Skript zur Theoretischen Physik C

Autor: Marco Antoni

letzte Aktualisierung: 9. April 2009

Gefundene Fehler werden von mir mit einer neuen, fehlerbereinigt(er)en Version belohnt :o)
Wie immer gilt noch vor allen anderen Dingen: don't panic.

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Hilfsmittel

1.1 Die Dirac'sche Deltafunktion $\delta(x)$

(genau genommen: δ-Distribution)

1.1.1 Definition

sei $x \in \mathbb{R}, I \subseteq \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\int_I dx\ \delta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x_0 \in I \\ 0 & \text{wenn } x_0 \notin I \end{cases}$$

1.1.2 Explizite Definition (eine von vielen):

$$\delta(x-a) = \frac{1}{\pi} \text{"}\lim_{\eta \to 0}\text{"} \left(\frac{\eta}{\eta^2 + (x-a)^2} \right)$$

1.1.3 Eigenschaften der δ-Funktion:

1. $\int\limits_\alpha^\beta dx\, [f(x) \cdot \delta(x-a)] = \begin{cases} f(a) & a \in (\alpha, \beta) \\ 0 & a \notin (\alpha, \beta) \end{cases}$
2. $\delta(f(x)) = \sum\limits_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \cdot \delta(x - x_i)$
   Dabei sind x_i die einfachen Nullstellen von f(x). $f(x_i) = 0, f'(x_i) \neq 0$
3. $f(x) \cdot \delta'(x-a) = -f'(a) \cdot \delta(x-a)$
4. definiere Stufenfunktion $\Theta(x) \equiv \int\limits_{-\infty}^{x} dy\ \delta(y) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
   $x = 0$ ist Definitionslücke.

Die Eigenschaften 2 und 3 gelten dabei, wenn die linke Seite der Gleichung wie in Eigenschaft 1 an eine Funktion multipliziert und dieses Gesamtkonstrukt integriert wird.

1.2 Taylorentwicklung von Feldern

1.2.1 Funktion

$f(x)$ hat Taylorreihe um $x = x_0$:

$$f_T(x) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n \right)$$

Dabei gilt:

- $f^{(n)}$ ist n-te Ableitung von f: $f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$
- f ist in $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$
- im Konvergenzbereich $f_T(x) = f(x)$

1.2.2 Nablaoperator

$$\vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

1.2.3 Skalarfeld

$\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Taylorreihe von $\varphi(\vec{x})$ um $\vec{x}$:

$$\varphi_T(\vec{x} + \delta\vec{x}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{j=1}^{3} \delta x_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^n \cdot \varphi(\vec{x}) = e^{\delta\vec{x}\cdot\vec{\nabla}} \cdot \varphi(\vec{x})$$

1.2.4 Vektorfeld

$$\vec{E}(\vec{x}) \equiv \begin{pmatrix} E_1(x_1, x_2, x_3) \\ E_2(x_1, x_2, x_3) \\ E_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt: $\vec{x} \cdot \vec{y} \equiv x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

Kreuzprodukt: $(\vec{x} \times \vec{y})_k \equiv \epsilon_{ijk} x_i y_j \left(= \sum\limits_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk} x_i y_j \textit{ Einstein'sche Summenkonvention} \right)$,

$\epsilon_{ijk} =$ Epsilontensor $= \pm 1$

Taylorreihe von $\vec{E}(\vec{x})$ um $\vec{x}$:

$$\vec{E}_T(\vec{x} + \delta\vec{x}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=3}^{3} \delta x_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n \cdot \vec{E}(\vec{x}) = e^{\delta\vec{x}\cdot\vec{\nabla}} \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

1.2.5 Differentialoperatoren

- Gradient: grad$\varphi \equiv \vec{\nabla} \cdot \varphi$ (=Vektor)
- Divergenz: div$\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ (=Skalar)
- Rotation: rot$\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{E}$ (=Vektor)
- LAPLACE-Operator: $\triangle = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$

1.3 Flächenintegrale

Fläche $F = \{\vec{r}(u,v)|(u,v) \in D\} \subset \mathbb{R}^3$ u,v: Parameter, D: Definitionsmenge
orientierte Flächenelemente: $d\vec{f} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right) dv\, du \equiv df \cdot \hat{n}$

1.3.1 Fluss des Vektorfelds $\vec{E}(\vec{r})$ durch die Fläche S

$\delta\vec{f}$ = Teilfläche von S

$$\varphi_S(\vec{E}) \equiv \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{E}(\vec{r}_i) \cdot \delta\vec{f}(\vec{r}_i)$$
$$\varphi_S(\vec{E}) \equiv \int_S dvdu\, \vec{E}(\vec{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)$$

