Übungsklausur zur Vorlesung
Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Kasprzik, Dr. L. Mihaila 18.12.2013

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

Name:		Gruppe:	
Matrikelnummer:			

Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Geben Sie bitte auch das Aufgabenblatt ab.

Aufgabe:	1	2	3	$\sum$

Hilfsmittel: Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe 1: "Quickies" *(14 Punkte)*

a) Berechnen Sie $\vec{\nabla}(\vec{r})^2$. *(2 Punkte)*
Lösung: $\vec{\nabla}(\vec{r})^2 = \vec{\nabla}r^2 = 2r\vec{\nabla}r = 2r\vec{r}/r = 2\vec{r}$
Alternativ: $\vec{\nabla}(\vec{r})^2 = \vec{\nabla}(x^2+y^2+z^2) = (2x, 2y, 2z)^{\mathrm{T}} = 2\vec{r}$

b) Gegeben sei eine Ladungsverteilung

$$\varrho(x,y,z) = k\,x\,y\,z\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\,\theta(x)\theta(y)\theta(z)$$

in kartesischen Koordinaten. Die Gesamtladung sei gleich Q. Berechnen Sie k. *(4 Punkte)*
Lösung:

$$Q = k\left[\int_0^\infty \xi e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi\right]^3 = k\left[\left(-\frac{1}{2}e^{-\xi^2}\right)_0^\infty\right]^3 = k(1/2)^3 = k/8 \to k = 8Q$$

c) Wie würden die Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik lauten, falls es magnetische Monopole gäbe? *(2 Punkte)*
Lösung: $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}_e$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \mu_0\rho_m$

d) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{m}\times\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 3\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{m}}{r^3}$$

Hinweis: Es ist $\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$. *(6 Punkte)*
Lösung: Ergebnis folgt mit

$$\begin{aligned}
\left[\vec{\nabla} \times \left(\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right]_i &= \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\epsilon_{kln} m_l \frac{x_n}{r^3} \quad \text{(Summenkonvention)} \\
&= m_l(\delta_{il}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{lj})\left[\frac{\delta_{nj}}{r^3} - \frac{3x_j x_n}{r^5}\right] \quad \text{(Produktregel)} \\
&= \frac{3m_i}{r^3} - \frac{m_i}{r^3} - 3\frac{m_i r^2}{r^5} + 3\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^5}x_i \\
&= -\frac{m_i}{r^3} + 3\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^5}x_i
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Greensche Funktion *(11 Punkte)*

Betrachten Sie eine unendlich ausgedehnte, leitende Ebene $x = 0$. Innerhalb eines Kreises um den Ursprung vom Radius a in dieser Ebene habe das Potential den festen Wert $\varphi = U$, und außerhalb dieses Kreises sei $\varphi = 0$.

a) Geben Sie die Greensche Funktion für Dirichletsche Randbedingungen $G_D(\vec{r}, \vec{r}\,')$ für den Halbraum $V = \{\vec{r} : x > 0\}$ an. Erinnern Sie sich hierzu an den Zusammenhang mit der Methode der Spiegelladungen. Beachten Sie, dass G_D auf ∂V (d.h. für $x = 0$) verschwinden muss.
Hinweise: Es ist allgemein $G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + f(\vec{r}, \vec{r}\,')$, mit $\Delta f(\vec{r}, \vec{r}\,') = 0$ für alle $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ in V. Beachten Sie, dass $\Delta G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = -1/\epsilon_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$ für alle $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ in V. *(4 Punkte)*
Lösung: Sei Ladung q am Ort $\vec{r}\,' = (x', y', z')^{\mathrm{T}}$ und Spiegelladung $q' = -q$ am Ort $\vec{r}\,'' = (-x', y', z')^{\mathrm{T}}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}\,''|}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right)
\end{aligned}$$

Es gilt $\varphi(x = 0, y, z) = 0$

$$\Rightarrow \quad G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right)$$

b) Leiten Sie einen Integralausdruck für das Potential an einem beliebigen Punkt P in dem ladungsfreien Halbraum $x > 0$ her.
Hinweis: Verwenden Sie Zylinderkoordinaten. Gehen Sie von der allgemeinen Darstellung des Potentials

