Theoretische Physik C WS 09/10
Dozent: Prof. Dr. Kühn; Übungsleiter: Dr. Uccirati
Karlsruhe Institut für Technologie

Inoffizielle Musterlösung der Probeklausur

Tafelabschrieb vom 9. Dezember 2009

Vorwort

Diese Musterlösung wurde während der Vorlesung am 9. Dezember 2009 erstellt. Sie ist ein Abschrieb der Musterlösung des Übungsleiters, es können also Fehler enthalten sein. Folglich sind alle Angaben ohne Gewähr und mit Vorsicht zu genießen. Falls jemand Fehler findet, soll dieser ihn bitte nicht unauffällig einstecken, sondern bitte an bekannter Stelle abgeben. Finderlohn sind ein Skript mit weniger Fehlern und ein Dank des Autors.

Aufgabe 1

a) Gegegeben sei das Potenzial:

$$\phi = \alpha(x^3 + xy + y + z^2)$$

Es gilt:

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\alpha \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 1 \\ 3z^2 \end{pmatrix}$$

b) $I = \int_c \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{E}$, da wir hier ein Potenzialfeld haben, ist die Lösung einfacher:

$$I = -\left[\phi(1{,}1{,}1) - \phi(0{,}0{,}0)\right] = -4\alpha$$

Aufgabe 2

$$\nabla \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \nabla \times \vec{r} = 0$$

$$\nabla \times \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\triangle \vec{r}^2 = \frac{\partial^2 \vec{r}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{r}^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{r}^2}{\partial z^2} = 2 + 2 + 2 = 6$$

mit $\vec{r} = x^2 + y^2 + z^2$

$\vec{r} = \nabla f(\vec{r}^2)$. Für die Rotation des Gradienten eines skalaren Feldes ϕ gilt: rot grad$\phi = 0$, es folgt:

$$\nabla \times \vec{F} = \nabla \times \nabla f = 0$$

Aufgabe 3

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{F} \cdot \vec{E} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

mit $\vec{E_a} = E_a \hat{r}$ und $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

gilt sowohl für die leitende als auch für die homogen geladene Kugel.

Für die leitende Kugel gilt: $\vec{E_i} = 0$

Für die homogen geladene Kugel gilt aber: $4\pi r^2 E_i = \frac{Q_i}{\varepsilon_i}$

Für die Ladungsdichte ρ gilt:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

$$Q_i = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = Q \frac{r^3}{a^3}$$

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \frac{r^3}{a^3} \Rightarrow E_i = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{a^3}$$

$$\vec{E} = E_0 \frac{\vec{r}}{r_0} \mathrm{e}^{-\frac{|\vec{r}^2|}{r_0^2}}$$

Es gilt

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \rho = \varepsilon_0 \nabla \vec{E}$$

$$\nabla \vec{E} = \frac{E_0}{r_0} \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_i} \left(r_i \mathrm{e}^{-\frac{\vec{r}}{r_0^2}} \right) = \frac{\varepsilon_0}{r_0} \sum_{i=1}^{3} \left(\mathrm{e}^{-\frac{|\vec{r}^2|}{r_0^2}} + r_i \mathrm{e}^{-\frac{|\vec{r}^2|}{r_0^2}} - \left(\frac{2r_i}{r_0^2} \right) \right)$$

$$= \frac{E_0}{r_0} \left(3\mathrm{e}^{-\frac{|\vec{r}^2|}{r_0^2}} - 2\frac{|\vec{r}^2|}{r_0^2} \mathrm{e}^{-\frac{|\vec{r}^2|}{r_0^2}} \right)$$

$$\rho = \varepsilon_0 \frac{E_0}{r_0} \mathrm{e}^{-\frac{|\vec{r}^2|}{r_0^2}} \left(3 - 2\frac{|\vec{r}^2|}{r_0^2} \right)$$

