Übungsklausur zur Vorlesung
Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Kasprzik, Dr. L. Mihaila 18.12.2013

Klausur A Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

Name: Gruppe:

Matrikelnummer:

Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Geben Sie bitte auch das Aufgabenblatt ab.

Aufgabe:	1	2	3	$\sum$

Hilfsmittel: Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe 1: "Quickies" *(14 Punkte)*

a) Berechnen Sie $\vec{\nabla} r$. *(2 Punkte)*
Lösung: $(\vec{\nabla} r)_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{\sum_{j=1}^{3} x_j^2} = x_i/r \to \vec{\nabla} r = \vec{r}/r = \vec{e}_r$.

b) Gegeben sei eine Ladungsverteilung

$$\varrho(r,\vartheta,\phi) = k\,\theta(R_2 - r)\theta(r - R_1)\delta(\cos\vartheta)\, r^2 \sin\vartheta\,, \qquad R_2 > R_1 > 0\,,$$

in Kugelkoordinaten. Die Gesamtladung sei gleich Q. Berechnen Sie k. *(4 Punkte)*
Lösung:

$$Q = k \underbrace{\int_{R_1}^{R_2} r^4 \mathrm{d}r}_{=1/5(R_2^5 - R_1^5)} \underbrace{\int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\vartheta \sqrt{1-\cos^2\vartheta}\,\delta(\cos\vartheta)}_{=1} \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi}_{=2\pi} = k\frac{2\pi}{5}(R_2^5 - R_1^5)\,, \quad k = \frac{5Q}{2\pi(R_2^5 - R_1^5)}\,.$$

c) Wie würden die Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik lauten, falls es magnetische Monopole gäbe? *(2 Punkte)*
Lösung: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_e$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m$

d) Das Vektorpotential eines Dipols lautet $\vec{A}_D(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$. Zeigen Sie, dass für die magnetische Induktion gilt:

$$\vec{B}_D(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(3\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right)$$

Hinweis: Es ist $\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$. *(6 Punkte)*
Lösung: Ergebnis folgt mit $\vec{B}_D = \vec{\nabla} \times \vec{A}_D$ und

$$\begin{aligned}
\left[\vec{\nabla} \times \left(\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right]_i &= \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\epsilon_{kln}m_l\frac{x_n}{r^3} \quad \text{(Summenkonvention)} \\
&= m_l(\delta_{il}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{lj})\left[\frac{\delta_{nj}}{r^3} - \frac{3x_jx_n}{r^5}\right] \quad \text{(Produktregel)} \\
&= \frac{3m_i}{r^3} - \frac{m_i}{r^3} - 3\frac{m_ir^2}{r^5} + 3\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^5}x_i \\
&= -\frac{m_i}{r^3} + 3\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^5}x_i
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Greensche Funktion (*11 Punkte*)

Betrachten Sie eine unendlich ausgedehnte, leitende Ebene $z = 0$. Innerhalb eines Kreises um den Ursprung vom Radius a in dieser Ebene habe das Potential den festen Wert $\varphi = U$, und außerhalb dieses Kreises sei $\varphi = 0$.

a) Geben Sie die Greensche Funktion für Dirichletsche Randbedingungen $G_D(\vec{r}, \vec{r}\,')$ für den Halbraum $V = \{\vec{r} : z > 0\}$ an. Erinnern Sie sich hierzu an den Zusammenhang mit der Methode der Spiegelladungen. Beachten Sie, dass G_D auf ∂V (d.h. für $z = 0$) verschwinden muss.
Hinweise: Es ist allgemein $G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + f(\vec{r}, \vec{r}\,')$, mit $\Delta f(\vec{r}, \vec{r}\,') = 0$ für alle $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ in V. Beachten Sie, dass $\Delta G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = -1/\epsilon_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$ für alle $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ in V. *(4 Punkte)*
Lösung: Sei Ladung q am Ort $\vec{r}\,' = (x', y', z')^{\mathrm{T}}$ und Spiegelladung $q' = -q$ am Ort $\vec{r}\,'' = (x', y', -z')^{\mathrm{T}}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}\,''|}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right)
\end{aligned}$$

Es gilt $\varphi(x, y, z = 0) = 0$

$$\Rightarrow \quad G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right)$$

b) Leiten Sie einen Integralausdruck für das Potential an einem beliebigen Punkt P in dem ladungsfreien Halbraum $z > 0$ her.
Hinweis: Verwenden Sie Zylinderkoordinaten. Gehen Sie von der allgemeinen Darstellung des Potentials

