Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik III
Theorie C – Elektrodynamik: Zwischenklausur WS 12-13

Prof. Dr. Alexander Mirlin
Dr. Igor Gornyi

Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Mi 12.12.2012, 17:30-19:30

Aufgabe 1: **Mathematische Grundlagen** (4+4+2+5=15 Punkte)

(a) Berechnen Sie

$$\vec{\nabla}_r \cdot \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) \qquad \text{und} \qquad \vec{\nabla}_r \times \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right),$$

wobei $\vec{k}$ ein konstanter Vektor ist.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}_r \cdot \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) &= e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \left(\vec{\nabla}_r \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right) + \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot \left(\vec{\nabla}_r\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) \\
&= e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \vec{\nabla}_r \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot i\vec{k}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\
&= e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \frac{d - 1 + i\vec{k}\cdot\vec{r}}{|\vec{r}|} \\
&\underbrace{=}_{d=3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \frac{2 + i\vec{k}\cdot\vec{r}}{|\vec{r}|},
\end{aligned} \tag{1}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}_r \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} &= \frac{1}{|\vec{r}|} \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{r} \right) + \vec{r} \cdot \left(\vec{\nabla}_r\, \frac{1}{|\vec{r}|} \right) \\
&= \frac{d}{|\vec{r}|} - \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{d-1}{|\vec{r}|}.
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}_r \times \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) &= e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \left[\vec{\nabla}_r \times \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right] - \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \times \left(\vec{\nabla}_r\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) \\
&= 0 - \left[\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \times (i\vec{k}) \right] e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\
&= e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \frac{i\vec{k} \times \vec{r}}{|\vec{r}|}.
\end{aligned} \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}_r \times \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} &= \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{\nabla}_r \times \vec{r} - \vec{r} \times \left(\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r}|}\right) = 0, \\
\varepsilon_{ijk}\partial_i r_j &= \varepsilon_{ijk}\delta_{ij} = \varepsilon_{iik} = 0, \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}_r \times \vec{r} = 0, \\
\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r}|} &= -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \times \vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r}|} = -\underbrace{[\vec{r} \times \vec{r}]}_{=0} \frac{1}{|\vec{r}|^3} = 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

(b) Berechnen Sie die Integrale mit der Delta-Funktion:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^2\ \delta(x-3) \qquad \text{und} \qquad \int_0^{\pi} d\theta\ \sin\theta\ \delta\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right).
$$

Lösung:

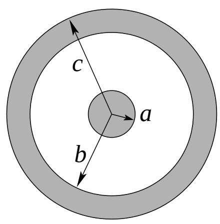
$$
\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^2\ \delta(x-3) = 3^2 = 9. \tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} d\theta\ \sin\theta\ \delta\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\pi} d\theta\ \sin\theta \sum_i \frac{1}{|\cos(\theta_i)|}\delta(\theta - \theta_i) \\
&= \sum_{i=1,2} \frac{1}{2}\frac{1}{|\cos(\theta_i)|} = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{d\sin\theta}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_i} &= |\cos\theta_i|, \\
\sin\theta_i &= \frac{1}{2}, \quad 0 \le \theta_i \le \pi, \quad \cos\theta_i = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta_i} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \\
i = 1,2: \quad |\cos\theta_i| &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad (\theta_1 = \pi/6,\ \theta_2 = 5\pi/6).
\end{aligned} \tag{7}
$$

Aufgabe 2: **Kugelkondensator** (12+3+9+6=30 Punkte)

Eine massive, metallische Kugel mit Radius a ist umschlossen von einer konzentrischen, dicken, metallischen Kugelschale, deren Innendurchmesser $2b$ und Außendurchmesser $2c$ sind (s. Skizze).



(a) Betrachten Sie zuerst den allgemeinen Fall mit beliebigen Ladungen Q_1 und Q_2 auf der Kugel bzw. der Schale. Ermitteln Sie die 2×2 Kapazitätsmatrix C_{ij} dieses Kugelkondensators explizit.