Aufgabe 4

a)

$$\varepsilon\left(\vec{x}\right) = \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2$$
$$\vec{E}\left(\vec{x}\right) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{x}-\vec{x}_1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^3} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{x}-\vec{x}_2}{|\vec{x}-\vec{x}_2|^3}$$
$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}_1|^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}_2|^2 + \varepsilon_0\vec{E}_1\vec{E}_2$$
$$\varepsilon_S = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\frac{q_1^2}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^4} + \frac{q_2^2}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_2|^4}\right]$$
$$\varepsilon_{WW} = \varepsilon_0\frac{q_1\cdot q_2}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2}\cdot\frac{\left(\vec{x}-\vec{x}_1\right)\left(\vec{x}-\vec{x}_2\right)}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^3|\vec{x}-\vec{x}_2|^3}$$

b)

$$\delta U_{WW} = -\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{x}_1-\vec{x}_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^3}\,\mathrm{d}\vec{l}$$

Aufgabe 5

$$V\left(x,z\right) = v_0\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{3\pi}{a}z\right)$$
$$\triangle\phi = 0$$
$$\phi = \vec{X}\left(x\right)\vec{Y}\left(y\right)\vec{Z}\left(z\right)$$
$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$
$$X = A_1\sin\left(\alpha x\right) + A_2\cos\left(\alpha x\right)$$
$$Y = B_1\sinh\left(y\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right) + B_2\cosh\left(y\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)$$
$$Z = C_1\sin\left(\beta z\right) + C_2\cos\left(\beta t\right)$$

Aus den Randbedingungen folgt $A_2 = B_2 = C_2 = 0$.

$$\sin\left(\alpha x\right) = 0 \Rightarrow \alpha a = m\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{m\pi}{a}$$

$Z\left(c\right) = 0$, $\sin\left(\beta c\right) = 0$, $\beta C = m\pi$, $\beta\frac{m\pi}{c}$

$$\phi = \sum_{n,m} A_{n,m}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{c}z\right)\sinh\left(y\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2}\right)$$
$$\sum A_{n,m}\sin\left(\frac{nm}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{c}z\right)\sinh\left(b\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2}\right) = v_0\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\sin\left(\frac{3\pi}{c}z\right)\right)$$
$$A_{n,m} = \frac{v_0}{\sinh\left(b\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2}\right)}\delta_{n2}\delta_{m3}$$
$$\phi = \frac{v_0}{\sinh\left(b\pi\sqrt{\frac{4}{a^2}+\frac{9}{c^2}}\right)}\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{3\pi}{c}z\right)\sinh\left(y\pi\sqrt{\frac{b}{a^2}+\frac{9}{c^2}}\right)$$

Aufgabe 6

$$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z), \vec{p'} = (-p_x, -p_y, -p_z)$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(\vec{r} - \vec{r_0}\vec{p})}{|\vec{r} - \vec{r_0}|^3} + \frac{\left(\vec{r} - \vec{r_0'}\vec{p'}\right)}{|\vec{r} - \vec{r_0'}|^3}\right]$$

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(x, y, -a)(p_x, p_y, p_z)}{|(x, y, -a)|^3} + \frac{(x, y, -a)(-p_x, -p_y, p_z)}{|(x, y, a)|^3}\right] = 0$$

$\sigma = \varepsilon_0 E_0$, $\vec{E} = -\nabla\phi$, $\vec{v} = \vec{p}, \vec{p'}$

$$\nabla\frac{|\vec{r} \pm \vec{r_0}|\vec{v}}{|\vec{r} \pm \vec{r_0}|^3} = -3\frac{(\vec{r} \pm \vec{r_0})}{|\vec{r} \pm \vec{r_0}|^5}\left[(\vec{r} \pm \vec{r_0})\vec{v}\right] + \frac{\vec{v}}{|\vec{r} \pm \vec{r_0}|^3}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[3\frac{(\vec{r} \pm \vec{r_0})}{|\vec{r} \pm \vec{r_0}|^5}\left[(\vec{r} \pm \vec{r_0})\vec{p} + 3\frac{(\vec{r} \pm \vec{r_0})}{|\vec{r} \pm \vec{r_0}|^5}\left[(\vec{r} \pm \vec{r_0})\vec{p'}\right]\right] - \frac{\vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r_0}|^3} - \frac{\vec{p'}}{|\vec{r} - \vec{r_0}|^3}\right]$$

$$\vec{E}(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-6(0,0,a)(x\beta_x + y\beta_y + a)}{(x^2 + y^2 + a^2)^5} - \frac{2(0,0,p_z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Aufgabe 7