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}^3r'\,\varrho(\vec{r}\,')G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') - \epsilon_0 \oint_{\partial V} \varphi(\vec{r}\,')\frac{\partial G_D}{\partial n'}\,\mathrm{d}f'$$

aus, wobei $\vec{n}'$ die nach außen gerichtete Flächennormale auf ∂V ist $(\partial G_D/\partial n' = \vec{n}' \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}\,'}G_D)$. *(4 Punkte)*
Lösung: $\varrho(\vec{r}\,') = 0 \quad \Rightarrow$

$$\varphi(\vec{r}) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x' \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y'\varphi(x', y', z' = 0)\left.\frac{\partial G_D}{\partial z'}\right|_{z'=0},$$

wobei

$$\left.\frac{\partial G_D}{\partial z'}\right|_{z'=0} = \frac{2z}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}$$

und $\varphi(x', y', z' = 0) = U$ für $\sqrt{y'^2 + x'^2} < a$, sonst Null.
N.B.: $\vec{n}' = -\vec{e}_z$.
In Zylinderkoordinaten:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Uz}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \int_0^a \frac{1}{[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') + z^2]^{3/2}} \rho' \mathrm{d}\rho'$$

mit $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\rho' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ und $x = \rho \cos\phi$, etc.

c) Das Resultat für das Potential aus Teil b) lautet

$$\varphi(\vec{r}) = \dots .$$

Zeigen Sie, dass das Potential entlang der Achse, die senkrecht zur Ebene $z = 0$ durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft, gegeben ist durch

$$\varphi(0, \phi, z) = U \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) .$$

(3 Punkte)

Lösung: Entlang der z-Achse gilt $\rho = 0 \Rightarrow$

$$\varphi(\rho = 0, z) = \frac{Uz}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \int_0^a \frac{1}{[\rho'^2 + z^2]^{3/2}} \rho' \mathrm{d}\rho' = U \left[\frac{-z}{(\rho'^2 + z^2)^{1/2}} \Big|_0^a \right] = U \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right)$$

Aufgabe 3: Radialsymmetrisches elektrisches Feld *(15 Punkte)*

Betrachten Sie das kugelsymmetrische elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{k}{\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{(r + a)^2}, \quad a > 0 .$$

a) Berechnen Sie das zugehörige Potential $\varphi(r)$. *(3 Punkte)*
Lösung: Mit $\vec{\nabla} f(r) = f'(r) \vec{e}_r$ und $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ folgt:

$$\varphi(r) = -\frac{k}{\epsilon_0} \int \frac{\mathrm{d}r}{(r + a)^2} = \frac{k}{\epsilon_0} \frac{1}{(r + a)} + C ,$$

$C = 0$ falls $\varphi(r) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Berechnen Sie die Ladungsdichte $\varrho(r)$.
(*Zwischenergebnis:* $\varrho(r) = 2k \frac{a}{r} \frac{1}{(r+a)^3}$) *(4 Punkte)*
Lösung:

$$\varrho(r) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\epsilon_0}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = 2k \frac{a}{r} \frac{1}{(r + a)^3} \quad \text{(Produktregel)} .$$

c) Berechnen Sie die Gesamtladung Q. *(4 Punkte)*
Lösung:

$$\begin{aligned}
Q &= 2ka \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\infty} \frac{r\mathrm{d}r}{(r + a)^3} \quad \text{(Partielle Integration)} \\
&= 8\pi ka \Big(-\frac{1}{2} \frac{r}{(r + a)^2} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{(r + a)^2} \Big) \\
&= 4\pi ka \Big[-\frac{r}{(r + a)^2} - \frac{1}{(r + a)} \Big]_0^{\infty} \\
&= 4\pi k \quad \text{(Substitution auch möglich)}
\end{aligned}$$

d) Berechnen Sie die elektrostatische Energie des Feldes gemäß $W = \epsilon_0/2 \int \mathrm{d}^3r |\vec{E}(\vec{r})|^2$.

(4 Punkte)

Lösung:

$$\begin{aligned}
W &= \frac{2\pi k^2}{\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{r^2 \mathrm{d}r}{(r+a)^4} \qquad \text{(Substitution } \xi = r + a\text{)} \\
&= \frac{2\pi k^2}{\epsilon_0} \int_a^\infty \mathrm{d}\xi \frac{(\xi - a)^2}{\xi^4} \\
&= \frac{2\pi k^2}{\epsilon_0} \int_a^\infty \mathrm{d}\xi \Big(\frac{1}{\xi^2} - \frac{2a}{\xi^3} + \frac{a^2}{\xi^2} \Big) \\
&= \frac{2\pi k^2}{\epsilon_0} \Big[-\frac{1}{\xi} + \frac{a}{\xi^2} - \frac{1}{3} \frac{a^2}{\xi^3} \Big]_a^\infty \\
&= \frac{2\pi k^2}{3a\epsilon_0}
\end{aligned}$$

Weitere nützliche Formeln:

Divergenz in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

Gradient in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$$