1.3.2 Zirkulation

C: geschlossene, doppelpunktfreie Kurve

$$Z_C(\vec{E}) \equiv \oint_C \vec{E} d\vec{r}$$

1.4 Bedeutung von grad, div und rot

- $\vec{y} \in \mathbb{R}^3, h(\vec{y}) \in \mathbb{R}$
  $\Rightarrow$ $grad\, h$ gibt die Richtung des steilsten Anstiegs(!) an.
- δV Volumenstück, $S(\delta V)$ Oberfläche (Surface) von δV
  $\Rightarrow (\star)\ div\, \vec{E} = \lim\limits_{\delta V\to 0} \frac{1}{\delta V} \oint_{S(\delta V)} \vec{E}\, d\vec{f}$ $\hat{=}$ Mittlere Quelldichte des Vektorfelds
- $\hat{n}$ ist Normalenvektor der Fläche F_C, ∂F_C eine geschlossene Linie um F_C
  $\Rightarrow (\star\star)\ \hat{n} \cdot rot\vec{E} = \lim\limits_{F_C\to 0} \frac{1}{F_C} \oint\limits_{\partial F_C} \vec{E} d\vec{r}$

  $rot\vec{E}$ ~"Mittlere Flächendichte der Zirkulation von $\vec{E}$"

1.5 Integralsätze

1.5.1 Gauß

∂V: Oberfläche von V, $d\vec{f}$: Flächenelement von ∂V

$$\int\limits_V d^3r \cdot div\vec{E}(\vec{r}) = \oint\limits_{\partial V} \vec{E} d\vec{f}$$

Herleitung mit $(\star)$, Grenzflächen benachbarter infinitesimaler Volumenelemente heben sich gegenseitig auf, so dass nur die Grenzfläche übrig bleibt.
2 Anwendungen:

- $\vec{j}$: Stromdichte, S: Fläche, ϱ Ladungsdichte

$$\oint\limits_S \vec{j}d\vec{f} = \text{ Strom durch S}$$

$$= \text{-Änderung der Gesamtladung}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \varrho d^3r$$

$$\stackrel{Gauß}{=} \int\limits_V div\vec{j}\, d^3r$$

$$\stackrel{(3),(4)}{\Rightarrow} \int\limits_V d^3r \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + div\vec{j}\right) = 0 \forall V \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0 \\ \textbf{Kontinuitätsgleichung}\end{array}}$$

- Green'sche Identität: φ, ψ :Skalarfelder

$$\int\limits_V \left(\varphi\triangle\psi + \vec{\nabla}\varphi\vec{\nabla}\psi\right) d^3r = \oint\limits_{\partial V} \varphi\vec{\nabla}\psi\, d\vec{f}$$

1.5.2 Stokes

F: eine Fläche, ∂F: umschließender Pfad der Fläche F, $d\vec{f}$: Flächenelement von F

$$\oint\limits_{\partial F} \vec{E}d\vec{r} = \int\limits_F rot\vec{E}d\vec{f}$$

Herleitung: Die Rotationen der Grenzflächen benachbarter infinitesimaler Flächenstücke heben sich gegenseitig auf, so dass nur die Grenzlinie übrig bleibt.

2 Elektrostatik

2.1 Coulombgesetz

Die gesamte Elektrostatik basiert auf dem Coulombgesetz (1785):

$$\vec{F}_1 = k \cdot q_1 q_2 \cdot \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}$$

Die <u>Gesamtkraft</u> auf ein Teilchen ist die Vektorsumme der einzelnen Coulombschen Zweikörperkräfte:

$$\vec{F}_i(\vec{x}_i) = q_i \cdot \sum_{j \neq i} q_j \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^3}$$

2.2 Einheitensysteme

- Gauss-cgs: $k = 1$ Ladungseinheit $\equiv$ esE (esU)

- MKSA(SI): $k \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \equiv 10^{-7}c^2$, Dielektrizitätskonstante des Vakuums $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}\frac{F}{m}$

Wir verwenden das cgs-System.

2.3 Das elektrische Feld

Ein mathematisches Konzept

$$\text{„}\lim_{q \to 0^+}\text{“} \frac{\vec{F}(\vec{x})}{q} \equiv \vec{E}(\vec{x}) \quad \big(\text{Elektrische Elementarladung} \approx 5 \cdot 10^{-16}\text{esu}\big)$$

Das E-Feld am Punkt $\vec{x}$, das eine Punktladung am Ort $\vec{x}_1$ erzeugt:

$$\vec{E}(\vec{x}) = q_1 \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3}$$

Lineare Superposition:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= \sum_{j=1}^{N} q_j \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} \\ &= \int d^3x' \varrho(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} \end{aligned}$$

Punktladung q, geschlossene Fläche S:

$$\Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \begin{cases} 4\pi q & q \in V(S) \\ 0 & q \notin V(S) \end{cases}$$

2.3.1 Das Gauß'sche Gesetz

Verallgemeinert obiges Integral:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = 4\pi \int_V d^3x \varrho(\vec{x})$$

Eine der Grundgleichungen der Elektrostatik. Sie folgt aus:

- $F \sim \frac{1}{r^2}$
- F ist Zentralkraft
- lineare Superposition der Wirkungen verschiedener Ladungen

Mit Gaußschem Integralsatz:

$$\Rightarrow \int_V d^3x \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - 4\pi\varrho\right) = 0$$

$$\text{V beliebig } \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 4\pi\varrho(x)} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{x}) &\overset{Coulomb}{=} \int d^3x' \varrho(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\
&= \int d^3x' \varrho(\vec{x}') \cdot \left[-\vec{\nabla}^{(x)} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\right] \\
&= -\vec{\nabla}^{(x)} \left[\int d^3x' \frac{\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\right] \\
&\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0} \tag{2}$$

