

Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Übungsklausur 2

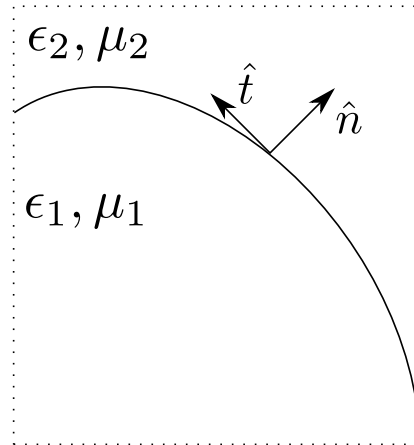
Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024

Ausgabe: 14.02.2024, Dauer: 120 mins
Veröffentlichung der Musterlösung: 21.02.2024

Aufgabe 1: Randbedingungen in Materie

(2 P)

Betrachten Sie ein Material mit der Permittivität ϵ_1 und der Permeabilität μ_1 , das mit einem Material mit Permittivität ϵ_2 und Permeabilität μ_2 in Kontakt steht.



- Leiten Sie die Randbedingung für $\vec{D}_\perp = \hat{n}(\vec{D} \cdot \hat{n})$ in Abwesenheit freier Ladungen her.
- Wie ändern sich die vorherigen Ergebnisse, wenn es freie Ladungen gibt?
- Leiten Sie die Randbedingung für $\vec{H}_\parallel = \vec{H} - \vec{H}_\perp$ in Abwesenheit freier Ströme her.
- Wie ändern sich die vorherigen Ergebnisse, wenn es freie Ströme gibt?

Lösung 1.a)

(0.5 Punkte)

Hier gehen wir ähnlich wie für die Stetigkeitsbedingungen der E und B -Felder vor. Wir integrieren über $\vec{D}$ in einer infinitesimal kleinen Box um die Grenzfläche der beiden Dielektrika. Für $\vec{D}$ gilt $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$ (in Abwesenheit freier Ladungen). Seien Sie jedoch vorsichtig, da $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ in dielektrischen Materialien nicht mehr gilt, ist die senkrechte Komponente des E -Feldes im Allgemeinen nicht mehr stetig: $\vec{E}_\perp^1 \neq \vec{E}_\perp^2$.

Zurück zu unserem Integrationsvolumen: wir betrachten ein Zylinder mit einer Höhe h und einer Grundfläche A . Wir bekommen:

$$0 = \int_V dV \rho_f = \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \int_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \vec{D}_2 \cdot (A\hat{n}_2) + \vec{D}_1 \cdot (A\hat{n}_1) + \text{Fluss durch Zylindermantel} \quad (1)$$

wobei wir die Grundfläche A als klein genug nehmen, um das Feld auf ihrer Oberfläche als konstant approximieren zu können. Der "Fluss durch den Zylindermantel" ist durch die Oberfläche $2\pi Rh$ bestimmt. Wie üblich betrachten wir das Limit, in dem $h \rightarrow 0$ geht, sodass dieser Fluss effektiv 0 ist. Außerdem sind die Normalvektoren auf Grundflächen entgegengesetzt: $\hat{n}_2 = \hat{n} = -\hat{n}_1$. Also haben wir $\vec{D}_\perp^1 = \vec{D}_\perp^2$.

Lösung 1.b)

(0.5 Punkte)

Falls es freie Ladungen gibt, erhalten wir ($\vec{D}$ -Fluss bleibt unverändert):

$$A(\vec{D}_\perp^2 - \vec{D}_\perp^1) = \int_V dV \rho_f = Q_f \quad (2)$$

wobei Q_f die eingeschlossene Gesamtladung ist. Wir haben wieder die Höhe des Zylinders vernachlässigt und nur Beiträge von den Grundflächen betrachtet.

$$\vec{D}_\perp^2 - \vec{D}_\perp^1 = \frac{Q}{A} \equiv \sigma_f, \quad (3)$$

wobei σ_f die Oberflächenladungsdichte der freien Ladungen ist.

