

Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Übungsklausur

Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024
Ausgabe: 20.12.2023, Dauer: 90 mins

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen**, **Übungsgruppe** und **Matrikelnummer** auf die Lösung.

Aufgabe 1: Magnetisches Vektor-Potential (4 P)

In dieser Aufgabe werden Sie verschiedene Vektorpotentiale untersuchen, um die physikalischen Felder und die Eichung zu bestimmen. Betrachten Sie dafür die folgenden magnetischen Vektorpotentiale innerhalb eines endlichen Volumens V um den Ursprung:

$$\vec{A}_1 = B_1 \begin{pmatrix} x + y - z \\ -x + y + z \\ x - y + z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\vec{A}_2 = B_2 d^3 \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (2)$$

wobei d eine konstante Länge ist und B_1 und B_2 Konstanten mit der Einheit eines magnetischen Feldes sind.

- 1.a) Bestimmen Sie die magnetischen Felder, die durch $\vec{A}_1$ und $\vec{A}_2$ erzeugt werden.
- 1.b) Sind die Vektorpotentiale in der Coulomb-Eichung? **Vorsicht:** Für $\vec{A}_2$ müssen Sie den Fall $r \rightarrow 0$ getrennt diskutieren.
- 1.c) Für das/die Vektorpotential/e, das/die nicht in Coulomb-Eichung ist/sind, finden Sie eine Eichtransformation, so dass das neue Vektorpotential die Coulomb-Eichungsbedingung erfüllt.

Hinweis: Mehrere Lösungswege sind möglich. Es ist erlaubt einfach zu raten ohne das Problem formal zu lösen.

Lösung zu Aufgabe 1:

Das B-Feld kann einfach durch die Berechnung der Rotation bestimmt werden.

- Für $\vec{A}_1$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}_1 = B_1 \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + y - z & -x + y + z & x - y + z \end{vmatrix} = -2B_1(\hat{e}_x + \hat{e}_y + \hat{e}_z), \quad (3)$$

was ein konstantes Feld liefert.

- Für $\vec{A}_2$ ist das Nutzen der Indexnotation praktisch, um die Ableitung direkt zu berechnen:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{(x_i x_i)^{3/2}} = -\frac{3}{2} \frac{\frac{\partial(x_i x_i)}{\partial x_j}}{(x_i x_i)^{5/2}} = -\frac{3}{2} \frac{2\delta_{ij} x_i}{(x_i x_i)^{5/2}} = -\frac{3x_j}{(x_i x_i)^{5/2}}. \quad (4)$$

Dann ergibt sich für das B-Feld

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}_2 = B_2 d^3 \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3} \end{vmatrix} = \frac{-3B_2 d^3}{r^5} ((zy - zy) \hat{e}_x + (zx - zx) \hat{e}_y + (xy - xy) \hat{e}_z) = 0. \quad (5)$$

Dieses Ergebnis kann auch ohne explizite Rechnung hergeleitet werden, indem man sich an das bekannte Ergebnis

$$-\vec{\nabla} \frac{1}{r} = \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (6)$$

erinnert und erkennt, dass

$$\vec{A}_2 = -B_2 d^3 \vec{\nabla} \frac{1}{r}. \quad (7)$$

Das B-Feld verschwindet, da die Rotation eines Gradienten gleich 0 ist.

In Teil b) muss die Divergenz der beiden Vektorpotentiale berechnet werden, denn die Coulomb-Eichbedingung lautet $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

- Im ersten Fall ist dies einfach

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_1 = B_1 \left(\frac{\partial(x+y-z)}{\partial x} + \frac{\partial(-x+y+z)}{\partial y} + \frac{\partial(x-y+z)}{\partial z} \right) = B_1(1+1+1) = 3B_1, \quad (8)$$

somit ist A_1 nicht in der Coulomb Eichung.

- Für das zweite Potenzial nutzen wir die Indexnotation

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_k}{(x_i x_i)^{3/2}} = -\frac{3}{2} \frac{x_k \frac{\partial(x_i x_i)}{\partial x_j}}{(x_i x_i)^{5/2}} + \frac{\delta_{kj}}{(x_i x_i)^{3/2}} = \frac{\delta_{kj}}{(x_i x_i)^{3/2}} - \frac{3x_j x_k}{(x_i x_i)^{5/2}}. \quad (9)$$

wobei nur über i summiert wird.