(2) $\Rightarrow$ Das Skalarpotential ($f \hat{=}$ Freiheitsgrad)

$$\underbrace{\vec{E}(\vec{x})}_{f=3} = \underbrace{-\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})}_{f=1} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \text{Poisson-Gleichung: } \boxed{\triangle\Phi(\vec{x}) = -4\pi\varrho(\vec{x})} \tag{4}$$

2.4 Das elektrische Potential

Die beim Transport von A nach B aufzubringende Arbeit ist:

$$W = -\int_A^B \vec{F} d\vec{l} = -q \int_A^B \vec{E} d\vec{l} = q \int_A^B d\Phi = q \cdot (\Phi(B) - \Phi(A))$$

$q \cdot \Phi(\vec{x})$ ist die potentielle Energie der Probeladung q im elektrischen Feld.
$\vec{E}(\Phi) = \vec{E}(\Phi + C) \rightarrow \Phi$ kann um beliebige Konstanten verschoben werden.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Konvention: } \Phi(\infty) = 0 \Rightarrow W_i = q \cdot \int\limits_{\infty}^{\vec{x}_i} d\Phi = q \cdot \Phi(\vec{x}_i) \\ \text{Superposition des el. Potentials: } \Phi(\vec{x}_i) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}\end{array}\right\} \Rightarrow W_i = q_i \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}$$

Gesamte potentielle Energie:

$$W = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} = \boxed{\frac{1}{2} \sum_{i,j,i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}} \tag{5}$$

Oder die potentielle Energie der Ladungsdichte:

$$\begin{aligned} W =& \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \frac{\varrho(\vec{x})\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ =& \frac{1}{2} \int d^3x \varrho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) \\ \overset{\text{Poisson}}{=}& - \frac{1}{8\pi} \int d^3x \Phi \cdot \triangle \Phi \\ =& \frac{1}{8\pi} \int d^3x \left(\vec{\nabla}\Phi\right) \cdot \left(\vec{\nabla}\Phi\right) \end{aligned}$$

$$= \boxed{\int d^3x \frac{\left|\vec{E}\right|^2}{8\pi}} \tag{6}$$

Beispiel: idealisierter Plattenkondensator
Bestehend aus 2 Platten mit der Fläche F, eine (Q^+) in der x,y-Ebene bei z=0, die zweite (Q^-) parallel und exakt darüber bei z=d. Idealisierung: $d \ll \sqrt{F}$.
Ladungsdichte $\sigma(0) = \frac{Q}{F} = -\sigma(d)$. Aus Symmetriegründen: $\vec{E} \parallel \vec{e}_z$. Offensichtlich bei z=0: $\vec{E}_+(\vec{x}) = E_+(|z|) sgn(z) \hat{e}_z$. Lege Gauß'sches Kästchen $\Delta V = \Delta F \cdot \Delta z$ bei z=0 um die untere Platte: $\int\limits_{\Delta V} \vec{E}_+ d\vec{f} = 2E_+(z = \pm\frac{\Delta z}{2}) \cdot \Delta F = 4\pi\sigma\Delta F$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_+ = 2\pi\sigma \cdot sgn(z)\hat{e}_z \\ \vec{E}_- = -2\pi\sigma \cdot sgn(z-d)\hat{e}_z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{Kondensator} =& \vec{E}_+ + \vec{E}_- \\ =& \begin{cases} 4\pi\sigma\hat{e}_z & z \in (0,d) \\ 0 & z \notin (0,d) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi_{Kondensator}(x,y,z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ -4\pi\sigma z & 0 < z < d \\ -4\pi\sigma d & d < z \end{cases}$$

Weitere Größen des Kondensators:

- Spannung $U \equiv \Phi(0) - \Phi(d) = 4\pi\sigma d = 4\pi\frac{Q}{F} \cdot d$
- Kapazität $C \equiv \frac{Q}{U} = \frac{F}{4\pi \cdot d}$
- Energie $E = \int \frac{\vec{E}^2}{8\pi} d^3x = \frac{1}{2}CU^2$

2.4.1 Lokalisierte Ladungsverteilungen (ohne Randflächen)

Hier ist die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung:

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\varrho(\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

Erinnerung:

$$\triangle^{(x)} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

z.B. in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}\triangle\psi =& \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + O\left(\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\\ \triangle\frac{1}{r} =& \frac{1}{r^2}\partial r\underbrace{\left(-r^2\frac{1}{r^2}\right)}_{const.} = 0, r \neq 0\end{aligned}$$

2.4.2 Problem mit Randbedingungen

Allgemein: 1. Green'sche Identität $\rightarrow$ 2. Green'sche Identität: Vertausche ψ, ϕ und subtrahiere die beiden Terme voneinander

$$\Rightarrow \int\limits_V d^3x\,(\varphi\triangle\psi - \psi\triangle\varphi) = \oint\limits_{\partial V}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)df$$

$\frac{\partial}{\partial n}$ ist die Ableitung in Richtung der Flächennormale:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \left(\vec{n}\vec{\nabla}\right)\cdot f$$