Lösung 1.c)

(0.5 Punkte)

Wie im Fall der Herleitungen der Stetigkeit von $\vec{B}_\parallel$, betrachten wir hier einen rechteckigen Integrationspfad. Wir betrachten jedoch das Feld $\vec{H}$, für das (in Abwesenheit freier Ladungen) $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$ gilt. Seien Sie jedoch vorsichtig, in dielektrischen Materialien gilt nicht $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$, daher haben wir im Allgemeinen nicht $\vec{B}_\parallel^1 = \vec{B}_\parallel^2$.

Zurück zum Integrationspfad: Wir betrachten ein Rechteck mit einer Höhe h und einer Länge l , aber vernachlässigen wieder die Höhe h , d.h. $h \rightarrow 0$. Wir erhalten:

$$0 = \int_S \vec{j}_f \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \vec{H}_2 \cdot (l\hat{t}_2) + \vec{H}_1 \cdot (l\hat{t}_1) \quad (4)$$

wobei wir die Basislänge l klein genug genommen haben, um das Feld auf der Rechteckbasis als konstant approximieren zu können. Wir haben die Beiträge entlang der Höhe verschwinden im Limit $h \rightarrow 0$. Aber auch wenn wir nicht das Limit $h \rightarrow 0$ nehmen würden, heben sich die Beiträge gegenseitig auf (wenn die Feldwerte auf den Höhen des Rechtecks gleich sind, was für infinitesimale Integrationsflächen gültig ist). Außerdem gilt $\hat{t}_2 = \hat{t} = -\hat{t}_1$.

Also haben wir $\vec{H}_\parallel^1 = \vec{H}_\parallel^2$.

Lösung 1.d)

(0.5 Punkte)

Falls es freie Ströme gibt, haben wir (das Wegintegral von $\vec{H}$ bleibt unverändert):

$$l(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{t} = \int_S \vec{j}_f \cdot d\vec{S} = J_\perp \quad (5)$$

wobei wir das Limit $h \rightarrow 0$ verwendet haben, um die Stromdichte als konstant approximieren zu können. $J_\perp$ ist der Gesamtstrom, der durch die Oberfläche S fließt.

Also haben wir $(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{t} = J_\perp / l$.

Dies könnte ähnlich verwendet werden, um $k_\perp = J_\perp / l$ zu definieren, wobei $\vec{k}$ die Stromdichte pro Länge wäre, während $\vec{j}$ die Stromdichte pro Fläche ist. Wir können dann Folgendes schreiben: $\vec{H}_\parallel^2 - \vec{H}_\parallel^1 = k_\perp$.

Aufgabe 2: Vierer-Potential für bewegte Punktladung (4 P)

Betrachten Sie eine bewegte Punktladung mit dem Ortsvektor $\vec{r}_q(t)$ in einem Inertialsystem $\mathcal{I}$.

2.a) Geben Sie den Vierer-Vektor $x_q^\mu(t)$ an, welcher die Position der Punktladung in der Raumzeit charakterisiert, sowie die Vierer-Geschwindigkeit $u_q^\mu(t)$ in Abhängigkeit von $\vec{v}_q(t) = \dot{\vec{r}}_q$.

2.b) Betrachten Sie nun eine Messung bei $x^\mu = (t, \vec{r})$ und den Vierer-Abstandsvektor $R^\mu(t') = x^\mu - x_q^\mu(t')$. Zeigen Sie, dass eine elektromagnetische Welle, die von der Punktladung zum Zeitpunkt t' ausgesendet wird, genau dann bei x^μ gemessen wird, wenn $R^\mu(t')R_\mu(t') = 0$ gilt. Lösen Sie diese Gleichung für t' (mit der zusätzlichen Bedingung $R^0(t') > 0$, um Kausalität sicherzustellen).