Lösung:

$$Q_i = \sum_j C_{ij} V_j, \qquad V_j = \Phi_j - \Phi_\infty \underbrace{=}_{\Phi_\infty = 0} \Phi_j, \tag{8}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi(r) = E(r)\vec{e}_r. \tag{9}$$

Q_1 auf Kugel, Q_2 auf Kugelschale:

1. $b > r > a$:

$$\oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV, \tag{10}$$

$$4\pi E_1 r^2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0}, \tag{11}$$

$$E_1(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \tag{12}$$

$$\Phi_1(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \varphi_1. \tag{13}$$

2. $b < r < c$:

$$\vec{E}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_2 = \text{const.} \tag{14}$$

$$Q_b = -Q_1, \qquad Q_c = Q_2 - Q_b = Q_2 + Q_1. \tag{15}$$

3. $r > c$:

$$\oint \vec{E}_3 \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV \tag{16}$$

$$4\pi E_3 r^2 = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0} \tag{17}$$

$$E_3(r) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{18}$$

$$\Phi_3(r) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + \varphi_3, \quad \varphi_3 = 0 \quad \text{da} \quad \Phi(r \to \infty) \to 0. \tag{19}$$

Nun bestimmen wir φ_1 :

$$\Phi_1(b) = \Phi_2 = \Phi_3(c) \tag{20}$$

$$\Phi_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 c} \tag{21}$$

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 b} + \varphi_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 c} \tag{22}$$

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 c} \tag{23}$$

$$\Phi_1(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 c} \tag{24}$$

$$\Phi(a) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 c}. \tag{25}$$

$$\Phi_{\text{Kugel}} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 c}, \tag{26}$$

$$\Phi_{\text{Schale}} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 c}. \tag{27}$$

$$\underline{\Phi} = \hat{P}\underline{Q} \tag{28}$$

$$\hat{P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{c} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \tag{29}$$

$$\mathrm{Det}\hat{P} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) - \frac{1}{c^2} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{b-a}{abc} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \hat{P}^{-1} = 4\pi\epsilon_0 \frac{abc}{b-a} \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & -\frac{1}{c} \\ -\frac{1}{c} & \frac{1}{c} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \end{pmatrix} && (31) \\ &= 4\pi\epsilon_0 \begin{pmatrix} \frac{ab}{b-a} & -\frac{ab}{b-a} \\ -\frac{ab}{b-a} & \frac{ab}{b-a} + c \end{pmatrix} && (32) \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie die Gesamtenergie des Kondensators mit den Ladungen Q_1 und Q_2.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\sum_{ij}(C^{-1})_{ij}Q_iQ_j = \frac{1}{2}\left(P_{11}Q_1^2 + 2P_{12}Q_1Q_2 + P_{22}Q_2^2\right) && (33) \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\left[\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)Q_1^2 + \frac{2}{c}Q_1Q_2 + \frac{1}{c}Q_2^2\right]. && (34) \end{aligned}$$

(c) Nun trägt die Kugel die Ladung Q_1 und die Schale sei ungeladen ($Q_2 = 0$). Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ und das Potential Φ im gesamten Raum, sowie die Oberflächenladungsdichte σ_a auf der Kugel sowie σ_b und σ_c auf der Schale.

$Q_2 = 0$:

1. $r < a$:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= 0, && (35) \\ \Phi(r) &= \Phi_1(a)\big|_{Q_2=0} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) && (36) \end{aligned}$$

2. $a < r < b$:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}, && (37) \\ \Phi(r) &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) && (38) \end{aligned}$$

3. $b < r < c$:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= 0, && (39) \\ \Phi(r) &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 c} && (40) \end{aligned}$$

4. $r > c$:

$$\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}, \tag{41}$$
$$\Phi(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{42}$$

$$\sigma_a = \frac{Q_1}{4\pi a^2}, \qquad \sigma_b = -\frac{Q_1}{4\pi b^2}, \qquad \sigma_c = \frac{Q_1}{4\pi c^2}. \tag{43}$$

(d) Nun wird die Kugelschale geerdet (die Kugel trägt wieder die Ladung Q_1). Wie verändern sich $\vec{E}$, Φ und die Oberflächenladungen?

$$Q_b = -Q_1, \qquad \Phi(b) = 0. \tag{44}$$

1. $r < a$:

$$\vec{E} = 0, \tag{45}$$
$$\Phi(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right). \tag{46}$$

2. $a < r < b$:

$$\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}, \tag{47}$$
$$\Phi(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right). \tag{48}$$

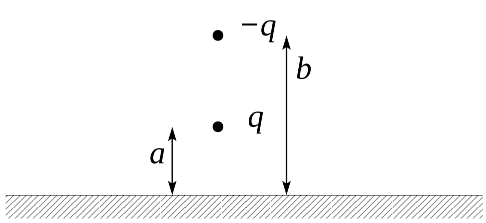
3. $b < r$:

$$\vec{E} = 0, \tag{49}$$
$$\Phi(r) = 0. \tag{50}$$

$$\sigma_a = \frac{Q_1}{4\pi a^2}, \qquad \sigma_b = -\frac{Q_1}{4\pi b^2}, \qquad \sigma_c = 0. \tag{51}$$

Aufgabe 3: **Zwei Ladungen** (7+7+10+6=30 Punkte)

Zwei Ladungen q und $-q$ befinden sich an den Punkten $\vec{r}_+ = (0, 0, a)$ bzw. $\vec{r}_- = (0, 0, b)$ in den Abständen $b > a > 0$ von einer geerdeten leitenden Ebene $z = 0$ (s. Abbildung).