Wähle

$$\begin{aligned}\varphi =& \Phi \text{ eine Lösung der Poissongleichung}\\ \psi =& \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \equiv \frac{1}{R}, \vec{x}\in V\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow \int\limits_V d^3x'\left(-4\pi\Phi(\vec{x}')\delta(\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|) + \frac{4\pi}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\varrho(\vec{x}')\right) = \oint\limits_{\partial V}\dots\\ \Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \int\limits_V d^3x'\frac{\varrho(\vec{x}')}{R} + \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\partial V}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial n'} - \Phi\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{R}\right]da'\end{aligned}$$

Ist die Lösung für Cauchy'sche Randbedingungen:

$$\Phi|_{\partial V}, \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n'}\right|_{\partial V} \text{ beliebig}$$

Das ist zwar mathematisch korrekt, aber nicht physikalisch, da das Problem überbestimmt ist, "Lösung für ein Problem, das nicht existiert".
Wenn die Fläche ∂V selbst nicht Teil einer Ladungsverteilung ϱ ist, gilt auf ihr $\triangle\Phi = 0$ und damit $\Phi|_{\partial V}$ und $\frac{\partial\Phi}{\partial n}|_{\partial V}$ sind <u>nicht</u> beliebig. Die Lösung der Poissongleichung innerhalb eines Volumens V, dessen geschlossene Begrenzungsfläche ∂V eine der folgenden Randbedingungen erfüllt, ist eindeutig bestimmt:

- Dirichlet: $\Phi|_{\partial V} = 0$
- Neumann: $\frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{\partial V} = 0$

Beweis: Seien Φ_1, Φ_2 zwei unterschiedliche Lösungen der Poissongleichung. $U \equiv \Phi_1 - \Phi_2$
Innerhalb von V: $\triangle U = 0$
Auf $\partial V: U = 0$ oder $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$
1. Green'sche Identität:

$$\int\limits_V d^3x \left[U \underbrace{\triangle U}_{=0} + \left(\vec{\nabla} U\right)^2 \right] = \oint\limits_{\partial V} da\, \underbrace{U \frac{\partial U}{\partial n}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \int\limits_V d^3x \,(\mathrm{grad} U)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{grad} U = 0 (x \in V)$$

$$\Rightarrow U = \text{konstant} \Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2 + \text{konstant}$$

$$\Rightarrow \Phi_1, \Phi_2 \text{ ergeben das gleiche } \vec{E}\text{-Feld.}$$

2.4.3 Green'sche Funktionen

Der Green'sche Satz war keine Lösung eines Randwertproblems. $\psi = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ war eine[1] Green'sche Funktion $G(\vec{x}, \vec{x}')$ des Laplace-Operators. Eine Green'sche Funktion G eines Operators L erfüllt die Gleichung $L \cdot G(t) = \delta(t)$. Für den Laplaceoperator ergibt sich demnach:

$$\triangle G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Die allgemeine Lösung beim Laplaceoperator ist:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \underbrace{F(\vec{x}, \vec{x}')}_{\text{Lösung von } \triangle F = 0}$$

Damit haben wir eine zusätzliche Freiheit, die Randbedingungen des betrachteten Problems zu erfüllen.
Betrachte 2. Green'sche Identität mit $\varphi = \Phi, \psi = G(\vec{x}, \vec{x}')$:

$$\Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \int\limits_V d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}')\varrho(\vec{x}') + \frac{1}{4\pi} \oint\limits_{\partial V} \left[G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \frac{\partial G}{\partial n'} \Phi(\vec{x}') \right] da'$$

- Dirichlet gegeben: $\Phi|_{\partial V} = 0$
  $G_D(\vec{x}, \vec{x}') = 0, \quad \vec{x}' \in \partial V, x \in V$
  $G_D(\vec{x}, \vec{x}') = G_D(\vec{x}', \vec{x})$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \int\limits_V d^3x' G_D(\vec{x}, \vec{x}')\varrho(\vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \oint\limits_{\partial V} \frac{\partial G_D}{\partial n'} \Phi(\vec{x}') da'$$

Ist die formale Lösung des Dirichlet'schen Randwertproblems.

[1] Es gibt unendlich viele

- Neumann gegeben: $\frac{\partial\Phi}{\partial n'}\big|_{\partial V} = 0$
  nicht einfach $\frac{\partial G_N}{\partial n}\Big|_S = 0$!Gaußscher Integralsatz für $\triangle G = -4\pi\delta$

$$\Rightarrow \int\limits_S da' \frac{\partial G}{\partial n'} = -4\pi \neq 0$$

  Einfachste erlaubte Randbedingung: $\frac{\partial G_N}{\partial n'} = \frac{-4\pi}{F_{\partial V}}$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \langle\Phi\rangle_S + \int\limits_V d^3x' G_N(\vec{x},\vec{x}')\varrho(\vec{x'}) - \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\partial V} G_N(\vec{x},\vec{x}')\frac{\partial\Phi}{\partial n'}$$

  Ist die formale Lösung des Neumann'schen Randwertproblems.