2.c) Zeigen Sie, dass

$$u^\nu(t')R_\nu(t') = \gamma_q(t')c(1 - \hat{e}_q(t') \cdot \vec{\beta}_q(t'))|\vec{r} - \vec{r}_q(t')| \quad (6)$$

wobei $\hat{e}_q(t')$ wie folgt definiert ist:

$$\hat{e}_q(t') = \frac{\vec{r} - \vec{r}_q(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t')|}. \quad (7)$$

2.d) Betrachten Sie das Vierer-Potential

$$A^\mu(x^\mu) = \frac{\mu_0 qc}{4\pi} \frac{u_q^\mu(t')}{u_q^\nu(t')R_\nu(t')} \Big|_{R^\nu R_\nu=0, R^0>0} \quad (8)$$

Welche Ausdrücke ergeben sich daraus für das Skalarpotential Φ und das Vektorpotential $\vec{A}$ in Abhängigkeit von $\hat{e}_q(t')$ und $\vec{\beta}_q(t')$?

2.e) Wie transformiert das Vierer-Potential unter einer Lorentztransformation Λ vom Inertialsystem $\mathcal{I}$ zum Inertialsystem $\mathcal{I}'$?

Lösung zu Aufgabe 2:

Lösung 2.a)

(0.5 Punkte)

Der Vierer-Ortsvektor ist $x_q^\mu(t) = (ct, \vec{r}_q(t))$. Und für die Vierer-Geschwindigkeit gilt

$$u_q^\mu = \frac{dx_q^\mu(t)}{d\tau} = \frac{dx_q^\mu(t)}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma(\vec{v}_q(t)) \frac{dx_q^\mu(t)}{dt} \quad (9)$$

wobei τ die Eigenzeit und γ der Lorentzfaktor ist.

Lösung 2.b)

(1 Punkte)

Wir haben $x^\mu = (ct, \vec{r})$ und $x_q^\mu = (ct', \vec{r}_q(t'))$. Die Differenz beider Vektoren ergibt:

$$R^\mu = (c(t - t'), \vec{r} - \vec{r}_q(t')) \quad (10)$$

Wenn wir diese quadrieren, bekommen wir:

$$R^\nu R_\nu = \eta_{\mu\nu} R^\mu R^\nu = c^2(t - t')^2 - |\vec{r} - \vec{r}_q(t')|^2 \quad (11)$$

Die erste Bedingung $R^\nu R_\nu = 0$ entspricht

$$c^2(t - t')^2 = |\vec{r} - \vec{r}_q(t')|^2 \rightarrow t - t' = \pm \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q(t')|}{c} \quad (12)$$

während die Zweite $t - t' > 0$ impliziert. Es folgt

$$t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q(t')|}{c}. \quad (13)$$

Das ist die retardierte Zeit, die wir in der Vorlesung und vorherigen Aufgaben kennengelernt haben.

Was ist die physikalische Interpretation des Ergebnis (wie in $\mathcal{I}$ gesehen)? Der räumliche Abstand zwischen dem Emissionspunkt $\vec{r}_q(t')$ und dem Beobachtungspunkt $\vec{r}$ ist $|\vec{r} - \vec{r}_q(t')|$. Die Zeit zwischen der Emission und der Beobachtung ist $|t' - t|$. Die Geschwindigkeit des Signals, um diese Entfernung in dieser Zeit zurückzulegen, ist $\frac{|\vec{r} - \vec{r}_q(t')|}{|t' - t|}$. Im Fall einer elektromagnetischen Welle (im Vakuum) beträgt die Geschwindigkeit des Signals c . Für Ereignisse, deren Abstand die Bedingung $R^\nu R_\nu = 0$ erfüllt, sprechen wir von *lichtartigen* Ereignissen, da sie für ein Signal, das mit Lichtgeschwindigkeit reist, in kausalem Kontakt stehen.

