Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik III WS 2014/2015

Prof. Dr. A. Shnirman

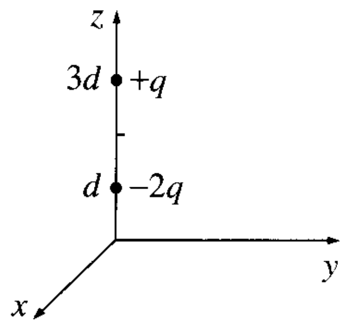
Dr. B. Narozhny

Probeklausur

Lösungen

1. Elektrostatische Kraft (20 Punkte)

Die zwei Ladungen $q_1 = q$ und $q_2 = -2q$ befinden sich auf der z-Achse in den Punkten $z_1 = 3d$ und $z_2 = d$, siehe Abbildung. In der xy-Ebene befindet sich ein geerdeter Leiter. Bestimmen Sie die Kraft auf die Ladung $+q$.

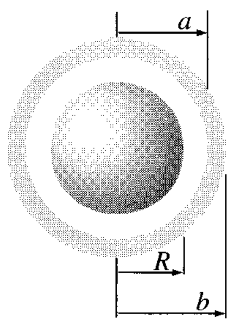


Die Spiegelladungen $q_3 = -q$ und $q_4 = 2q$ befinden sich in den Punkten $z_3 = -3d$ und $z_4 = -d$. Die Kraft auf die Ladung $+q$ ist

$$\vec{F} = \frac{q_1 \vec{e}_z}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q_2}{(z_1-z_2)^2} + \frac{q_3}{(z_1-z_3)^2} + \frac{q_4}{(z_1-z_4)^2}\right] = \frac{q\vec{e}_z}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-2q}{(2d)^2} + \frac{-q}{(6d)^2} + \frac{2q}{(4d)^2}\right]$$
$$= -\frac{29q^2\vec{e}_z}{288\pi\epsilon_0 d^2}.$$

2. Elektrisches Potential I (20 Punkte)

Eine Metallkugel mit Radius R trägt die Ladung q; sie ist von einer dicken konzentrischen metallischen Schale umgeben (mit Innenradius a und Außenradius b, siehe Abbildung). Auf der Kugelschale befindet sich keine Nettoladung.



(a) *Bestimmen Sie die Flächenladungsdichte σ bei R, bei a, und bei b.*

In Metallen befinden sich die Ladungen nur auf der Oberflächen. Deswegen

$$\sigma(R) = \frac{q}{4\pi R^2}.$$

Innerhalb der metallischen Schale gibt es kein elektrischen Feld. Stellen Sie eine Kugeloberfläche innerhalb der Schale vor. Dem Gauß'schen Satz zufolge, ist die Gesamtladung innerhalb der Oberfläche gleich null. Das heisst dass die Innenoberfläche der Schale trägt die Ladung $-q$. Die entsprechende Ladungsdichte ist

$$\sigma(a) = -\frac{q}{4\pi a^2}.$$

Auf der Kugelschale befindet sich keine Nettoladung. Deswegen trägt die äußere Oberfläche der Schale die Ladung q. Die entsprechende Ladungsdichte ist

$$\sigma(b) = \frac{q}{4\pi b^2}.$$

(b) *Bestimmen Sie das Potential im Zentrum unter Verwendung eines Bezugspunkt im Unendlichen.*

Das elektrische Feld kann als Gradient eines skalaren Potentials ϕ geschrieben werden

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi.$$

Umgekehrt, kann man das Potential als ein Linienintegral von $\vec{E}$ schreiben

$$\phi(\vec{r}) = -\int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

wobei $\mathcal{O}$ ein Bezugspunkt ist.
Im Unendlichen verschwindet jedes Potential, deswegen haben wir für das Potential im Zentrum

$$\phi(0) = -\int_{\infty}^{0} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Das elektrische Feld finden wir mit Hilfe des Gauß'schen Satzes:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r \begin{cases} 0, & r < R, \\ 1, & R < r < a, \\ 0, & a < r < b, \\ 1, & b < r. \end{cases}$$