2.4.4 Bestimmen von G_D und G_N

Zur Bestimmung von G_D und G_N gibt es keine Methode, die mit Sicherheit immer zum Erfolg führt. Eine Möglichkeit ist die Methode der Interpretation von F als Potential von Bildladungen außerhalb des betrachteten Volumens:

$$\triangle F|_{\partial V} = 0 \Rightarrow \text{ Potential von Ladungen außerhalb von V}$$

Bestimme die Bildladungen außerhalb von V, so dass auf ∂V gerade die Randbedingungen erfüllt sind.

Beispiel: Punktladung q über geerdeter, unendlich großer Metallplatte
Vereinfachende Annahmen oBdA:

- Die Metallplatte liegt in der x-y-Ebene
- Die Punktladung befindet sich am Punkt $(0,0,z_q)$

Randbedingung: $\Phi(x,y,0) = 0$ (**Dirichlet**).
Ansatz: Ersetze Metallplatte durch leeren Raum+Bildladung q_B an der Stelle $(0,0,z_B)$.

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_q|} + \frac{q_B}{|\vec{r}-\vec{r}_B|} \stackrel{!}{=} 0 : \vec{r} = (x,y,0)\forall x,y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z_q^2}} = -\frac{q_B}{\sqrt{x^2+y^2+z_B^2}} \Rightarrow q = -q_B, z_q^2 = z_B^2$$

2 Lösungen: $\begin{cases} z_B = z_q \text{ erfüllt Randbedingungen, aber nicht das Ausgangsproblem: } \Phi = 0 \forall x,y,z \\ z_B = -z_q \end{cases}$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{r}) = q\cdot\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_q|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_B|}\right) \text{ erfüllt die Randbedingungen}$$

Verallgemeinerungen:

1. $\vec{r}_q = (x,y,z) \rightarrow \vec{r}_B = (x,y,-z)$
2. $G_D(\vec{r},\vec{r}_q) = \frac{1}{q}\Phi(\vec{r},\vec{r}_q)$
   - $\triangle G_D = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}_q)$
   - symmetrisch in $(\vec{r},\vec{r}_q)$
   - Randbedingung: $G_D|_{\vec{r}_q=(x,y,0)} = 0$

2.4.5 Entwicklung nach orthogonalen Funktionen

Betrachte quadratintegrierbare[2] Funktionen $f(x)$ auf $I = [a, b]$. Die Menge

$$\{U_N : I \to (C) | \, n \in \mathbb{N}\}$$

ist

- orthonormal, wenn $\int\limits_a^b U_n^*(x) U_m(x) dx = \delta_{n,m}$
- vollständig, wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n^*(x') U_n(x) = \delta(x' - x)$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n U_n(x) \quad , \quad \alpha_n = \int_a^b f(x) U_n^*(x) dx$$

Beispiele:

- Fourier-Reihen

  $$I = [-\tfrac{a}{2}, \tfrac{a}{2}], \{U_n\} = \left\{ \tfrac{1}{\sqrt{a}}, \underbrace{\sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{2\pi n x}{a}), \sqrt{\frac{2}{a}} \cos(\frac{2\pi n x}{a})}_{n \geq 1} \right\}$$

- Fourier-Integral

$$I = \mathbb{R}, \{U_n\} = \left\{ \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{k \in \mathbb{R}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx} dk$$

2.4.6 Trennung der Variablen

Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)\Phi = 0$$

Ansatz: $\Phi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$.

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{X(x)} \partial_x^2 X(x)}_{=\text{const.}=-\alpha^2} + \underbrace{\frac{1}{Y(y)} \partial_y^2 Y(y)}_{=\text{const.}=-\beta^2} + \underbrace{\frac{1}{Z(z)} \partial_z^2 Z(z)}_{=\text{const.}=\gamma^2=\alpha^2+\beta^2} = 0$$

Nach einsetzen und teilen durch Φ. Die einzelnen Terme müssen konstant sein, da sonst im Allgemeinen die Summe nicht Null ist.

$$\Rightarrow \Phi(x, y, z) = e^{\pm i\alpha x} e^{\pm i\beta y} e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z}$$

Beispiel für Variablentrennung: Quader mit Kantenlängen (x=a,y=b,z=c)$\Rightarrow$ V=abc
Randbedingungen:

- auf den vertikalen und auf der unteren Fläche $\Phi = 0$,
- auf der verbleibenden Fläche $\Phi = \Phi_C$

[2] Quadratintegrabel: $\int\limits_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$

Ansatz: $\Phi = \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} A_{n,m} \cdot \sin(\alpha_m x) \cdot \sin(\beta_n y) \cdot \sinh(\gamma_{m,n} z)$ mit $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$, $\gamma_{n,m} = \pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$
Randbedingungen:

- 5×Φ=0
- obere Fläche: $\Phi_C(x,y) = \sum\limits_{n,m} A_{n,m} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \sinh(\gamma_{n,m} c)$

invertierte Fouriertransformation $\Rightarrow A_{n,m} = \frac{4}{ab\sinh(\gamma_{n,m}c)} \int\limits_0^a dx \int\limits_0^b dy \Phi_C(x,y) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y)$
Das allgemeine Problem ist dann gelöst durch die lineare Superposition verschiedener Einzelflächen.