Lösung 2.c)

(1 Punkte)

Die Vierer-Geschwindigkeit ist $u^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v}_q)$. Aus der Kontraktion mit dem Abstandsvektor folgt

$$u^\nu R_\nu = \gamma c^2(t - t') - \gamma \vec{v}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q(t')) \quad (14)$$

Nun muss das Ergebnis für $t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q(t')|}{c}$ ausgewertet werden. Außerdem können wir die aus der Vorlesung bekannten Definition $\vec{r} - \vec{r}_q(t') = |\vec{r} - \vec{r}_q(t')| \hat{e}_q$ einführen:

$$u^\nu R_\nu \Big|_{R^\nu R_\nu=0, R^0>0} = \gamma c^2 \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q(t')|}{c} - \gamma c \vec{\beta}_q \cdot |\vec{r} - \vec{r}_q(t')| \hat{e}_q = \gamma c |\vec{r} - \vec{r}_q(t')| (1 - \vec{\beta}_q \cdot \hat{e}_q) \quad (15)$$

Dieser Ausdruck sollte bekannt sein, da er dem Nenner der retardierten Potenziale entspricht. Erinnern Sie sich an die Definition des Vierer-Potentials $A^\mu = (\frac{\Phi}{c}, \vec{A})$.

Lösung 2.d)

(1 Punkte)

$$\Phi = c A^0 = \frac{\mu_0 q c^2}{4\pi} \frac{u^0}{u^\nu R_\nu} \Big|_{R^\nu R_\nu=0, R^0>0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma c}{\gamma c |\vec{r} - \vec{r}_q(t')| (1 - \vec{\beta}_q \cdot \hat{e}_q)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t')| (1 - \vec{\beta}_q \cdot \hat{e}_q)} \quad (16)$$

Dieser Ausdruck entspricht dem retardierten Skalarpotential, das Sie in der Vorlesung in einer weniger kompakten Form gesehen haben.

Es sollte einen nicht überraschen, dass die Komponenten A^i dem retardierten Vektorpotential entsprechen, dennoch rechnen wir sie explizit aus:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 q c}{4\pi} \frac{u^i \hat{e}_i}{u^\nu R_\nu} \Big|_{R^\nu R_\nu=0, R^0>0} = \frac{\mu_0 q c}{4\pi} \frac{\gamma c \vec{\beta}_q}{\gamma c |\vec{r} - \vec{r}_q(t')| (1 - \vec{\beta}_q \cdot \hat{e}_q)} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t')| (1 - \vec{\beta}_q \cdot \hat{e}_q)} \quad (17)$$

welches, wie erwartet, dem retardierten magnetischen Vektorpotential entspricht.

Lösung 2.e)

(0.5 Punkte)

Das Vierer-Potential A^μ ist ein Vierer-Vektor und erfüllt die gewöhnlichen Transformationsregeln:

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu. \quad (18)$$

Für einen expliziten Ausdruck können wir ein Bezugssystem mit einer Geschwindigkeit $\vec{v} = v \hat{e}_x$ betrachten:

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu} \rightarrow = \begin{pmatrix} \frac{\Phi'}{c} \\ A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\Phi}{c} \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\frac{\Phi}{c} - \beta A_x) \\ \gamma(A_x - \beta \frac{\Phi}{c}) \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Aufgabe 3: Die reflektierte Welle

(4 P)

Betrachten Sie eine elektromagnetische Welle, die in die z -Richtung propagiert. Die elektrische Feldkomponente dieser Welle ist

$$\vec{E}_{\text{in}} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{e}_x. \quad (20)$$

Bei $z = 0$ trifft die elektromagnetische Welle auf einen perfekten Leiter mit unendlicher Leitfähigkeit. Durch die induzierte Oberflächenladung entsteht eine zweite elektromagnetische Welle, die in die entgegengesetzte Richtung propagiert:

$$\vec{E}_{\text{ref}} = E_1 e^{i(-kz - \omega t + \phi)} \hat{e}_x. \quad (21)$$