Letztendlich finden wir das Potential im Zentrum

$$\phi(0) = -\int_{\infty}^{b} dr \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} - \int_{a}^{R} dr \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right).$$

(c) *Die äußere Fläche wird nun mit einem Erdungsdraht verbunden, der ihr Potential auf null bringt (denselben Wert wie im Unendlichen). Wie verändert sich Ihre Antworten auf (a) und (b)?*

In diesem Fall fließt die Ladung von der äußere Oberfläche der Schale weg

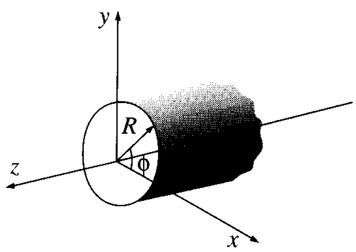
$$\sigma(b) = 0.$$

Das elektrische Feld ist dann null für $r > a$ und das Potential im Zentrum ist

$$\phi(0) = -\int_a^R dr \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right).$$

3. Elektrisches Potential II (20 Punkte)

Die Ladungsdichte $\sigma(\varphi) = a\sin\varphi$ (mit einer Konstanten a) befindet sich auf der Oberfläche eines unendlich langen Zylinders mit Radius R, siehe Abbildung. Bestimmen Sie das Potential innerhalb und außerhalb des Zylinders.



Fúhren wir die zylindrischen Koordinaten ein. Aufgrund der Symmetrie ist das Potential von z-Koordinate unabhängig:

$$V = V(r, \varphi).$$

Als Funktion von φ soll das Potential periodisch sein. Deswegen können wir die Fourier-Entwicklung benutzen. Außerhalb der Oberfläche finden wir die folgenden Lösung der Laplace-Gleichung

$$V(r > R, \varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r^k}\left[a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi\right].$$

Innerhalb der Oberfläche finden wir

$$V(r < R, \varphi) = a_0' + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left[c_k \cos k\varphi + d_k \sin k\varphi\right].$$

Von der Randbedingungen auf der Oberfläche finden wir die Ladungsdichte

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = E_\perp^{aus} - E_\perp^{in} = -\left[\frac{\partial V_{aus}}{\partial r} - \frac{\partial V_{in}}{\partial r}\right]\Bigg|_{r=R}.$$

Deswegen

$$a \sin\varphi = -\epsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{k}{r^{k+1}} \left(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi \right) - k r^{k-1} \left(c_k \cos k\varphi + d_k \sin k\varphi \right) \right].$$

Es folgt von der Orthogonalität der triginometrischen Funktionen, dass

$$a_k = b_k = 0; \qquad c_k = d_k = 0, \ \forall k \neq 1.$$

Deswegen

$$a \sin\varphi = \epsilon_0 \left[\frac{b_1}{R^2} \sin\varphi + d_1 \sin\varphi \right].$$

Die zweite Bedingung bekommen wir von der Kontinuität des Potentials

$$a_0 + \frac{b_1}{R} \sin\varphi = a_0' + R d_1 \sin\varphi.$$

Die Konstante können wir als null wählen

$$a_0 = a_0' = 0.$$

Dann bekommen wir zwei Gleichungen für b_1 und d_1:

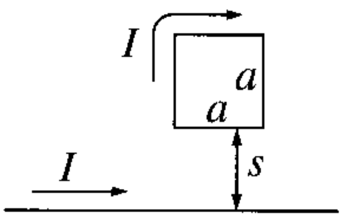
$$a = \epsilon_0 \left[\frac{b_1}{R^2} + d_1 \right], \qquad \frac{b_1}{R} = R d_1 \qquad \Rightarrow \quad d_1 = \frac{a}{2\epsilon_0}, \ b_1 = \frac{aR^2}{2\epsilon_0}.$$

Letztendlich finden wir das Potential:

$$V(r,\varphi) = \frac{a \sin\varphi}{2\epsilon_0} \begin{cases} r, & r < R, \\ R^2/r, & r > R. \end{cases}$$

4. Das Biot-Savart'sche Gesetz (20 Punkte)

Bestimmen Sie die Kraft auf die in Abbildung dargestellte rechteckige Schleife, die sich in der Nähe eines unendlich langen geraden Drahts befindet. Sowohl Schleife als auch Draht tragen einen stationären Strom I.