2.4.7 Laplace'sche Gleichung in Kugelkoordinaten

$$\triangle\Phi = \frac{1}{r}\partial_r^2(r \cdot \Phi) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta(\sin\theta \cdot \partial_\theta\Phi) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2\Phi = 0$$

Trennung der Variablen. Ansatz: $\Phi(r,\theta,\varphi) = \frac{U(r)}{r} \cdot P(\theta) \cdot Q(\varphi)$. Die Lösung beinhaltet 2 Konstanten:

- $-m^2$
- $l \cdot (l+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{Q}\partial_\varphi^2 Q & = & -m^2 & (1) \\ \partial_r^2 U - \frac{l(l+1)}{r^2}U & = & 0 & (2) \\ \frac{1}{\sin(\theta)}\partial_\theta(\sin(\theta)\partial_\theta P) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P & = & 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow Q = e^{\pm im\varphi} = e^{\pm im(\varphi+2\pi)} \Rightarrow m \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \Rightarrow U = A \cdot r^{l+1} + B \cdot r^{-l}$$

l ist zunächst unbestimmt, später: divU = 0 $\Rightarrow l \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

$$(3) x \equiv \cos\theta, \quad P = P(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P = 0$$

- m=0: gewöhnliche Legendre'sche Differentialgleichung
- m≠0: zugeordnete Legendre'sche Differentialgleichung

2.4.8 Legendrepolynome

Normiert auf 1 bei x=1

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l, \quad l \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

$P_0 = 1$
$P_1 = x$
$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$...

Die Legendrepolynome sind $(-1 \leq x \leq 1)$:

- orthogonal

$$\int_{-1}^{1} dx P_l(x) P_{l'}(x) = \frac{2}{2^{l+1}} \delta_{l,l'}$$

- vollständig

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(x) P_l(x') = \delta(x - x')$$

$$f(x), x \in [-1, 1] \Rightarrow f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x)$$

$$\overset{\text{Vollständigkeit}}{\longrightarrow} A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1} 1 dx f(x) P_l(x)$$

$$\int_{-1}^{1} dx P_l(x) P_{l'}(x) = C \cdot \delta_{l,l'}$$

<u>**Beispiel**</u>: $\Theta(x) = \frac{3}{2}P_1 - \frac{7}{8}P_3 + \frac{11}{16}P_5 ... = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

2.4.9 Randwertprobleme mit azimutaler Symmetrie

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \Phi(r, \theta) \Rightarrow m = 0$$

$$\Rightarrow \Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l - B_l r^{-l-1} \right) P_l(\cos\theta)$$

<u>**Beispiele**</u>

- Gegeben: $V(\theta)$ auf r=a, gesucht: $\Phi(r < a, \theta)$
  Keine Ladung bei r=0 $\Rightarrow B_l = 0 \forall l$, $\sum_l A_l a^l P_l(\cos\theta) \overset{!}{=} V(\theta)$

$$\overset{\text{Vollständigkeit}}{\Rightarrow} A_l = \frac{2l+1}{2a^2} \int_0^{\pi} \underbrace{d\theta \sin\theta}_{d\cos\theta} V(\theta) P_l(\cos\theta)$$

<u>z.B.</u> $V(\theta) = \begin{cases} V & \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -V & \theta \in (\frac{\pi}{1}, \pi] \end{cases}$

$$\Rightarrow \Phi = V \cdot \left[\frac{3}{2} \frac{r}{a} P_1(\cos\theta) - \frac{7}{8} \frac{r^3}{a^3} P_3(\cos\theta) ... \right]$$

- Punktladung bei $\vec{x}'$
  Trick: $\Phi(r, \theta)$ ist eindeutig festgelegt durch $\Phi(r, \theta = 0)$
  - Wähle Koordinatensystem, so dass $\vec{x}' = r' \cdot \hat{e}_z \Rightarrow \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r' \end{pmatrix}$
  - Wähle Koordinatensystem, so dass $\vec{x} = r \cdot \hat{e}_z \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$

Taylor:

$$\left.\begin{matrix} r_> = \max(r, r') \\ r_< = \min(r, r') \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r_>} \frac{1}{\left|1 - \frac{r_<}{r_>}\right|} = \frac{1}{|r_>|} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^l} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}$$

Vergleiche mit $\sum_l A_l r^l + B_l r^{-l-1}$

$$\begin{aligned} r = r_> \Rightarrow \quad & A_l = 0, B_l = q \cdot (r')^l \\ r = r_< \Rightarrow \quad & B_l = 0, A_l = \frac{1}{(r')^{l+1}} \end{aligned}$$

Überall:

$$\Phi(r, \theta) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

2.4.10 zugeordnete Legendrepolynome

$m \neq 0$

$$\Rightarrow P_l(x) \rightarrow P_{l,m}(x)$$

$$P_{l,m}(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \qquad l \geq m \geq 0$$

$$P_{l,m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{l,-m}(x) \qquad -l \leq m \leq 0$$

$$\int_{-1}^{1} P_{l,m}(x) \cdot P_{l',m}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l,l'}$$

2.4.11 Kugelflächenfunktionen

$$\begin{aligned} Y_{l,m}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot P_{l,m}(\cos\theta) e^{im\varphi} && m \geq 0 \\ Y_{l,m}(\theta, \varphi) &= (-1)^m Y_{l,-m}^*(\theta, \varphi) && m \leq 0 \end{aligned}$$