- 3.a) Welche Randbedingung muss das elektrische Feld bei $z = 0$ erfüllen? Bestimmen Sie daraus die Amplitude E_1 und Phase ϕ der reflektierten Welle.
- 3.b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}_{\text{tot}}$, das aus der Überlagerung der einlaufenden und reflektierten Welle entsteht. Schreiben Sie $\vec{E}_{\text{tot}}$ in Form trigonometrischer Funktionen auf.
- 3.c) Skizzieren Sie $\text{Re}(\vec{E}_{\text{tot}}(z, t))$ als Funktion von z (für $z < 0$) für zwei Zeitpunkte $t_1 \in (0, \frac{\pi}{\omega})$ und $t_2 \in (\frac{\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega})$.
- 3.d) Bestimmen Sie $\vec{B}_{\text{tot}}$, d.h. die Summe der eingehenden und reflektierten magnetischen Komponenten der elektromagnetischen Welle für $z < 0$. Ist auch für das magnetische Feld die Randbedingung bei $z = 0$ erfüllt?

Lösung zu Aufgabe 3:

Lösung 3.a)

(0.5 Punkte)

Das Potential muss auf der Oberfläche konstant sein, daher muss die parallele Komponente vom E-Feld an der Grenzfläche verschwinden. Dies impliziert:

$$0 = \vec{E}_{\text{in}}(z = 0, t) + \vec{E}_{\text{ref}}(z = 0) = (E_0 + E_1 e^{i\phi}) e^{-i\omega t} \hat{e}_x \rightarrow E_1 = E_0, \phi = \pi \quad (22)$$

Die reflektierte Welle ist also um π phasenverschoben gegenüber der eingehenden Welle.

Lösung 3.b)

(1 Punkte)

Die reflektierte Welle ist:

$$\vec{E}_{\text{ref}} = -E_0 e^{i(-kz - \omega t)} \hat{e}_x \quad (23)$$

Das Vorzeichenwechsel der Amplitude kann damit physikalisch erklärt werden, dass der Leiter die Wirkung des einfallenden elektrischen Feldes ausgleichen muss. Dies ist auch erforderlich, um die Randbedingung zu reproduzieren, dass das elektrische Feld auf dem Leiter verschwindet und die parallele Komponente des Feldes stetig ist.

Wenn wir beide Felder summieren, bekommen wir:

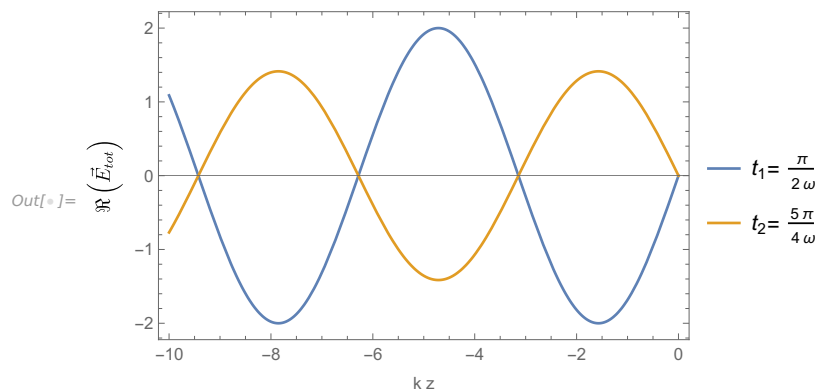
$$\vec{E}_{tot} = E_0 \hat{e}_x (e^{i(kz-\omega t)} - e^{-i(kz+\omega t)}) = E_0 \hat{e}_x e^{-i\omega t} (e^{ikz} - e^{-ikz}) = 2E_0 \hat{e}_x \sin(kz) i e^{-i\omega t} \quad (24)$$

sodass der Realteil $\text{Re}(\vec{E}_{tot}) = 2E_0 \sin(kz) \sin(\omega t) \hat{e}_x$ ist.

