Übungsklausur zur Vorlesung
Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Kasprzik, Dr. L. Mihaila 18.12.2013

Klausur B Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

Name: ____ Gruppe: ____

Matrikelnummer: ____

Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Geben Sie bitte auch das Aufgabenblatt ab.

Aufgabe:	1	2	3	$\sum$

Hilfsmittel: Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe 1: "Quickies" (*14 Punkte*)

a) Wie würden die Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik lauten, falls es magnetische Monopole gäbe? *(2 Punkte)*
Lösung: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_e$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m$

b) Berechnen Sie $\vec{\nabla}_{\vec{r}_2} \frac{1}{|\vec{r}_1 - a\vec{r}_2|}$. *(2 Punkte)*
Lösung: $\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}_1 - a\vec{r}_2|} = a \frac{(\vec{r}_1 - a\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - a\vec{r}_2|^3}$ (Kettenregel)

c) Gegeben sei eine Ladungsverteilung

$$\varrho(\rho, \phi, z) = k\, \theta(R - \rho)\delta(z)\, e^{-z^4 \rho^6 \cos^2\phi}\,, \qquad R > 0\,,$$

in Zylinderkoordinaten. Die Gesamtladung sei gleich Q. Berechnen Sie k. *(4 Punkte)*
Lösung:

$$\begin{aligned} Q &= k \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^R \rho \mathrm{d}\rho \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z\, \delta(z) e^{-z^4 \rho^6 \cos^2\phi}}_{=1} \\ &= 2\pi k \int_0^R \rho \mathrm{d}\rho = k\pi R^2 \to k = \frac{Q}{\pi R^2} \end{aligned}$$

d) Berechnen Sie das magnetische Moment $\vec{m} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r\, (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}))$ für einen Hohlzylinder der Höhe h mit $R_i < \rho < R_a$, der von einem homogenen Strom I durchflossen wird.
Hinweis: Die Stromdichte ist in Zylinderkoordinaten gegeben durch

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{I}{h(R_a - R_i)} \theta(R_a - \rho)\theta(\rho - R_i)\theta(h/2 - |z|)\vec{e}_\phi\,.$$

(6 Punkte)

Lösung: Mit $\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$ folgt

$$
\begin{aligned}
\vec{m} &= \frac{I/2}{h(R_a - R_i)} \int_{-h/2}^{+h/2} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{R_i}^{R_a} \rho \mathrm{d}\rho (\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z) \times \vec{e}_\phi \quad (\textstyle\int_{-h/2}^{+h/2} z\mathrm{d}z = 0) \\
&= \pm \frac{I/2}{R_a - R_i} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \underbrace{\int_{R_i}^{R_a} \rho^2 \mathrm{d}\rho}_{1/3(R_a^3 - R_i^3)} \vec{e}_z \quad (\text{mit } \vec{e}_\rho \times \vec{e}_\phi = \pm\vec{e}_z) \\
&= \pm \frac{\pi I}{3} \frac{(R_a^3 - R_i^3)}{R_a - R_i} \vec{e}_z = \pm \frac{\pi I}{3} (R_a^2 + R_a R_i + R_i^2) \vec{e}_z \,.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2: Kugelsymmetrisches Potential *(15 Punkte)*

Betrachten Sie das kugelsymmetrische Potential

$$
\varphi(r) = \frac{k}{\epsilon_0} \frac{1}{(r + a)}\,, \quad a > 0\,.
$$

a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$. *(3 Punkte)*
Lösung:

$$
\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(r) = -\frac{\partial\varphi(r)}{\partial r}\vec{\nabla}r = \frac{k}{\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{(r + a)^2}
$$

b) Berechnen Sie die Ladungsdichte $\varrho(r)$.
(*Zwischenergebnis:* $\varrho(r) = 2k\frac{a}{r}\frac{1}{(r+a)^3}$) *(4 Punkte)*
Lösung:

$$
\varrho(r) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\epsilon_0}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) = 2k\frac{a}{r} \frac{1}{(r + a)^3} \quad (\text{Produktregel})\,.
$$

c) Berechnen Sie die Gesamtladung Q. *(4 Punkte)*

$$
\begin{aligned}
Q &= 2ka \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^\infty \frac{r\mathrm{d}r}{(r + a)^3} \quad (\text{Partielle Integration}) \\
&= 8\pi ka\Big(-\frac{1}{2} \frac{r}{(r + a)^2}\Big|_0^\infty + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}r}{(r + a)^2}\Big) \\
&= 4\pi ka\Big[-\frac{r}{(r + a)^2} - \frac{1}{(r + a)}\Big]_0^\infty \\
&= 4\pi k \quad (\text{Substitution auch möglich})
\end{aligned}
$$

d) Berechnen Sie die elektrostatische Energie des Feldes gemäß $W = 1/2 \int \mathrm{d}^3r\, \varphi(r)\varrho(r)$. *(4 Punkte)*