- orthogonal:

$$\int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta Y_{l',m'}^*(\theta, \varphi) Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}$$

- vollständig:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{l,m}^*(\theta, \varphi) Y_{l,m}(\theta', \varphi') = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos\theta - \cos\theta')$$

- **Additionstheorem**:

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{l,m}^*(\underbrace{\theta', \varphi'}_{\vec{x}'}) Y_{l,m}(\underbrace{\theta, \varphi}_{\vec{x}}), \qquad \gamma = \vec{x} \angle \vec{x}'$$

2.4.12 Entwicklung Green'scher Funktionen in Kugelflächenfunktionen

- **Ohne Randbedingungen**

$$
\begin{aligned}
G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\theta) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{l,m}^*(\theta',\varphi') Y_{l,m}(\theta,\varphi)
\end{aligned}
$$

- **Mit Dirichlet-Randbedingungen** auf r=a, für r>a:

$$
G_D(\vec{x},\vec{x'}) = 4\pi \sum_l \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \qquad \underbrace{-\frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{r\cdot r'}\right)^{l+1}}_{\text{Spiegelladung: } r_s=\frac{a^2}{r'}, q_s=-q\frac{a}{r'}} \right] \cdot Y_{l,m}^*(\theta',\varphi') Y_{l,m}(\theta,\varphi)
$$

$$
\left[\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{r\cdot r'}\right)^{l+1} \right] = \begin{cases} \frac{1}{(r')^{l+1}} \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) & r < r' \\ \left((r')^l - \frac{a^{2l+1}}{(r')^{l+1}} \right) \frac{1}{r^{l+1}} & r > r' \end{cases}
$$

Allgemein: $\triangle_{(x)} G(\vec{x},\vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$, $\vec{x}'$ auf ∂V, V eine Kugel.

$$
\begin{aligned}
\delta(\vec{x}-\vec{x}') &= \frac{1}{r^2}\delta(r-r')\delta(\varphi-\varphi')\delta(\cos\theta-\cos\theta') \\
&= \frac{1}{r^2}\delta(r-r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{l,m}^*(\theta',\varphi') Y_{l,m}(\theta,\varphi) \\
G(\vec{x},\vec{x}') &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{l,m}(r,r',\theta',\varphi') Y_{l,m}(\theta,\phi) \\
A_{l,m}(r,r',\theta',\varphi') &= g_l(r,r') Y_{l,m}^*(\theta',\varphi') \\
&\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rg_l) - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l = -\frac{4\pi}{r^2}\delta(r-r') \\
&\Rightarrow g_l(r,r') = \begin{cases} Ar^l + Br^{-l-1} & r < r' \\ A'r^l + B'r^{-l-1} & r > r' \end{cases}
\end{aligned}
$$

2.4.13 Entwicklung Green'scher Funktionen nach Eigenwerten

Elliptische Differentialgleichung

$$
\nabla^2\psi(x) + [f(x)+\lambda]\cdot\psi(x) = 0
$$

Nur für bestimmte Werte von λ gibt es Lösungen, sie sowohl endlich als auch stetig sind. Diese λ heißen Eigenwerte λ_n. Die $\psi(x)$, die die DGL mit $\lambda = \lambda_n$ erfülle, heißen Eigenfunktionen.

$$
\nabla^2\psi_n(x) + [f(x)+\lambda_n]\cdot\psi_n(x) = 0
$$

Sie sind

- Orthogonal:

$$
\int_V d^3x \psi_m^*(x)\psi_n(x) = \delta_{m,n}
$$

- Vollständig (gilt nicht immer, nehmen wir aber an).

$$\nabla^2_{(x)} G(\vec{x}, \vec{x}') + [f(x) + \lambda]\, G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (\lambda \neq \lambda_n)$$

$$G(\underbrace{\vec{x}}_{\text{Variable}}, \underbrace{\vec{x}'}_{\text{Parameter}}) = \sum_m a_m(\vec{x}')\psi_m(\vec{x})$$

$$\to \sum_m a_m(\vec{x}') \cdot (\lambda - \lambda_m)\psi_m(x) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$\overset{\text{Vollständigkeit}}{\Rightarrow} \quad a_n(\vec{x}') = 4\pi \frac{\psi_n^*(\vec{x}')}{\lambda_n - \lambda}$$

$$\Rightarrow G(\vec{x}, \vec{x}') = 4\pi \sum_n \frac{\psi_n^*(\vec{x}')\psi_n(\vec{x})}{\lambda_n - \lambda}$$

Beispiel: $f(x) + \lambda = 0$
Wellengleichung:

$$\left(\triangle + \underbrace{\vec{k}^2}_{\text{kontinuierliche Eigenwerte}}\right)\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = 0$$

Eigenfunktionen:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\vec{k}\vec{x}}$$

Normierung

$$\int_{\mathbb{R}} d^3x\, \psi^*_{\vec{k}'}(\vec{x})\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3k \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}}{\vec{k}^2} \text{ (Fourierintegral)}$$

2.4.14 Multipolentwicklung

Lokalisierte Ladungsverteilung $\varrho(\vec{x})$, d.h. $\varrho(\vec{x}) = 0 \forall |\vec{x}| \geq R$. Sei $r = |\vec{x}| > R$.