(a) Finden Sie das Potential dieser Anordnung im gesamten Raum.
Spigelladungen: $\vec{R}_- = (0, 0, -a)$ und $\vec{R}_+ = (0, 0, -b)$
Potential:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r} - a\vec{e}_z|} - \frac{1}{|\vec{r} - b\vec{e}_z|} - \frac{1}{|\vec{r} + a\vec{e}_z|} + \frac{1}{|\vec{r} + b\vec{e}_z|}\right). \tag{52}$$

(b) Entwickeln Sie das Potential für große Abstände ($|\vec{r}| \gg b$) von der Ebene zur ersten nichtverschwindenden Ordnung.

Multipolentwicklung:

Monopol: $Q = 0$

Dipol: $\vec{p} = [(-q)b + qa + (-q)(-a) + q(-b)]\,\vec{e}_z = 2q(a-b)\vec{e}_z$

Potential:

$$\Phi \simeq \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q(a-b)\cos\vartheta}{2\pi\epsilon_0 r^2}, \qquad \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \cos\vartheta. \tag{53}$$

(c) Berechnen Sie die auf der Ebene induzierte Flächenladungsdichte σ und die gesamte, auf der Ebene induzierte Ladung.

$$\begin{aligned}
\vec{E}(z=0^+) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\vec{r}-a\vec{e}_z}{(\rho^2+a^2)^{3/2}} - \frac{\vec{r}-b\vec{e}_z}{(\rho^2+b^2)^{3/2}} - \frac{\vec{r}+a\vec{e}_z}{(\rho^2+a^2)^{3/2}} + \frac{\vec{r}+b\vec{e}_z}{(\rho^2+b^2)^{3/2}}\right] \\
&= \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\vec{e}_z\left[-\frac{a}{(\rho^2+a^2)^{3/2}} + \frac{b}{(\rho^2+b^2)^{3/2}}\right], && (54) \\
\sigma &= \frac{q}{2\pi}\left[-\frac{a}{(\rho^2+a^2)^{3/2}} + \frac{b}{(\rho^2+b^2)^{3/2}}\right]. && (55)
\end{aligned}$$

$$Q_{ind} = 0. \tag{56}$$

(d) Welche Kraft wirkt auf die Ebene?

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon}\left[\frac{-1}{(2a)^2} + \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{-1}{(2b)^2}\right]. \tag{57}$$

Bonusaufgabe **(5+5=10 Bonuspunkte)**

Skizzieren Sie das Feldlinienbild für $b - a \ll a$ (d.h. mit dem Abstand der Punktladungen viel kleiner als a) und für $b \gg a$.

