Übungsklausur zur Vorlesung
Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Kasprzik, Dr. L. Mihaila 18.12.2013

Klausur B Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

Name: Gruppe:

Matrikelnummer:

Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Geben Sie bitte auch das Aufgabenblatt ab.

Aufgabe:	1	2	3	$\sum$

Hilfsmittel: Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe 1: "Quickies" (*14 Punkte*)

a) Wie würden die Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik lauten, falls es magnetische Monopole gäbe? *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie $\vec{\nabla}_{\vec{r}_2} \frac{1}{|\vec{r}_1 - a\vec{r}_2|}$. *(2 Punkte)*

c) Gegeben sei eine Ladungsverteilung

$$\varrho(\rho, \phi, z) = k\,\theta(R - \rho)\delta(z)\, e^{-z^4\rho^6\cos^2\phi}\,, \qquad R > 0\,,$$

in Zylinderkoordinaten. Die Gesamtladung sei gleich Q. Berechnen Sie k. *(4 Punkte)*

d) Berechnen Sie das magnetische Moment $\vec{m} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r\,(\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}))$ für einen Hohlzylinder der Höhe h mit $R_i < \rho < R_a$, der von einem homogenen Strom I durchflossen wird.
Hinweis: Die Stromdichte ist in Zylinderkoordinaten gegeben durch

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{I}{h(R_a - R_i)}\theta(R_a - \rho)\theta(\rho - R_i)\theta(h/2 - |z|)\vec{e}_\phi\,.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2: Kugelsymmetrisches Potential (*15 Punkte*)

Betrachten Sie das kugelsymmetrische Potential

$$\varphi(r) = \frac{k}{\epsilon_0}\frac{1}{(r + a)}\,, \quad a > 0\,.$$

a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$. *(3 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Ladungsdichte $\varrho(r)$.
(*Zwischenergebnis:* $\varrho(r) = 2k\frac{a}{r}\frac{1}{(r+a)^3}$) *(4 Punkte)*

c) Berechnen Sie die Gesamtladung Q. *(4 Punkte)*

d) Berechnen Sie die elektrostatische Energie des Feldes gemäß $W = 1/2 \int \mathrm{d}^3r\, \varphi(r)\varrho(r)$. *(4 Punkte)*

Aufgabe 3: Greensche Funktion (*11 Punkte*)

Betrachten Sie eine unendlich ausgedehnte, leitende Ebene $z = 0$. Die Halbebene $\{x > 0, z = 0\}$ habe das konstante Potential $\varphi_> = U$ und die Halbebene $\{x < 0, z = 0\}$ das konstante Potential $\varphi_< = -U$.

a) Geben Sie die Greensche Funktion für Dirichletsche Randbedingungen $G_D(\vec{r}, \vec{r}\,')$ für den Halbraum $V = \{\vec{r} : z > 0\}$ an. Erinnern Sie sich hierzu an den Zusammenhang mit der Methode der Spiegelladungen. Beachten Sie, dass G_D auf ∂V (d.h. für $z = 0$) verschwinden muss.
Hinweise: Es ist allgemein $G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + f(\vec{r}, \vec{r}\,')$, mit $\Delta f(\vec{r}, \vec{r}\,') = 0$ für alle $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ in V. Beachten Sie, dass $\Delta G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = -1/\epsilon_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$ für alle $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ in V. *(4 Punkte)*

b) Berechnen Sie das Potential an einem beliebigen Punkt P im ladungsfreien Halbraum $z > 0$.
Hinweis: Verwenden Sie kartesische Koordinaten. Gehen Sie von der allgemeinen Darstellung des Potentials

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}^3r'\, \varrho(\vec{r}\,')G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') - \epsilon_0 \oint_{\partial V} \varphi(\vec{r}\,')\frac{\partial G_D}{\partial n'}\,\mathrm{d}f'$$

aus, wobei $\vec{n}'$ die nach außen gerichtete Flächennormale auf ∂V ist ($\partial G_D/\partial n' = \vec{n}' \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}\,'}G_D$).
Hilfsintegrale:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{x}{y^2(x^2+y^2)^{1/2}}\,, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \frac{1}{y}\arctan\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \text{für } y > 0\,.$$

(5 Punkte)

c) Das Resultat für das Potential aus Teil b) lautet

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{2U}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{z}\right)\,.$$

Zeigen Sie, dass für $z \to 0$ sich wieder

$$\varphi(x, y, 0) \quad = \quad U \quad \text{für } x > 0\,, \qquad -U \quad \text{für } x < 0$$

ergibt. *(2 Punkte)*

Weitere nützliche Formeln:

Divergenz in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

Gradient in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi$$