Lösung 3.c)

(1 Punkte)

Für t_1 und t_2 hat das Feld entgegengesetzte Vorzeichen (in Richtung $\hat{e}_x$ und dann in Richtung $-\hat{e}_x$). Es ist auch wichtig zu bemerken, dass die Positionen der Maxima/Minima und Nullstellen gleich bleiben: Dies ist eine stehende Welle! Wir skizzieren für $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ und $t_2 = \frac{5\pi}{4\omega}$, sodass in einem Fall die maximale Amplitude 2 ist und im anderen Fall $\sqrt{2}$ ist.



Lösung 3.d)

(1.5 Punkte)

Die einfallende und reflektierte magnetische Welle können durch $\vec{B} = \frac{\hat{k}}{c} \times \vec{E}$ bestimmt werden. Dabei muss beachtet werden, dass k der reflektierten Welle das entgegengesetzte Vorzeichen hat! $\hat{k}_{in} = \hat{e}_z$ and $\hat{k}_{ref} = -\hat{e}_z$:

$$\vec{B}_{in} = \frac{E_0}{c} e^{i(kz-\omega t)} \hat{e}_y \quad (25)$$

$$\vec{B}_{ref} = \frac{E_0}{c} e^{-i(kz+\omega t)} \hat{e}_y \quad (26)$$

Das gesamte Magnetfeld ist

$$\vec{B}_{tot} = \frac{E_0}{c} (e^{-i(kz-\omega t)} + e^{-i(kz+\omega t)}) \hat{e}_y = 2 \frac{E_0}{c} e^{-i\omega t} \cos(kz) \hat{e}_y \quad (27)$$

Der Realteil ist durch $\text{Re}(\vec{B}_{tot}) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(kz) \cos(\omega t) \hat{e}_y$ gegeben.

Im Gegensatz zum E-Feld verschwindet das B-Feld nicht an der Leiteroberfläche. Dies stellt keinen Widerspruch dar, da auf der Oberfläche eines Leiters nur die Normalkomponente des B-Feldes verschwinden muss.

Lösung 3.e)

(0 Punkte)

Über den Aufgabentext hinaus: was passiert im Leiter?

Intuitiv und durch Symmetrieüberlegungen wird die vom Leiter generierte Welle auf beiden Seiten der Grenzfläche gleich sein. Sie propagiert nur in die andere Richtung ($\hat{e}_z$). Sie hat also die Form:

$$\vec{E}_{trans} = -E_0 e^{-i(-kz+\omega t)} \hat{e}_x \quad (28)$$

Diese Welle würde $\vec{E}_{in}$ ausgleichen, sodass kein E-Feld im Leiter entsteht. Für das Magnetfeld bekommen wir $\vec{B}_{trans} = \frac{\hat{e}_z}{c} \times \vec{E}_{trans}$, sodass:

$$\vec{B}_{trans} = -\frac{E_0}{c} e^{-i(-kz+\omega t)} \hat{e}_y \quad (29)$$

welches $\vec{B}_{in}$ ausgleicht. Insgesamt sind keine magnetischen oder elektrischen Felder im Leiter.

Beachten Sie, dass die parallele Komponente des magnetischen Feldes eine Diskontinuität aufweist, aber das ist kein Problem, da wir wissen, dass die parallele Komponente des magnetischen Feldes nicht stetig sein muss. Tatsächlich wissen wir, dass die Diskontinuität mit dem induzierten Strom im Leiter zusammenhängt.

Unter Verwendung der Randbedingung, die wir haben (alles im Vakuum) $\vec{j} = -\hat{e}_z \times (\vec{B}_{left} - \vec{B}_{right}) = -\hat{e}_z \times \vec{B}_{left} = 2\frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \hat{e}_x$.

Advertisement

We would like to take the chance to advertise the theater group of the physics department, you can find more information at <https://physikertheater.de/>.