Für die Divergenz ist $j = k$ (wir schreiben hier die Summen explizit um die Rechnung klarer zu machen)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_2 = B_2 d^3 \left(\sum_j \frac{\delta_{jj}}{(\sum_i x_i x_i)^{3/2}} + \frac{-3x_j x_j}{(\sum_i x_i x_i)^{5/2}} \right) = B_2 d^3 \left(\frac{3}{(\sum_i x_i x_i)^{3/2}} - 3 \frac{\sum_j x_j x_j}{(\sum_i x_i x_i)^{5/2}} \right) = 0 \quad (10)$$

für $r \neq 0$. Aber für $r \rightarrow 0$ divergiert der Nenner, daher ist das Ergebnis proportional zu einer Delta-Distribution. In der Tat ist aus der Vorlesung bekannt, dass

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi \delta^3(\vec{r}). \quad (11)$$

Dieses Feld befindet sich auch nicht in der Coulomb-Eichung.

Sowohl $\vec{A}_1$ als auch $\vec{A}_2$ befinden sich nicht in der Coulomb-Eichung, daher müssen wir geeignete Eichtransformationen finden, d.h wir müssen $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$ bestimmen, so dass $0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \Delta \chi$. Dabei ist die Wahl von χ nicht eindeutig, da wir zu χ immer ein Skalarfeld addieren können, das die Laplace-Gleichung erfüllt.

- Im Fall von A_1 muss gelten: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'_1 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_1 + \Delta\chi = 3B_1 + \Delta\chi = 0$.
 - **Methode 1:** Die einfachste Lösung besteht daraus, einen Ansatz für χ zu raten. Beispielsweise können wir annehmen, dass χ nur von x abhängt, d.h. $\chi(\vec{r}) = \chi(x)$. Dann folgt:

$$\frac{d\chi^2(x)}{dx^2} = -3B_1 \rightarrow \chi(x) = -\frac{3B_1}{2}x^2 + c_1x + c_2 \quad (12)$$

Es folgt $\vec{A}'_1 = B_1(-2x + y - z + c_1, -x + y + z, x - y + z)$. Unabhängig von der Wahl von c_1 erfüllt dieses Vektorpotential die Eichbedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'$.

- **Methode 2:** Beim Berechnen der Divergenz wird deutlich, dass die nicht-verschwindenden Terme von

$$B_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (13)$$

stammen. Da dieser Term der Gradient von $\chi = -\frac{1}{2}B_1(x^2 + y^2 + z^2)$ ist, kann er entfernt werden, ohne das Magnetfeld zu ändern. Das neue Vektorpotenzial ist dann

$$\vec{A}'_1 = B_1(y - z, z - x, x - y). \quad (14)$$

- **Methode 3:** Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für ein konstantes magnetisches Feld vB das Vektorpotential in Coulomb-Eichung gegeben ist durch $\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B}$. Dies kann hier verwendet werden und liefert genau das vorherige Ergebnis: $\vec{A}_1 = -\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B}_1 = B_1(y - z, z - x, x - y)$.
- Für $\vec{A}_2$ ist es etwas komplizierter. Aber auch hier haben wir mindestens zwei Lösungswege:
 - **Methode 1:** Wir müssen eine Funktion χ finden, sodass $\Delta\chi(\vec{r}) = -4\pi B_2 d^3\delta(\vec{r})$. Das ist ein bekanntes Ergebnis mit $\chi(\vec{r}) = B_2 d^3 \frac{1}{r}$ und seinem Gradienten $\vec{\nabla}\chi = -B_2 d^3 \frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{A}_2$. Somit ist das eichtransformierte Vektorpotential $\vec{A}'_2 = 0$ (bis auf Laplace-Lösungen).
 - **Methode 2:** Da das Magnetfeld verschwindet, ist $\vec{A}'_2 = 0$ eine mögliche Wahl für das Vektorpotential, welches offensichtlich die Coulomb-Eichbedingung erfüllt.

Aufgabe 2: Der hohle Leiter (2 P)

Im Folgenden werden Sie untersuchen, was im Inneren eines Hohlraums in einem Leiter geschieht. Dabei sind keine detaillierten Rechnungen erforderlich, sondern physikalisches Verständnis und die Anwendung physikalischer Eigenschaften der Felder.

