Übungsklausur zur Vorlesung
Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Kasprzik, Dr. L. Mihaila 18.12.2013

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

Name: ______ Gruppe: ______

Matrikelnummer: ______

Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Geben Sie bitte auch das Aufgabenblatt ab.

Aufgabe:	1	2	3	$\sum$

Hilfsmittel: Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe 1: "Quickies" (*14 Punkte*)

a) Berechnen Sie $\vec{\nabla}(\vec{r})^2$. *(2 Punkte)*

b) Gegeben sei eine Ladungsverteilung

$$\varrho(x,y,z) = k\,x\,y\,z\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\,\theta(x)\theta(y)\theta(z)$$

in kartesischen Koordinaten. Die Gesamtladung sei gleich Q. Berechnen Sie k. *(4 Punkte)*

c) Wie würden die Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik lauten, falls es magnetische Monopole gäbe? *(2 Punkte)*

d) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 3\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{m}}{r^3}$$

Hinweis: Es ist $\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{iln} = \delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kl}$. *(6 Punkte)*

Aufgabe 2: Greensche Funktion (*11 Punkte*)

Betrachten Sie eine unendlich ausgedehnte, leitende Ebene $x = 0$. Innerhalb eines Kreises C um den Ursprung vom Radius a in dieser Ebene habe das Potential den festen Wert $\varphi = U$, und außerhalb dieses Kreises sei $\varphi = 0$.

a) Geben Sie die Greensche Funktion für Dirichletsche Randbedingungen $G_D(\vec{r}, \vec{r}\,')$ für den Halbraum $V = \{\vec{r} : x > 0\}$ an. Erinnern Sie sich hierzu an den Zusammenhang mit der Methode der Spiegelladungen. Beachten Sie, dass G_D auf ∂V (d.h. für $x = 0$) verschwinden muss.
Hinweise: Es ist allgemein $G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + f(\vec{r}, \vec{r}\,')$, mit $\Delta f(\vec{r}, \vec{r}\,') = 0$ für alle $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ in V. Beachten Sie, dass $\Delta\, G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = -1/\epsilon_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$ für alle $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ in V. *(4 Punkte)*

b) Leiten Sie einen Integralausdruck für das Potential an einem beliebigen Punkt P in dem ladungsfreien Halbraum $x > 0$ her.
Hinweis: Verwenden Sie Zylinderkoordinaten. Gehen Sie von der allgemeinen Darstellung des Potentials

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}^3 r' \, \varrho(\vec{r}\,')G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') - \epsilon_0 \oint_{\partial V} \varphi(\vec{r}\,')\frac{\partial G_D}{\partial n'} \, \mathrm{d}f'$$

aus, wobei $\vec{n}'$ die nach außen gerichtete Flächennormale auf ∂V ist ($\partial G_D/\partial n' = \vec{n}' \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}\,'} G_D$).
(4 Punkte)

c) Das Resultat für das Potential aus Teil b) lautet

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{U}{2\pi} \int_{\mathrm{C}} \mathrm{d}f\,' \frac{x}{[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') + x^2]^{3/2}} \,,$$

wobei C die Kreisscheibe mit Radius a um den Ursprung ist, $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$ und ϕ der azimuthale Winkel in der yz-Ebene. Zeigen Sie, dass das Potential entlang der Achse, die senkrecht zur Ebene $x = 0$ durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft, gegeben ist durch

$$\varphi(0, \phi, x) \quad = \quad U\left(1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) \,.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 3: Kugelsymmetrisches Potential *(15 Punkte)*
Betrachten Sie das kugelsymmetrische Potential

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}(1 - \mathrm{e}^{-r/a}) \,, \quad a > 0 \,.$$

a) (i) Entwickeln Sie das Potential für $r \ll a$ und vernachlässigen Sie Terme der $\mathcal{O}(r^2)$.
(ii) Wie verhält sich das Potential für $r \gg a$? *(4 Punkte)*

b) Berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$. *(3 Punkte)*

c) Berechnen Sie die Ladungsdichte $\varrho(r)$.
(*Zwischenergebnis:* $\varrho(r) = q/(4\pi a^2)\frac{\mathrm{e}^{-r/a}}{r}$) *(4 Punkte)*

d) Berechnen Sie die Gesamtladung Q. *(4 Punkte)*

Weitere nützliche Formeln:
Divergenz in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

Gradient in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi$$