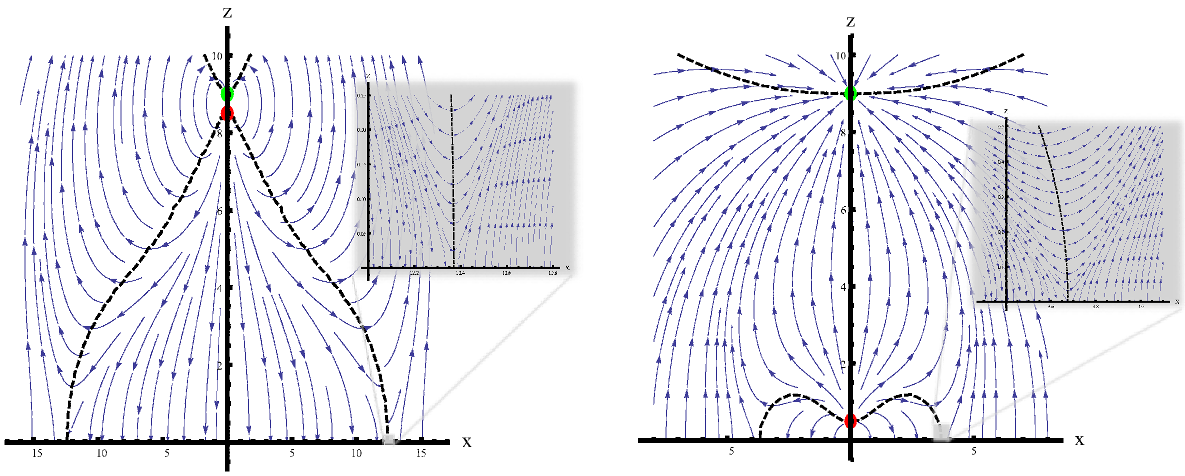


Abbildung 1: Feldlinien für Ladungen auf den Positionen 8.5 und 9 bzw. 0.5 und 9. Gestrichelte Linien: $E_z = 0$.

Lösung: s. Abbildung 1.

Punkteverteilung Bonusaufgabe (in jeder Skizze):

1P Kleiner Dipol: Dipolfeld zwischen den Ladungen ($b - a \ll a$) bzw. zwischen Ladung und Spiegelladung in der Nähe der Oberfläche ($b \gg a$)

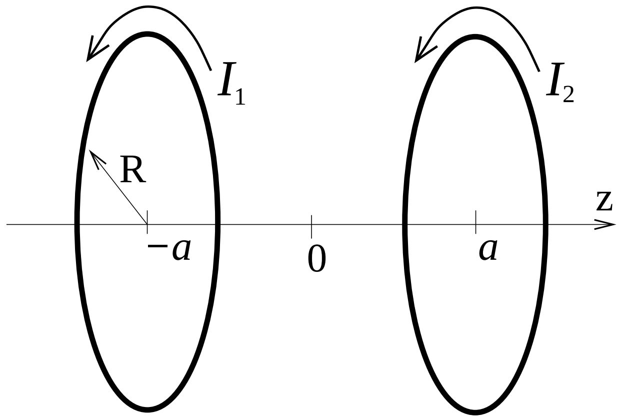
1P Großer Dipol: Feldkonfiguration Ladungen-Platte

1P $\vec{E} \perp$ Platte

2P Position von $E_z\,(z = 0^+) = 0$ und Feldlinienkonfiguration an dieser Stelle (insbesondere Änderung der Richtung der Pfeile).

Aufgabe 4: **Helmholtz Spulen** (10+8+7=25 Punkte)

Durch zwei parallel in den Ebenen $z = -a$ bzw. $z = a$ angeordnete Metalldrahtringe mit Radius R fließt jeweils der Strom I_1 bzw. I_2 (s. Skizze).



(a) Berechnen Sie das magnetische Feld auf der z-Achse.

$$B = \frac{\mu_0 R^2}{2}\left[\frac{I_1}{((z+a)^2+R^2)^{3/2}} + \frac{I_2}{((z-a)^2+R^2)^{3/2}}\right] \qquad \left(\text{Gauss:} \quad \mu_0 \to \frac{4\pi}{c}\right). \tag{58}$$

(b) Betrachten Sie nun den Grenzfall $a \gg R$. Berechnen Sie die Gegeninduktivität (Induktivitätskoeffizient M_{12}) der Spulen.

$a \gg R$:

$$z = -a: \quad B \simeq \frac{\mu_0 R^2}{2}\left[\frac{I_1}{R^3} + \frac{I_2}{(2a)^2}\right] \tag{59}$$

$$\Phi_j = \sum_i M_{ji} I_i \tag{60}$$

$$\Phi_1 \simeq \pi R^2 \, B|_{z=-a} \simeq \frac{\pi \mu_0 R^4}{2}\left[\frac{I_1}{R^3} + \frac{I_2}{(2a)^3}\right] \tag{61}$$

$$M_{12} = \frac{\pi \mu_0 R^4}{16 a^3} = M_{21}. \tag{62}$$

(c) Berechnen Sie für $a \gg R$ die Kraft, die notwendig ist, um die beiden Leiterschleifen entlang der z-Achse voneinander zu entfernen.

$$F = \left|\frac{\partial W_{\mathrm{magn}}}{\partial a}\right| \tag{63}$$

$$W_{\mathrm{magn}} = \frac{1}{2}\sum_{ij} M_{ij} I_i I_j = \mathrm{const}(a) + M_{12} I_1 I_2 \tag{64}$$

$$F = \frac{3\pi}{16}\frac{\mu_0 R^4}{a^4} I_1 I_2. \tag{65}$$