Betrachten Sie einen ausgedehnten leitenden Körper mit einem Hohlraum im Inneren. Der Hohlraum ist so gemacht, dass er nicht mit der äußeren Oberfläche des Leiters kommuniziert: Die Kavität ist vollständig von leitendem Material umgeben. Ihre Form beeinflusst die Ergebnisse nicht. Sie wissen aus der Vorlesung, dass in einem solchen Hohlraum keine statischen elektrischen Felder existieren können, wohl aber zeitabhängige Felder, also elektromagnetische Wellen.

- Welche Bedingungen erfüllt das elektrische Feld an der Oberfläche des Leiters? Was implizieren diese für die Richtung des Poynting Vektors $\vec{S}$ an der Oberfläche?
- Zeigen Sie, dass wenn es keine Ladungen in der Kavität gibt, die Gesamtenergie, die im elektromagnetischen Feld gespeichert ist, konstant bleibt.
- Bleibt das vorherige Ergebnis gültig, wenn es stationäre Ladungen im Hohlraum gibt? Was passierte, wenn die Ladungen sich bewegen?

Lösung zu Aufgabe 2:

Im Inneren des Leiters existieren keine elektrischen Felder. Unter Berücksichtigung der Stetigkeitsbedingung des elektrischen Feldes ($\vec{E}_{\parallel}^{\text{in}} = \vec{E}_{\parallel}^{\text{out}}$) folgt daraus, dass es nur eine Komponente senkrecht zur Oberfläche geben kann ($\vec{E}_{\parallel}^{\text{in}} = \vec{E}_{\parallel}^{\text{out}} = 0$).

Da das elektrische Feld nur eine senkrechte Komponente hat, kann der Poynting-Vektor $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ keine Komponente senkrecht zur Oberfläche der Hohlraumwand aufweisen. Also ist $\vec{S}$ parallel zur Oberfläche.

Für jeden Punkt auf der Oberfläche können wir ein Koordinatensystem wählen, in dem z senkrecht zur Leiteroberfläche ist. Dann haben wir

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} (0, 0, E) \times (B_x, B_y, B_z) = \frac{E}{\mu_0} (-B_y, B_x, 0), \quad (15)$$

Nun können wir explizit sehen, dass $\vec{S}$ für ein beliebiges B-Feld keine senkrechte Komponente hat.

Die Poynting Gleichung ist

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (16)$$

In Abwesenheit von Ladungen und insbesondere Strömen ist die rechte Seite der Gleichung gleich 0. Dann erhalten wir (durch Integration über den gesamten Hohlraum und Verwendung des Gaußschen Satzes):

$$\frac{\partial U_{em}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V dV u_{em} = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = - \int_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{f} = 0 \quad (17)$$

wobei die letzte Gleichheit aus $\vec{S} \perp d\vec{f}$ folgt.

Wenn die Ladungen im Inneren des Hohlraums stationär sind, bleibt das Ergebnis unverändert, da weiterhin $\vec{j} = 0$ gilt. Wenn sie sich aber bewegen und dadurch einen Strom ergeben, kann das Ergebnis verändert werden.

Aufgabe 3: Das hohle Rohr

(4 P)

In dieser Aufgabe werden Sie den Effekt eines konstanten elektrischen Felds auf einen hohlen Zylinder betrachten. Die Aufgabe verlangt sowohl Berechnungen als auch physikalische Argumentation.

Gegeben sei ein langer, hohler, leitender Zylinder mit dem Radius R , der sich entlang der z -Achse erstreckt. Sie können den Zylinder als unendlich lang nähern und die Dicke des Zylindermantels vernachlässigen. Der Zylinder ist in einem elektrischen Feld $\vec{E}$, senkrecht zur z -Achse, eingebettet. Bei großen Abständen zum Zylinder wird das gesamte E-Feld (also die Summe aus externem und vom Zylinder erzeugtem Feld) konstant: $\vec{E}_{\infty} = \vec{E}_0 \hat{e}_x$. Daraus ergibt sich das Potential bei großen Abständen: $\phi_{\infty} = -E_0 x$.

3.a) Geben Sie die Randbedingung an, die das Potential ϕ an der Oberfläche des Zylinders $\rho = R$ erfüllen muss.

