2. Übungsklausur zur Vorlesung
Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Kasprzik, Dr. L. Mihaila 3.2.2014

Bearbeitungsdauer: 120 Minuten

Name: ______ Gruppe: ______

Matrikelnummer: ______

Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Geben Sie bitte auch das Aufgabenblatt ab.

Aufgabe:	1	2	3	4	$\sum$

Hilfsmittel: Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe 1: Quickies (*12 Punkte*)

(a) Zeigen Sie, dass der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ invariant ist unter Eichtransformationen der Potentiale $A^\mu \to A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$. *(2 Punkte)*

(b) Wie lauten die Maxwell-Gleichungen in manifest-kovarianter Form? *(2 Punkte)*

(c) Zeigen Sie, dass die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in Lorenz-Eichung $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu$ lauten. *(2 Punkte)*

(d) In einem Intertialsystem K gelte $\vec{B} = 0$. Welchen Winkel schließen die Felder $\vec{E}'$ und $\vec{B}'$ in einem Intertialsystem K' ein, das sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ relativ zu K bewegt? Begründen Sie Ihre Antwort. *(2 Punkte)*

(e) Zeigen Sie, dass aus der Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ die Erhaltung der elektrischen Ladung folgt. *(2 Punkte)*

(f) Zeigen Sie, dass $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0\, e^{i(kr - \omega t)}/r$, mit $\omega = kc$, die Wellengleichung erfüllt. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2: Multipolentwicklung (*10 Punkte*)

Betrachten Sie die statische Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r}) = \varrho_0 \cos\theta$ für $r \leq R$, $\varrho(\vec{r}) = 0$ sonst.

(a) Bestimmen Sie **alle** sphärischen Multipolmomente

$$q_{lm} = \int \mathrm{d}^3 r' \varrho(\vec{r}\,')\, r'^l\, Y^*_{lm}(\theta', \phi')\,.$$

(3 Punkte)

(b) Berechnen Sie das Potential $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \varrho(\vec{r}\,')/|\vec{r} - \vec{r}\,'|$ für $r > R$. Verwenden Sie hierzu die Entwicklung

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y^*_{lm}(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)\,,$$

Bitte wenden!

mit $r_< = \min(r, r')$, $r_> = \max(r, r')$. *(4 Punkte)*
(c) Wie lauten die Gesamtladung und die kartesischen Multipolmomente? *(3 Punkte)*

Aufgabe 3: Maxwell-Gleichungen im Vakuum *(10 Punkte)*

(a) Die elektromagnetischen Potentiale im Vakuum seien gegeben durch $\vec{A}(\vec{r}, t) = f(x - ct)\ \vec{e}_z$ und $\varphi(\vec{r}, t) = 0$.
(i) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r}, t)$. *(2 Punkte)*
(ii) Finden Sie ein Viererpotential A'^{μ}, das der Lorenz-Eichung, jedoch nicht der Coulomb-Eichung genügt. Begründen Sie Ihre Wahl. *(3 Punkte)*
(b) Betrachten Sie die Felder

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = c\, g(y - ct)\ \vec{e}_x\,, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = -g(y - ct)\ \vec{e}_z\,.$$

(i) Zeigen Sie, dass diese Felder alle Maxwell-Gleichungen im Vakuum erfüllen. *(3 Punkte)*
(ii) Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{B})/\mu_0$. *(2 Punkte)*

Aufgabe 4: Magnetostatik *(8 Punkte)*

Auf der Oberfläche einer Hohlkugel mit dem Radius R sei eine Ladung q gleichmäßig verteilt. Die Kugel rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$.
(a) Zeigen Sie, dass die resultierende Stromdichte gegeben ist durch

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi R^2}\delta(r - R)(\vec{\omega} \times \vec{r})\,.$$

(1 Punkt)
(b) Berechnen Sie das von $\vec{j}$ erzeugte magnetische Moment $\vec{m}$ der Kugel. *(2 Punkte)*
(c) Berechnen Sie das Vektorpotential gemäß $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\, \vec{j}(\vec{r}\,')/|\vec{r} - \vec{r}\,'|$.
Hinweise: (i) Legen Sie für die d^3r'-Integration den Vektor $\vec{r}$ in z'-Richtung. (ii) Verwenden Sie

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x \frac{x}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\,x}} = -\frac{1}{rR}(|r - R| + |r + R|) - \frac{1}{3r^2R^2}(|r - R|^3 - |r + R|^3)\,.$$

(2 Punkte)
(d) Berechnen Sie aus $\vec{A}_{r<R}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 q}{12\pi R}(\vec{\omega} \times \vec{r})$ die magnetische Induktion $\vec{B}_{r<R}(\vec{r})$ im Innenraum der Kugel. *(1 Punkt)*
(e) Untersuchen Sie das Stetigkeitsverhalten der Tangential- und Normalkomponenten der Felder $\vec{B}_{r<R}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi}\vec{m}/R^3$ und $\vec{B}_{r>R}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}(3\vec{e}_r(\vec{e}_r \cdot \vec{m}) - \vec{m})/r^3$ bei $r = R$. *(2 Punkte)*

Weitere nützliche Formeln

Kugelflächenfunktionen: ($\int \mathrm{d}\Omega\, Y^*_{l'm'}(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$)

$Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}\,, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\,, \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}\,,$

$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{8\pi}}(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2})\,, \quad Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}\,, \quad Y_{22} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$

Vektoranalysis:

$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b}$

Elektrische und magnetische Multipolmomente (statischer Fall):

$\vec{p} = \int \mathrm{d}^3r\, \varrho(\vec{r})\vec{r}, \quad Q_{ij} = \int \mathrm{d}^3r (3x_ix_j - r^2\delta_{ij})\varrho(\vec{r}), \quad \vec{m} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r\, (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}))$

Invarianten des elektromagnetischen Feldes:

$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{4}{c}\vec{E} \cdot \vec{B}\,, \quad F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{2}{c^2}(E^2 - c^2B^2).$

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten:

$\Delta\psi(\vec{r}) = 1/r^2\partial_r(r^2\partial_r\psi(\vec{r}))$ + Winkelanteile

Coulomb-Eichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$; Lorenz-Eichung: $\partial_\mu A^\mu = 0$