$  Ebene bei  $z = 0$  und die andere parallel dazu bei  $z = L$ . Zwischen den beiden Platten ist Vakuum.

3.a) Im Folgenden betrachten wir elektromagnetische Wellen, die durch das Vakuum zwischen den beiden Platten propagieren. Das elektrische Feld soll hierbei in die  $x$  Richtung zeigen:  $\vec{E}(\vec{r}, t) = E_x(\vec{r}, t)\hat{e}_x$ . Zeigen Sie, dass aus den Maxwell-Gleichungen folgt, dass  $E_x$  nicht von  $x$  abhängen kann.

3.b) Das elektrische Feld zwischen den beiden Platten muss die Wellengleichung  $\Delta E_x(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$  erfüllen. Um die Gleichung zu lösen, betrachten Sie den Separationsansatz  $E_x(y, z, t) = Y(y)Z(z)T(t)$ . Zeigen Sie, dass aus der Wellengleichung

$$Y''(y) = -k_y^2 Y(y) \quad (30)$$

$$Z''(z) = -k_z^2 Z(z) \quad (31)$$

$$T''(t) = -\omega^2 T(t). \quad (32)$$

folgt, mit geeigneten Konstanten  $k_y$ ,  $k_z$  und  $\omega$ . Welche Beziehung müssen diese Konstanten erfüllen?

3.c) Welche Randbedingungen muss  $Z(z)$  bei  $z = 0$  und  $z = L$  erfüllen? Nutzen Sie diese, um zu zeigen, dass  $k_z$  nur diskrete Werte  $k_z = n\pi/L$  mit  $n \in \mathbb{N}$  annehmen kann.

3.d) Finden Sie die allgemeine Lösung für  $Y(y)$ . Welche Werte kann  $k_y$  annehmen? Was ist der kleinstmögliche Wert für  $\omega$ , für den das elektrische Feld nicht verschwindet?

**Lösung 3.a)****(1 Punkte)**

Die Divergenz des E-Feldes ist im Vakuum 0:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \partial_x E_x \quad (33)$$

somit kann  $E_x$  nicht von  $x$  abhängig sein.

Beachten Sie, dass hier aufgrund zeitabhängiger elektrischer Felder im Prinzip magnetische Felder vorhanden sein sollten:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(y, z, t) = \partial_z E_x \hat{e}_y - \partial_y E_x \hat{e}_z = -\partial_t \vec{B} \quad (34)$$

Wir können auch schlussfolgern, dass  $\vec{B}$  im allgemeinsten Fall Komponenten in Richtung  $\hat{e}_y$  und  $\hat{e}_z$  haben wird.

**Lösung 3.b)****(3 Punkte)**

Die Wellengleichung ist:

$$0 = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = Z(z)T(t) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + Y(y)T(t) \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} - Y(y)Z(z) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \quad (35)$$

Wenn wir durch  $Y(y)Z(z)T(t)$  teilen, erhalten wir:

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = 0, \quad (36)$$

wie gewöhnlich bekommen wir drei Terme, die jeweils nur von einer Variable abhängen und deren Summe gleich 0 ist. Diese Terme müssen somit unabhängig voneinander konstant sein und erfüllen die Differenzialgleichungen, die im Aufgabentext gegeben sind.

Es ist nun einfach die Dispersionsrelation herzuleiten

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (37)$$

$$\Rightarrow k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (38)$$

**Lösung 3.c)****(3 Punkte)**

Wir wissen, dass die parallelen Komponenten des elektrischen Feldes stetig sind. Da sie außerhalb der Platten null sind, müssen sie an der Grenzfläche ebenfalls null sein.

Aus den Randbedingungen für das elektrische Feld, da  $E_x$  parallel zu den leitenden Oberflächen ist, folgt  $E_x(z=0) = E_x(z=L) = 0$ . Aber der einzige Term in  $E_x$ , der von  $z$  abhängt, ist  $Z(z)$ , deshalb gilt  $Z(0) = Z(L) = 0$ .

Der Lösungsansatz von  $\partial_x^2 f(x) = -k^2 f(x)$  ist gegeben durch  $f = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$  mit  $k \in \mathbb{C}$ .