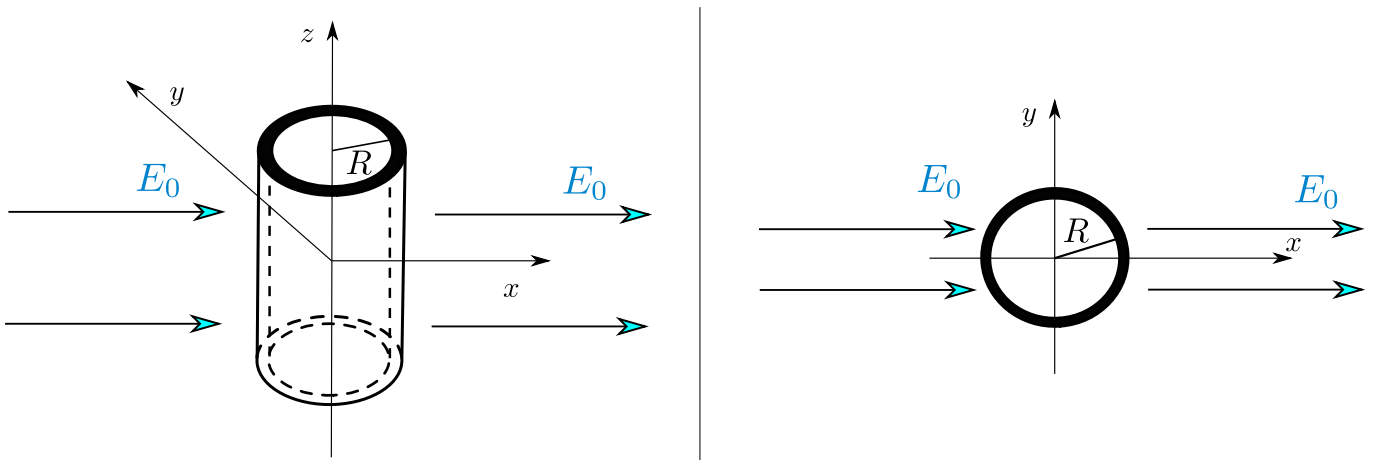
3.b) Was ist das elektrische Feld innerhalb des Zylinders, also für $\rho < R$?

Im Außenraum, also für $\rho > R$ kann das Potential aufgrund der Symmetrie des Problems nicht von z abhängen. Um nun die Abhängigkeit von ρ und φ zu ermitteln, kann die Methode der Separation der Variablen verwendet werden: $\phi(\rho, \varphi) = U(\rho)T(\varphi)$.

- 3.c) Finden Sie eine Differentialgleichung für $T(\varphi)$ im Außenraum und zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung von der Form $T(\varphi) = a \cos(m\varphi) + b \sin(m\varphi)$ mit einer Konstanten m ist. Benutzen Sie die Periodizitätsbedingung $T(\varphi + 2\pi) = T(\varphi)$ um die möglichen Werte, die m annehmen kann, einzuschränken.
- 3.d) Bestimmen Sie eine Differentialgleichung für $U(\rho)$. Zeigen Sie, dass für $m \neq 0$ die Funktion $U(\rho) = c\rho^m$ die Differentialgleichung löst. Was ist die allgemeine Lösung für $m = 0$?
- 3.e) Kombinieren Sie ihre vorherigen Ergebnisse und zeigen Sie, dass die allgemeinste Lösung des Potentials durch den folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\phi(\rho, \varphi) = a_0 + b_0 \log(\rho) + \sum_{k \neq 0} \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \quad (18)$$

- 3.f) Nutzen Sie die Randbedingungen und bestimmen Sie das Potential außerhalb des Zylinders.



Lösung zu Aufgabe 3:

Das Potenzial muss auf der Oberfläche des Leiters, also für $\rho = R$, konstant sein und kann auf 0 gesetzt werden.

Das elektrische Feld innerhalb des Leiters ist einfach 0, da der Zylinder einen Faraday-Käfig bildet.

