Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)
Übungsklausur

Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024

Ausgabe: 20.12.2023, Dauer: 90 mins

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen**, **Übungsgruppe** und **Matrikelnummer** auf die Lösung.

Aufgabe 1: Magnetisches Vektor-Potential (4 P)

In dieser Aufgabe werden Sie verschiedene Vektorpotentiale untersuchen, um die physikalischen Felder und die Eichung zu bestimmen. Betrachten Sie dafür die folgenden magnetischen Vektorpotentiale innerhalb eines endlichen Volumens V um den Ursprung:

$$\vec{A}_1 = B_1 \begin{pmatrix} x+y-z \\ -x+y+z \\ x-y+z \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\vec{A}_2 = B_2\, d^3 \frac{\vec{r}}{r^3}, \tag{2}$$

wobei d eine konstante Länge ist und B_1 und B_2 Konstanten mit der Einheit eines magnetischen Feldes sind.

1.a) Bestimmen Sie die magnetischen Felder, die durch $\vec{A}_1$ und $\vec{A}_2$ erzeugt werden.

1.b) Sind die Vektorpotentiale in der Coulomb-Eichung? **Vorsicht:** Für $\vec{A}_2$ müssen Sie den Fall $r \to 0$ getrennt diskutieren.

1.c) Für das/die Vektorpotential/e, das/die nicht in Coulomb-Eichung ist/sind, finden Sie eine Eichtransformation, so dass das neue Vektorpotential die Coulomb-Eichungbedingung erfüllt.

Hinweis: Mehrere Lösungswege sind möglich. Es ist erlaubt einfach zu raten ohne das Problem formal zu lösen.

Aufgabe 2: Der hohle Leiter (2 P)

Im Folgenden werden Sie untersuchen, was im Inneren eines Hohlraums in einem Leiter geschieht. Dabei sind keine detailierten Rechnungen erforderlich, sondern physikalisches Verständnis und die Anwendung physikalischer Eigenschaften der Felder.

Betrachten Sie einen ausgedehnten leitenden Körper mit einem Hohlraum im Inneren. Der Hohlraum ist so gemacht, dass er nicht mit der äußeren Oberfläche des Leiters kommuniziert: Die Kavität ist vollständig von leitendem Material umgeben. Ihre Form beeinflusst die Ergebnisse nicht. Sie wissen aus der Vorlesung, dass in einem solchen Hohlraum keine statischen elektrischen Felder existieren können, wohl aber zeitabhängige Felder, also elektromagnetische Wellen.

2.a) Welche Bedingungen erfüllt das elektrische Feld an der Oberfläche des Leiters? Was implizieren diese für die Richtung des Poynting Vektors $\vec{S}$ an der Oberfläche?

2.b) Zeigen Sie, dass wenn es keine Ladungen in der Kavität gibt, die Gesamtenergie, die im elektromagnetischen Feld gespeichert ist, konstant bleibt.

2.c) Bleibt das vorherige Ergebnis gültig, wenn es stationäre Ladungen im Hohlraum gibt? Was passierte, wenn die Ladungen sich bewegen?

Aufgabe 3: Das hohle Rohr (4 P)

In dieser Aufgabe werden Sie den Effekt eines konstanten elektrischen Felds auf einen hohlen Zylinder betrachten. Die Aufgabe verlangt sowohl Berechnungen als auch physikalische Argumentation.

Gegeben sei ein langer, hohler, leitender Zylinder mit dem Radius R, der sich entlang der z-Achse erstreckt. Sie können den Zylinder als unendlich lang nähern und die Dicke des Zylindermantels vernachlässigen. Der Zylinder ist in einem elektrischen Feld $\vec{E}$, senkrecht zur z-Achse, eingebettet. Bei großen Abständen zum Zylinder wird das gesamte E-Feld (also die Summe aus externem und vom Zylinder erzeugten Feld) konstant: $\vec{E}_\infty = \vec{E}_0\, \hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{x}}$. Daraus ergibt sich das Potential bei großen Abständen: $\phi_\infty = -E_0 x$.

3.a) Geben Sie die Randbedingung an, die das Potential ϕ an der Oberfläche des Zylinders $\rho = R$ erfüllen muss.