Also haben wir in diesem Fall:

$$Z(z) = A_z e^{ik_z z} + B_z e^{-ik_z z}. \quad (39)$$

Daraus folgt:

$$\begin{cases} A_z + B_z = 0 \\ A_z e^{ik_z L} + B_z e^{-ik_z L} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B_z = -A_z \\ A_z e^{-ik_z L} (e^{i2k_z L} - 1) = 0 \end{cases} \quad (40)$$

Abgesehen von der trivialen Lösung  $A_z = 0$ , erhalten wir eine Lösung für  $i2k_z L = i2\pi n$  und somit, wie im Text angegeben,  $k_z = \frac{n\pi}{L}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ .

Die allgemeinste Lösung ist gegeben durch die Summe:

$$Z(z) = \sum_{n \geq 0} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} z\right) \quad (41)$$

### Lösung 3.d)

(3 Punkte)

The general solutions are given by:

$$Y(y) = A_y(k_y)e^{ik_y y} + B_y(k_y)e^{-ik_y y} \quad (42)$$

$$T(t) = A_t(\omega)e^{i\omega t} + B_t(\omega)e^{-i\omega t} \quad (43)$$

As we have done for  $Z(z)$ , the most general solution will be a combination of solutions. In the case of  $Z(z)$ , this was a linear combination (since  $k_z$  takes discrete values and so we sum over its values). In this case, it will be given by an integral over the continuous values of  $k_y$  (cfr. Vorlesung 14):

$$Y(y) = \int_0^{+\infty} dk_y (A_y(k_y)e^{ik_y y} + B_y(k_y)e^{-ik_y y}) = \int_0^{+\infty} dk_y A_y(k_y)e^{ik_y y} - \int_{-\infty}^0 B_y(-k_y)e^{ik_y y} = \quad (44)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \tilde{A}_y(k_y)e^{ik_y y}, \quad (45)$$

where we have defined  $\tilde{A}_y(k_y) = -B_y(-k_y)$  to extend the domain of  $A(k_y)$  negative values of  $k_y$ .

An alternative and equivalent expression to the one in eq. 42 was seen in Vorlesung 15:

$$Y(y) = c \sin(k_y y + \alpha), \quad \text{with } c \in \mathbb{C}. \quad (46)$$

That this expression is equivalent can be seen by expanding the sine in complex form:

$$Y(y) = c \sin(k_y y + \alpha) = \frac{c}{2i} (e^{ik_y y + \alpha} - e^{-ik_y y - \alpha}) = \frac{c}{2i} e^{i\alpha} e^{ik_y y} - \frac{c}{2i} e^{-i\alpha} e^{-ik_y y}, \quad (47)$$

where as before this is a solution for any real value of  $k_y$ , so the most general solution is given by taking their integral over values of  $k_y$  (with the parameters  $c$  and  $\alpha$  depending on  $k_y$  in general).

$$Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y c(k_y) \sin(k_y y + \alpha(k_y)) \quad (48)$$

However,  $k_y$  and  $\omega$  are not completely free as they need to satisfy the dispersion relation. We have already seen that  $k_z = \frac{n\pi}{L}$  in order to satisfy the boundary condition. Given a value of  $k_z$ ,  $k_y$  can take arbitrary values, but then  $\omega$  will be fixed. More precisely  $\omega = c\sqrt{k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$ . For  $n = 0$  we have the trivial solution of the equation, but then the electric field is 0. The smallest value it can take is then  $n = 1$ . On the other hand,  $k_y = 0$  does not lead to a null electric field as we would have  $Y(y) = A_y(0) + B_y(0)$ . We then have that the smallest value it can take is  $\omega = \frac{c\pi}{L}$ .

## Aufgabe 4: Relativistischer Plattenkondensator (10 P)

Betrachten Sie zwei ruhende Platten parallel zur  $x$ - $y$  Ebene mit dem Abstand  $d$  zueinander und mit den Längen  $L_x$  und Breiten  $L_y$ . Die Platten sind mit entgegengesetzter Gesamtladung geladen: Die Platte bei  $z = -d/2$  hat Ladung  $Q$ , die Platte bei  $z = d/2$  hat Ladung  $-Q$ . Sie können annehmen, dass die Platten groß genug sind, dass das elektrische Feld zwischen ihnen konstant ist und in die  $z$  Richtung zeigt:  $\vec{E} = E_z \hat{e}_z$ .