Das Problem ist invariant unter Translation in z -Richtung, daher können wir $\phi(\rho, \varphi, z) = U(\rho)T(\varphi)$ schreiben. Wenn wir dies in die Laplace-Gleichung einsetzen, erhalten wir:

$$\frac{T(\varphi)}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dU(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{U(\rho)}{\rho^2} \frac{d^2 T(\varphi)}{d\varphi^2} = 0, \quad \rightarrow \quad \frac{\rho}{U(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dU(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{T(\varphi)} \frac{d^2 T(\varphi)}{d\varphi^2} = 0. \quad (19)$$

wobei wie üblich die beiden Terme Konstanten mit entgegengesetzten Vorzeichen sein müssen. Insbesondere erhalten wir:

$$\frac{d^2 T(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2 T(\varphi) \rightarrow T(\varphi) = a \cos(m\varphi) + b \sin(m\varphi) \quad (20)$$

Da $U(\varphi) = U(\varphi + 2\pi)$ gilt, muss m eine ganze Zahl sein.

Für den radialen Teil kann die DGL umgeschrieben werden als

$$\rho^2 \frac{d^2 U}{d\rho^2} + \rho \frac{dU}{d\rho} - m^2 U = 0. \quad (21)$$

Die Lösung mag auf den ersten Blick nicht einfach aussehen, aber wenn wir den Hinweis $U(\rho) = \rho^m$ verwenden und einsetzen, erhalten wir:

$$\rho^2 m(m-1)\rho^{m-2} + \rho m \rho^{m-1} - m^2 \rho^m = (m^2 - m^2)\rho^m = 0. \quad (22)$$

Der Fall $m = 0$ sollte direkt gelöst werden:

$$\frac{\rho}{U(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dU(\rho)}{d\rho} \right) = 0 \rightarrow \rho \frac{dU(\rho)}{d\rho} = c_2, \quad (23)$$

welches die Terme $U(\rho) = c_1 + c_2 \log \rho$ ergibt.

Die allgemeine Lösung ist durch die Kombination der vorherigen Lösungen für unterschiedliche Werte von k gegeben:

$$\phi(\rho, \varphi) = U_{k=0}(\rho)T_{k=0}(\varphi) + \sum_{k \neq 0} U_k(\rho)T_k(\varphi) = a_0 + b_0 \log \rho + \sum_{k \neq 0} \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \quad (24)$$

wobei im ersten Term die Konstante $T_{k=0} = a_0$ in den Koeffizienten des konstanten und logarithmischen Terme wieder absorbiert wurde.

Für große x haben wir $\phi = -E_0 x = -E_0 \rho \cos \varphi$. Um die richtige $\cos \varphi$ -Abhängigkeit für große x zu erhalten, benötigen wir $k = \pm 1$. Die gleiche Anforderung impliziert auch $b_k = 0$.

Darüber hinaus muss der Logarithmus verschwinden, um das richtige ρ -Verhalten des Potentials weit entfernt vom Ursprung zu erhalten (das bedeutet $b_0 = 0$). Die Lösung vereinfacht sich zu:

$$\phi(\rho, \varphi) = \rho a_1 \cos \varphi + \frac{1}{\rho} a_{-1} \cos \varphi \quad (25)$$

wobei wir auch $a_0 = 0$ gesetzt haben.

Nun fordern wir, dass die restlichen Bedingungen erfüllt werden

$$\begin{cases} R a_1 \cos \varphi + \frac{1}{R} a_{-1} \cos \varphi &= 0 \\ \rho a_1 \cos \varphi &= -E_0 \rho \cos \varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_{-1} &= E_0 R^2 \\ a_1 &= -E_0 \end{cases} \quad (26)$$

und bekommen

$$\phi(\rho, \varphi) = -E_0 \rho \cos \varphi \left(1 - \left(\frac{R}{\rho} \right)^2 \right). \quad (27)$$

Vektoroperatoren in zylindrischen Koordinaten

Für $f = f(\rho, \varphi, z)$ und $\vec{A} = A_\rho(\rho, \varphi, z) \hat{e}_\rho + A_\varphi(\rho, \varphi, z) \hat{e}_\varphi + A_z(\rho, \varphi, z) \hat{e}_z$:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z \quad (28)$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (29)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (30)$$

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{e}_z \quad (31)$$

Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten

Für $f = f(r, \theta, \varphi)$ und $\vec{A} = A_r(r, \theta, \varphi) \hat{e}_r + A_\theta(r, \theta, \varphi) \hat{e}_\theta + A_\varphi(r, \theta, \varphi) \hat{e}_\varphi$:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi \quad (32)$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (33)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (34)$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \hat{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\varphi \quad (35)$$