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}^3 r'\, \varrho(\vec{r}\,') G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') - \epsilon_0 \oint_{\partial V} \varphi(\vec{r}\,') \frac{\partial G_D}{\partial n'}\, \mathrm{d}f'$$

aus, wobei $\vec{n}'$ die nach außen gerichtete Flächennormale auf ∂V ist ($\partial G_D/\partial n' = \vec{n}' \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}\,'} G_D$). *(4 Punkte)*
Lösung: $\varrho(\vec{r}\,') = 0 \quad \Rightarrow$

$$\varphi(\vec{r}) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y' \varphi(x' = 0, y', z') \frac{\partial G_D}{\partial x'}\bigg|_{x'=0},$$

wobei

$$\left.\frac{\partial G_D}{\partial x'}\right|_{x'=0} = \frac{2x}{[x^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

und $\varphi(x'=0,y',z') = U$ für $\sqrt{y'^2+z'^2} < a$, sonst Null.
N.B.: $\vec{n}' = -\vec{e}_x$.
In Zylinderkoordinaten:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Ux}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \int_0^a \frac{1}{[\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')+x^2]^{3/2}}\rho'\mathrm{d}\rho'$$

mit $\rho = \sqrt{z^2+y^2}$, $\rho' = \sqrt{z'^2+y'^2}$ und $z = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$ etc.

c) Das Resultat für das Potential aus Teil b) lautet

$$\varphi(\vec{r}) = \dots,$$

wobei C die Kreisscheibe mit Radius a um den Ursprung ist, $\rho = \sqrt{y^2+z^2}$ und ϕ der azimuthale Winkel in der yz-Ebene. Zeigen Sie, dass das Potential entlang der Achse, die senkrecht zur Ebene $x = 0$ durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft, gegeben ist durch

$$\varphi(0,\phi,x) = U\left(1-\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right).$$

(3 Punkte)

Lösung: Entlang der x-Achse gilt $\rho = 0 \Rightarrow$

$$\varphi(\rho=0,x) = \frac{Ux}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi'\int_0^a \frac{1}{[\rho'^2+x^2]^{3/2}}\rho'\mathrm{d}\rho' = U\left[\left.\frac{-x}{(\rho'^2+x^2)^{1/2}}\right|_0^a\right] = U\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

Aufgabe 3: Kugelsymmetrisches Potential *(15 Punkte)*

Betrachten Sie das kugelsymmetrische Potential

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}(1-\mathrm{e}^{-r/a}), \quad a > 0.$$

a) (i) Entwickeln Sie das Potential für $r \ll a$ und vernachlässigen Sie Terme der $\mathcal{O}(r^2)$.
(ii) Wie verhält sich das Potential für $r \gg a$? *(4 Punkte)*
Lösung:

$$\text{(i)} \quad \varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\left(1-1+\frac{r}{a}-\frac{r^2}{2a^2}\right)+\mathcal{O}(r^2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}\left(1-\frac{r}{2a}\right)+\mathcal{O}(r^2)$$

$$\text{(ii)} \quad \varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{für } r \gg a. \quad \text{(Punktladung)}$$

b) Berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$. *(3 Punkte)*
Lösung:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(r) = -\frac{\partial\varphi(r)}{\partial r}\vec{\nabla}r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\left[1-e^{-r/a}\left(1+\frac{r}{a}\right)\right]\vec{e}_r$$

c) Berechnen Sie die Ladungsdichte $\varrho(r)$.
(*Zwischenergebnis:* $\varrho(r) = q/(4\pi a^2)\frac{\mathrm{e}^{-r/a}}{r}$) *(4 Punkte)*
Lösung:

$$\varrho(r) = \epsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\epsilon_0}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2E_r) = \frac{q}{4\pi a^2}\frac{e^{-r/a}}{r} \quad \text{(Produktregel)}.$$

d) Berechnen Sie die Gesamtladung Q. *(4 Punkte)*

Lösung:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{q}{4\pi a^2}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\, r\, e^{-r/a} \quad \text{(Partielle Integration)} \\ &= \frac{q}{a^2}\Big(-ra - a^2\Big)e^{-r/a}\Big|_0^{\infty} \\ &= q \end{aligned}$$

Weitere nützliche Formeln:

Divergenz in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

Gradient in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi$$