4.a) Zeigen Sie, dass das elektrische Feld zwischen den beiden Platten gegeben ist durch

$$E_z = \frac{Q}{\epsilon_0 L_x L_y}. \quad (49)$$

4.b) Betrachten Sie nun einen Beobachter, der sich zwischen den Platten mit der Geschwindigkeit  $v$  in die  $x$  Richtung bewegt:  $\vec{r}(t) = (vt, 0, 0)$ . Was sind die Längen  $L'_x$  und Breiten  $L'_y$  der Platten im Bezugssystem des Beobachters? Was folgt daraus für das elektrische Feld  $E'_z$ ?

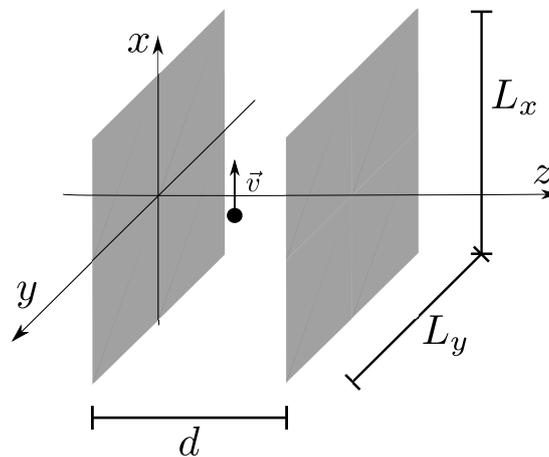
4.c) Zeigen Sie, dass das gleiche Ergebnis aus der direkten Anwendung der Formeln für die Lorentztransformation von elektrischen Feldern folgt:

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (50)$$

4.d) Was ist das magnetische Feld im Bezugssystem des bewegten Beobachters? Berechnen sie  $\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2$  sowohl im unbewegten Bezugssystem als auch im System des bewegten Beobachters.

**Lösung 4.a) (2 Punkte)**

Darstellung:



Wie gewohnt, nutzen wir den Satz von Gauß

• **1. Solution:**

Wir wenden den Gaußschen Satz separat für die beiden Platten in einem beliebigen Integrationsvolumen an und überlagern sie, um die gewünschten Ergebnisse herzuleiten.

Im Fall der positiv geladenen Platte erhalten wir (L für Links und R für Rechts):

$$\oint dV \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \vec{E}_L \cdot (-A \hat{e}_z) + \vec{E}_R \cdot (A \hat{e}_z) = 2AE = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (51)$$

wobei wir verwendet haben, dass  $\vec{E}_R = -\vec{E}_L = E \hat{e}_z$  ist, da die Feldlinien von positiven Ladungen weg und zu negativen hinzeigen.

Ähnlich erhalten wir für die negativ geladene Platte  $\vec{E}_R = -\vec{E}_L = -E \hat{e}_z$  mit  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ . Durch Superposition ist das Feld außerhalb null und innerhalb ist  $\vec{E} = E_z \hat{e}_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{e}_z$ .

• **2. Solution:**

Eine weitere Möglichkeit wäre, die beiden Platten gleichzeitig zu betrachten und zu nutzen, dass das Feld außerhalb null ist. (Dies kann bewiesen werden, indem der Gaußsche Satz in einem Volumen angewendet wird, das beide Platten einschließt. Da in diesem Fall die gesamte eingeschlossene Ladung verschwindet, ist das Feld auch null.) Durch Betrachtung desselben Gauß'schen Volumens für die positiv geladene Platte wie zuvor erhalten wir:

$$\int_f \vec{E} \cdot d\vec{f} = \vec{E}_L \cdot (-A \hat{e}_z) + \vec{E}_R \cdot (A \hat{e}_z) = AE_z = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \rightarrow E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (52)$$

wobei Folgendes benutzt wurde:  $\vec{E}_L = 0$  und  $\vec{E}_R = E_z \hat{e}_z$ .

In beiden Fällen, unter der Annahme, dass die Platten gleichmäßig geladen sind, ist ihre Oberflächendichte gegeben durch  $\sigma = \frac{Q}{L_x L_y}$ : die Gesamtladung über die Gesamtfläche.

Schließlich ist das Feld  $E_z = \frac{Q}{\epsilon_0 L_x L_y}$ .