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{4\pi a k^2}{\epsilon_0}\int_0^\infty \frac{r\mathrm{d}r}{(r+a)^4} \qquad \text{(Substitution } \xi = r+a\text{)} \\
&= \frac{4\pi a k^2}{\epsilon_0}\int_a^\infty \mathrm{d}\xi \frac{(\xi-a)}{\xi^4} \\
&= \frac{4\pi a k^2}{\epsilon_0}\int_a^\infty \mathrm{d}\xi \Big(\frac{1}{\xi^3}-\frac{a}{\xi^4}\Big) \\
&= \frac{4\pi a k^2}{\epsilon_0}\Big[-\frac{1}{2\xi^2}+\frac{1}{3}\frac{a}{\xi^3}\Big]_a^\infty \\
&= \frac{2\pi k^2}{3a\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: Greensche Funktion (*11 Punkte*)

Betrachten Sie eine unendlich ausgedehnte, leitende Ebene $z=0$. Die Halbebene $\{x>0, z=0\}$ habe das konstante Potential $\varphi_> = U$ und die Halbebene $\{x<0, z=0\}$ das konstante Potential $\varphi_< = -U$.

a) Geben Sie die Greensche Funktion für Dirichletsche Randbedingungen $G_D(\vec{r},\vec{r}\,')$ für den Halbraum $V=\{\vec{r}: z>0\}$ an. Erinnern Sie sich hierzu an den Zusammenhang mit der Methode der Spiegelladungen. Beachten Sie, dass G_D auf ∂V (d.h. für $z=0$) verschwinden muss.
Hinweise: Es ist allgemein $G_D(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + f(\vec{r},\vec{r}\,')$, mit $\Delta f(\vec{r},\vec{r}\,')=0$ für alle $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ in V. Beachten Sie, dass $\Delta G_D(\vec{r},\vec{r}\,') = -1/\epsilon_0\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ für alle $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ in V. *(4 Punkte)*
Lösung: Sei Ladung q am Ort $\vec{r}\,' = (x', y', z')^{\mathrm{T}}$ und Spiegelladung $q' = -q$ am Ort $\vec{r}\,'' = (x', y', -z')^{\mathrm{T}}$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}\,''|}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right)
\end{aligned}
$$

Es gilt $\varphi(x,y,z=0)=0$

$$
\Rightarrow \quad G_D(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right)
$$

b) Berechnen Sie das Potential an einem beliebigen Punkt P im ladungsfreien Halbraum $z>0$.
Hinweis: Verwenden Sie kartesische Koordinaten. Gehen Sie von der allgemeinen Darstellung des Potentials

$$
\varphi(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}^3r'\, \varrho(\vec{r}\,')G_D(\vec{r},\vec{r}\,') - \epsilon_0 \oint_{\partial V} \varphi(\vec{r}\,')\frac{\partial G_D}{\partial n'}\,\mathrm{d}f'
$$

aus, wobei $\vec{n}'$ die nach außen gerichtete Flächennormale auf ∂V ist ($\partial G_D/\partial n' = \vec{n}'\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}\,'}G_D$). *(5 Punkte)*
Lösung: $\varrho(\vec{r}\,')=0 \quad \Rightarrow$

$$
\varphi(\vec{r}) = \epsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y'\varphi(x',y',z'=0)\left.\frac{\partial G_D}{\partial z'}\right|_{z'=0},
$$

wobei

$$
\left.\frac{\partial G_D}{\partial z'}\right|_{z'=0} = \frac{2z}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}
$$

und $\varphi(x', y', z' = 0) = U$ für $x > 0$ und $-U$ für $x < 0$.
N.B.: $\vec{n}' = -\vec{e}_z$.

$$
\begin{aligned}
\varphi(\vec{r}) &= \frac{Uz}{2\pi}\left[\int_0^\infty \mathrm{d}x' - \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}x'\right]\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}y'[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{-3/2} \\
&= \frac{Uz}{2\pi}\left[\int_0^\infty \mathrm{d}x' - \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}x'\right]\left[\frac{y'-y}{(x-x')^2+z^2}[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{-1/2}\right]\Bigg|_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{Uz}{2\pi}\left[\int_0^\infty \mathrm{d}x' - \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}x'\right]\frac{2}{(x-x')^2+z^2} = \frac{Uz}{\pi}\left[\frac{1}{z}\mathrm{arctan}\frac{x'-x}{z}\Big|_0^\infty - \frac{1}{z}\mathrm{arctan}\frac{x'-x}{z}\Big|_{-\infty}^0\right] \\
&= \frac{U}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctan}\frac{x}{z} + \mathrm{arctan}\frac{x}{z} - \frac{\pi}{2}\right] = \frac{2U}{\pi}\mathrm{arctan}\frac{x}{z}
\end{aligned}
$$

c) Das Resultat für das Potential aus Teil b) lautet

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{2U}{\pi}\mathrm{arctan}\frac{x}{z}.$$

Zeigen Sie, dass für $z \to 0$ sich wieder

$$\varphi(x,y,0) \quad = \quad U \quad \text{für } x > 0\,, \qquad -U \quad \text{für } x < 0$$

ergibt. *(2 Punkte)*
Lösung: Für $z \to 0$ und $x > 0$

$$\mathrm{arctan}\frac{x}{z} = \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \varphi(x,y,0) = U\,.$$

Für $z \to 0$ und $x < 0$

$$\mathrm{arctan}\frac{x}{z} = -\frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \varphi(x,y,0) = -U\,.$$

Weitere nützliche Formeln:
Divergenz in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

Gradient in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi$$