Die Kräfte auf der senkrechte Ränder sind gleich null.

Das Feld auf den unteren Rand ist

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}.$$

Die entsprechende Kraft ist

$$F = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi s}.$$

Diese Kraft zeigt nach oben.

Das Feld auf den oberen Rand ist

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(s+a)}.$$

Die entsprechende Kraft ist

$$F = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi(s+a)}.$$

Diese Kraft zeigt nach unten.

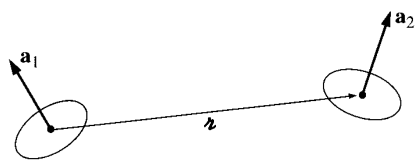
Die Gesamtkraft ist

$$F = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi s} - \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi(s+a)} = \frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi s(s+a)},$$

und zeigt nach oben.

5. Elektromagnetische Induktion (20 Punkte)

Zwei winzige Drahtschleifen, mit den Flächen $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$, befinden sich im Abstand $\vec{r}$ voneinander, siehe Abbildung. Die Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind normal zu den Flächen und haben eine Länge die der Fläche entspricht. Sie zeigen in zwei beliebige Richtungen.



(a) *Bestimmen Sie ihre Gegeninduktivität. (Hinweis: Behandeln Sie die Schleifen als magnetische Dipole.)*

Das Dipolmoment der ersten Schleife ist

$$\vec{m}_1 = I_1 \vec{a}_1.$$

Das Magnetfeld der ersten Schleife ist

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi r^3}\left[3\left(\vec{a}_1 \cdot \vec{e}_{\vec{r}}\right)\vec{e}_{\vec{r}} - \vec{a}_1\right], \qquad \vec{e}_{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Der Fluss des Feldes $\vec{B}_1$ durch die zweite Schleife ist

$$\Phi_2 = \vec{B}_1 \cdot \vec{a}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi r^3}\left[3\left(\vec{a}_1 \cdot \vec{e}_{\vec{r}}\right)\left(\vec{a}_2 \cdot \vec{e}_{\vec{r}}\right) - \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2\right].$$

Die Gegeninduktivität $M_{21} = M_{12}$ finden von der Definition

$$\Phi_2 = M_{21} I_1 \qquad \Rightarrow \qquad M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3\left(\vec{a}_1 \cdot \vec{e}_{\vec{r}}\right)\left(\vec{a}_2 \cdot \vec{e}_{\vec{r}}\right) - \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2\right].$$

(b) *Nehmen Sie an, ein Strom I_1 fließt durch Schleife 1, und wir wollen einen Strom I_2 in Schleife 2 fließen lassen. Wieviel Arbeit muss gegen die induzierte gegenelektromotorische Kraft verrichtet werden, damit Strom I_1 weiterhin durch Schleife 1 fließt?*

Die induzierte gegenelektromotorische Kraft ist

$$\mathcal{E}_1 = -M_{12}\frac{dI_2}{dt}.$$

Die entprechende Leistung ist

$$\frac{dW_1}{dt} = -\mathcal{E}_1 I_1 = M_{12} I_1 \frac{dI_2}{dt}.$$

Hier haben wir das Minus-Zeichen geschrieben, weil es sich um die Leistung *gegen* der induzierten Kraft handelt.

Die Arbeit ist dann

$$\begin{aligned} W_1 = M_{12} I_1 I_2 &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r^3}\left[3\left(\vec{a}_1 \cdot \vec{e}_{\vec{r}}\right)\left(\vec{a}_2 \cdot \vec{e}_{\vec{r}}\right) - \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2\right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3\left(\vec{m}_1 \cdot \vec{e}_{\vec{r}}\right)\left(\vec{m}_2 \cdot \vec{e}_{\vec{r}}\right) - \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2\right]. \end{aligned}$$