**Lösung 4.b)**

**(3 Punkte)**

Wir können einfach die Formel für die Längenkontraktion anwenden:  $L'_x = L_x/\gamma$ . Es ist wichtig zu bemerken, dass die Kontraktion nur in Richtung der Bewegung des Beobachters stattfindet, also in Richtung  $x$ . Daher haben wir auch  $L'_y = L_y$ .

Die Ladung ist jedoch lorentzinvariant (aber nicht die Ladungsdichte!), also würden wir durch Anwendung des gleichen Verfahrens wie zuvor erhalten:

$$E'_z = \frac{Q}{\epsilon_0 L'_x L'_y} = \frac{\gamma Q}{\epsilon_0 L_x L_y} = \gamma E_z \quad (53)$$

**Lösung 4.c)**

**(2 Punkte)**

Das E-Feld transformiert wie folgend:

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (54)$$

Es gilt  $\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_x = 0$ ,  $\vec{B} = 0$  und  $\vec{E}_y = 0$ . Somit erhalten wir:

$$\vec{E}'_x = \vec{E}_x = 0 \quad (55)$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma \vec{E}_{\perp} = \gamma E_z \hat{e}_z \rightarrow E'_z = \gamma E_z \quad (56)$$

Dies ist konsistent mit dem vorherigen Ergebnis.

**Lösung 4.d)**

**(3 Punkte)**

Unter Lorentz-Boost transformiert das B-Feld wie folgend:

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}) \quad (57)$$

Mit demselben Input wie vorher ergibt sich:

$$\vec{B}'_x = \vec{B}_x = 0 \quad (58)$$

$$\vec{B}'_{\perp} = -\gamma \frac{v \hat{e}_x \times E_z \hat{e}_z}{c^2} = \frac{\gamma v E_z}{c^2} \hat{e}_y \quad (59)$$

Nun können wir den gefragt Term berechnen (man könnte sich hier an das letzte Übungsblatt erinnern und daran, dass die eine Lorentzinvariante Größe ist):

$$\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2 = \vec{E}^2 = E_z^2 \quad (60)$$

$$\vec{E}'^2 - c^2 \vec{B}'^2 = \gamma^2 E_z^2 - c^2 \left( \frac{\gamma v E_z}{c^2} \right)^2 = \gamma^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) E_z^2 = E_z^2 \quad (61)$$

Tatsächlich ist der Term gleich für beide Beobachter mit  $E_z^2 = Q^2 / (\epsilon_0 L_x L_y)^2$ .

## Aufgabe 5: Spule mit Material (10 P)

Gegeben sei eine unendlich lange Spule entlang der  $z$ -Achse mit dem Radius  $R$  und  $N_W$  Windungen pro Länge  $d_s$ , durch die der Strom  $I$  fließt. Für den Fall von Vakuum innerhalb der Spule, wurde in der Vorlesung gezeigt, dass

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 N_w I}{d_s} \hat{e}_z, \quad (62)$$

innerhalb der Spule und  $\vec{B}(\vec{r}) = 0$  außerhalb der Spule.

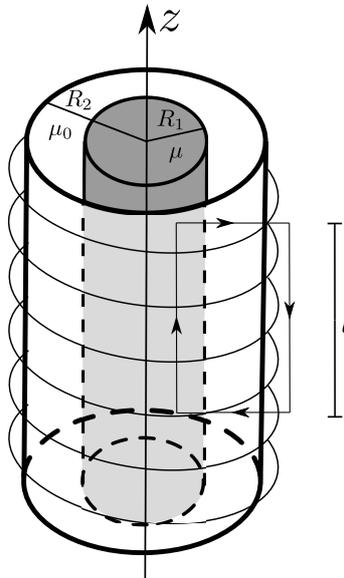
- 5.a) Betrachten Sie nun den Fall, dass die Spule mit einem paramagnetischen Material mit Permeabilität  $\mu$  gefüllt ist. Bestimmen Sie durch Vergleich der Maxwell-Gleichungen in Vakuum und in Materie die magnetische Feldstärke  $\vec{H}(\vec{r})$  und das Magnetfeld  $\vec{B}(\vec{r})$  innerhalb des Materials.
- 5.b) Betrachten Sie nun den Fall, dass die Spule den Radius  $R_2$  hat und mit einem paramagnetischen Material bis zum Radius  $R_1 < R_2$  gefüllt ist, während zwischen  $R_1$  und  $R_2$  Vakuum ist. Nehmen Sie an, dass es keine freien Ladungen oder Ströme an der Grenze zwischen Material und Vakuum gibt. Geben Sie (ohne Herleitung) die Stetigkeitsbedingungen für das  $H$ -Feld und das  $B$ -Feld an. Bestimmen Sie  $\vec{H}$  und  $\vec{B}$  für die beiden Regionen  $0 < \rho < R_1$  und  $R_1 < \rho < R_2$ .
- 5.c) Betrachten Sie eine kreisförmige Schleife  $L$  um das paramagnetische Material, das heißt eine Schleife mit Radius  $R_1$ , die in der  $x$ - $y$  Ebene liegt und um die  $z$  Achse zentriert ist ( $x^2 + y^2 = R_1^2$ ,  $z = 0$ ). Zeigen Sie, dass der magnetische Fluss  $\Phi_B$  durch die Schleife gegeben ist durch