3.b) Was ist das elektrische Feld innerhalb des Zylinders, also für $\rho < R$?

Im Außenraum, also für $\rho > R$ kann das Potential aufgrund der Symmetrie des Problems nicht von z abhängen. Um nun die Abhängigkeit von ρ und φ zu ermitteln, kann die Methode der Separation der Variablen verwendet werden: $\phi(\rho, \varphi) = U(\rho)T(\varphi)$.

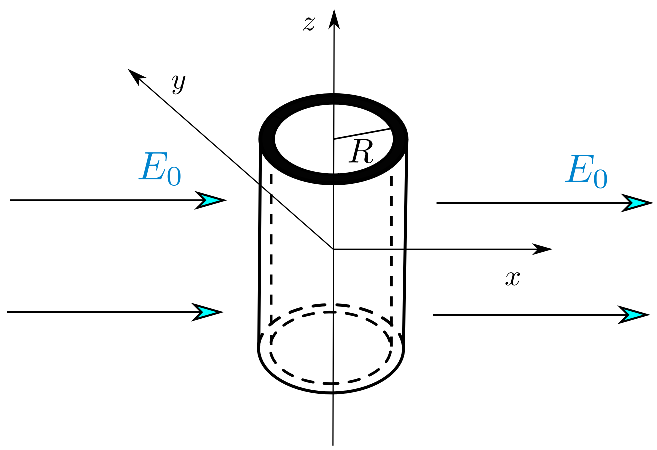
3.c) Finden Sie eine Differentialgleichung für $T(\varphi)$ im Außenraum und zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung von der Form $T(\varphi) = a\cos(m\varphi) + b\sin(m\varphi)$ mit einer Konstanten m ist. Benutzen Sie die Periodizitätsbedingung $T(\varphi + 2\pi) = T(\varphi)$ um die möglichen Werte, die m annehmen kann, einzuschränken.

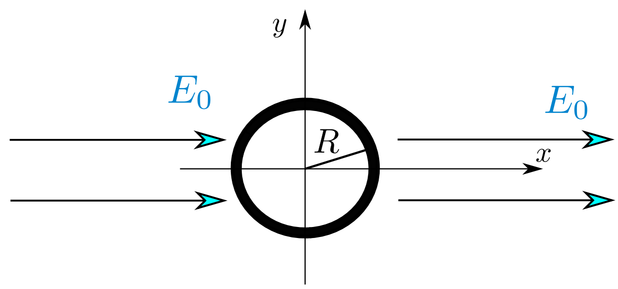
3.d) Bestimmen sie eine Differentialgleichung für $U(\rho)$. Zeigen Sie, dass für $m \neq 0$ die Funktion $U(\rho) = c\rho^m$ die Differentialgleichung löst. Was ist die allgemeine Lösung für $m = 0$?

3.e) Kombinieren Sie ihre vorherigen Ergebnisse und zeigen Sie, dass die allgemeinste Lösung des Potentials durch den folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\phi(\rho, \varphi) = a_0 + b_0 \log(\rho) + \sum_{k \neq 0} \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \ . \tag{3}$$

3.f) Nutzen Sie die Randbedingungen und bestimmen Sie das Potential außerhalb des Zylinders.





Vektoroperatoren in zylindrischen Koordinaten

Für $f = f(\rho, \varphi, z)$ und $\vec{A} = A_\rho(\rho, \varphi, z)\,\hat{e}_\rho + A_\varphi(\rho, \varphi, z)\,\hat{e}_\varphi + A_z(\rho, \varphi, z)\,\hat{e}_z$:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\,\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{e}_z \tag{4}$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{5}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{6}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\hat{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\hat{e}_z \tag{7}$$

Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten

Für $f = f(r, \theta, \varphi)$ und $\vec{A} = A_r(r, \theta, \varphi)\,\hat{e}_r + A_\theta(r, \theta, \varphi)\,\hat{e}_\theta + A_\varphi(r, \theta, \varphi)\,\hat{e}_\varphi$:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\hat{e}_\varphi \tag{8}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \tag{9}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \tag{10}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(A_\varphi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\hat{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\hat{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\hat{e}_\varphi \tag{11}$$