$$\Phi_B = \pi \mu R_1^2 \frac{N_w I}{d_s}. \quad (63)$$

- 5.d) Nehmen Sie nun an, dass der Strom durch die Spule mit der Zeit variiert:  $I(t) = \alpha t$ , wobei  $\alpha$  eine Konstante mit Einheit  $A/s$  ist. Durch die zeitliche Änderung wird ein elektrisches Feld  $\vec{E}(\vec{r}) = E(\rho) \hat{e}_\phi$  innerhalb der Spule erzeugt. Bestimmen Sie  $E(R_1)$ .

**Lösung 5.a) (3 Punkte)**

Lassen Sie uns die Situation zuerst visualisieren (dies ist ein allgemeiner Fall, in dem das Material nicht die gesamte Spule ausfüllt, was für das Folgende nützlich ist):



Die Herleitung von  $\vec{H}$  verläuft ähnlich wie die des Magnetfeldes  $\vec{B}$  im Vakuum: Wir betrachten eine rechteckige Amperesche Schleife der Länge  $l$  und nutzen die 4. Maxwellgleichung. Wir nehmen jedoch die makroskopische Maxwellgleichung  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$ .

Wir verwenden den Satz von Stokes unter Berücksichtigung, dass das Feld außerhalb der Spule null ist:

$$IN_l = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{f} = \int_A \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot d\vec{f} = \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{l} = Hl \quad (64)$$

wobei  $N_l$  die Anzahl der Windungen in einer Länge  $l$  ist, da es  $N_w$  in einer Länge  $d_s$  gibt, bedeutet dies, dass es  $N_w l/d_s$  in einer Länge  $l$  gibt. Daraus folgern wir

$$\vec{H} = \frac{N_w I}{d_s} \hat{e}_z \quad (65)$$

Es gilt  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ . Also entspricht der Ausdruck genau dem im Vakuum mit  $\mu_0 \rightarrow \mu$ .

### Lösung 5.b)

(3 Punkte)

Aus  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$  and  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  kann hergeleitet werden, dass  $\vec{B}_\perp$  and  $\vec{H}_\parallel$  stetig sein müssen. In diesem Fall haben die Felder nur  $z$  Komponenten, d.h Komponenten parallel zur Grenzfläche ( $\hat{e}_z$  und  $\hat{e}_\varphi$  sind parallel, während  $\hat{e}_\rho$  senkrecht ist).

Das Feld  $\vec{H}$  ändert sich nicht für  $\rho < R_1$  und  $R_1 < \rho < R_2$ , d.h  $\vec{H} = \frac{N_w I}{d_s} \hat{e}_z$  im paramagnetischen Material und im Vakuum.

Der Zusammenhang zwischen  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$  ändert sich innerhalb und außerhalb des Materials:  $\vec{B}(\rho < R_1) = \mu \vec{H}$  und  $\vec{B}(R_1 < \rho < R_2) = \mu_0 \vec{H}$ .

Wir können feststellen, dass nur  $\vec{H}$  stetig ist ( $\vec{B}$  ist unstetig). Dabei sind die Stetigkeit Bedingungen dennoch erfüllt, da  $\vec{B}$  parallel zur Grenzfläche ist und seine parallele Komponente nicht stetig sein muss.

### Lösung 5.c)

(2 Punkte)

Der magnetische Fluss lässt sich einfach durch Integration von  $\vec{B}$  bestimmen:

$$\Phi_B(R_1) = \int_A B(\rho) \hat{e}_z d\vec{f} = 2\pi \int_0^{R_1} B(\rho') \rho' d\rho' = 2\pi \int_0^{R_1} \frac{\mu N_w I}{d_s} \rho' d\rho' = \quad (66)$$

$$= 2\pi \frac{N_w I}{d_s} \left( \mu \frac{\rho'^2}{2} \Big|_0^{R_1} \right) = \pi \frac{N_w I}{d_s} \mu R_1^2 = B(\rho < R_1) \pi R_1^2. \quad (67)$$

Die Rechnung lässt sich vereinfachen, wenn man ausnutzt, dass das B-Feld für  $\rho < R_1$  konstant ist und damit gilt für den magnetischen Fluss  $\Phi_B = B \times \text{Fläche}$ .

### Lösung 5.d)

(2 Punkte)

Wir nutzen die Maxwell Gleichung  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\mu_{(0)} N_w \alpha}{d_s} \hat{e}_z = -\frac{\mu_{(0)} N_w \alpha}{d_s} \hat{e}_z$ .

#### 1. Lösungsweg: Integralform

Es ist praktisch, das Ergebnis aus der vorherigen Teilaufgabe zu verwenden, da wir durch Anwendung von Stokes auf eine kreisförmige Amper'sche Schleife erhalten:

$$\int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{f} = \int_{\partial A} E(\rho) \hat{e}_\varphi \cdot d\vec{l} = 2\pi \rho E(\rho) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\pi \frac{N_w \alpha}{d_s} \mu R_1^2 \quad (68)$$

woraus wir schließen können, dass  $\vec{E} = E(\rho) \hat{e}_\varphi$  mit  $E(\rho) = -\frac{N_w \alpha}{2d_s} \mu \frac{R_1^2}{\rho}$  ist.

#### 2. Lösungsweg: Differentialform

Wir könnten auch die Rotation explizit ausschreiben und dann integrieren,  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial E(\rho)}{\partial z} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E(\rho))}{\partial \rho} \hat{e}_z$ . In diesem Fall müssten wir jedoch die Randbedingung explizit verwenden, da das Ergebnis beim Integrieren der Differentialgleichung bis auf eine Konstante definiert ist:  $E(\rho) = \frac{c}{\rho} - \frac{\mu N_w \alpha}{d_s}$ . Wir setzen  $c = 0$ , um Divergenzen für  $\rho = 0$  zu vermeiden.

In diesem Fall, um das Ergebnis auf  $R_1 < \rho < R_2$  zu erweitern, müssten wir auch die Randbedingung für  $\rho = R_1$  verwenden, während das mit dem Gesamtfluss automatisch erledigt wird.

## Hinweise

- Als Hilfsmittel ist ein von Ihnen beidseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt erlaubt.
- In der Klausur wird das SI-Einheitensystem verwendet.
- Sie können folgende Formeln ohne Beweis benutzen:

## Vektoroperatoren in zylindrischen Koordinaten

Für  $f = f(\rho, \varphi, z)$  und  $\vec{A} = A_\rho(\rho, \varphi, z) \hat{e}_\rho + A_\varphi(\rho, \varphi, z) \hat{e}_\varphi + A_z(\rho, \varphi, z) \hat{e}_z$ :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z \\ \Delta f &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \vec{A} &= \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{e}_\rho + \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{e}_z\end{aligned}$$

## Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten

Für  $f = f(r, \theta, \varphi)$  und  $\vec{A} = A_r(r, \theta, \varphi) \hat{e}_r + A_\theta(r, \theta, \varphi) \hat{e}_\theta + A_\varphi(r, \theta, \varphi) \hat{e}_\varphi$ :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi \\ \Delta f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ \nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \hat{e}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\varphi\end{aligned}$$

## Kugelflächenfunktionen

Die Kugelflächenfunktionen sind gegeben durch

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_\ell^{(m)}(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

mit den assoziierten Legendre-Polynomen

$$P_\ell^{(m)} = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{\ell m}}{\partial \varphi^2} + \ell(\ell + 1) Y_{\ell m} &= 0, \\ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{\ell' m'}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) &= \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}, \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi) &= \delta(\cos \theta' - \cos \theta) \delta(\varphi' - \varphi).\end{aligned}$$