$$\Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} q_{l,m} \frac{Y_{l,m}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \text{ ist allgemeine Lösung von } \triangle\Phi = 0$$

Entwickle Coulombpotential $\Phi = \int d^3x \frac{\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ für $|\vec{x}| > |\vec{x}'|$:

$$\Rightarrow \Phi(\vec{x}) = 4\pi \sum_{l,m} \left[\int d^3x' r'^l Y^*_{l,m}(\theta', \varphi')\varrho(\vec{x}')\right] \frac{Y_{l,m}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \frac{1}{2l+1}$$

Koeffizientenvergleich

$$\Rightarrow \text{ Multipolmomente } q_{l,m} = \int d^3x' r'^l Y^*_{l,m}(\theta', \varphi')\varrho(\vec{x}')$$

Die Multipolmomente $q_{l,m}$ hängen im Allgemeinen von der Wahl des Koordinatensystems ab. Beispiele:

$q_{0,0}$	$\sqrt{\frac{1}{4\pi}} \cdot \int d^3x' \varrho(\vec{x}')$	
$q_{1,1}$	$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cdot \int d^3x'(x' - iy')\varrho(\vec{x}')$	$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cdot (P_x - iP_y)$
$q_{1,0}$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \int d^3x' z' \varrho(\vec{x}')$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot P_z$
$q_{2,0}$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} \cdot \int d^3x'(3z'^2 - x'^2)\varrho(\vec{x}')$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} \cdot \tilde{Q}_{z,z}$

$$
\begin{aligned}
Q &\equiv \int d^3x'\ \varrho(\vec{x}') \\
P_i &\equiv \int d^3x'\ x_i'\varrho(\vec{x}) \\
\tilde{Q}_{i,j} &\equiv \int d^3x'\ \left(3x_i'x_j' - \vec{x}'^2\delta_{i,j}\right)\varrho(\vec{x}')
\end{aligned}
$$

In Kugelkoordinaten:

$$
\vec{\nabla} = \vec{e}_r\partial_r + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi
$$

$$
\begin{aligned}
E_r =& 4\pi\frac{l+1}{2l+1}q_{l,m}\frac{Y_{l,m}(\theta,\varphi)}{r^{l+2}} \\
E_\theta =& -\frac{4\pi}{2l+1}q_{l,m}\frac{1}{r^{l+2}}\partial_\theta Y_{l,m} \\
E_\varphi =& -\frac{4\pi}{2l+1}q_{l,m}\frac{im}{r^{l+2}}\frac{Y_{l,m}}{\sin\theta}
\end{aligned}
$$

z.B. Monopol: $(E_r, E_\theta, E_\varphi) = (\frac{Q}{r^2}, 0, 0)$; Dipol auf z-Achse: $(E_r, E_\theta, E_\varphi) = \frac{P}{r^3}(2\cos\theta, \sin\theta, 0)$

2.4.15 Multipolentwicklung einer Ladungsverteilung im äußeren Feld

- lokalisierte Ladungsverteilung $\varrho(\vec{x})$ mit maximalem Durchmesser D
- äußeres Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})$
- Annahme: $\left|\frac{\vec{\nabla}\Phi}{\Phi}\right|^{-1} \gg D$

Elektrostatische Energie des Systems:

$$
\begin{aligned}
W =& \int d^3x\ \varrho(\vec{x})\cdot\Phi(\vec{x}) \\
\Phi(\vec{x}) =& \Phi\left(\vec{0}\right) + \vec{x}\cdot\left(\vec{\nabla}\Phi\right)\left(\vec{0}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}x_ix_j\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\Phi\right)\left(\vec{0}\right) \\
=& \Phi\left(\vec{0}\right) + \vec{x}\cdot\vec{E}\left(\vec{0}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i,j}x_ix_j\cdot\left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)\left(\vec{0}\right) \\
\vec{\nabla}\vec{E} = 0 \Rightarrow& \frac{1}{6}r^2\vec{\nabla}\vec{E}\left(\vec{0}\right) = 0 \\
\Rightarrow \Phi(\vec{x}) =& \Phi\left(\vec{0}\right) - \vec{x}\vec{E}\left(\vec{0}\right) - \frac{1}{6}\sum_{i,j}\left(3x_ix_j - r^2\delta_{i,j}\right)\cdot\left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)\left(\vec{0}\right) \\
W =& q\cdot\Phi\left(\vec{0}\right) - \vec{p}\cdot\vec{E}\left(\vec{0}\right) - \frac{1}{6}\tilde{Q}_{i,j}\cdot\left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)\left(\vec{0}\right)
\end{aligned}
$$

2.5 Elektrostatik der Dielektrika

2.5.1 Mikroskopisch↔Makroskopisch

Maxwellgleichungen im Vakuum (Mikroskopisch):

$$
\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\varrho \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = 0
$$

Für wenige Ladungen (O(1)) $\rightarrow$ Lösung, für viele Ladungen (O(10^{23})) $\rightarrow$ Mittelung notwendig, bestimme Makrofeld.

$$\text{rot}\,\vec{E}_{\text{Mikro}} = 0 \;\Rightarrow\; \text{rot}\,\vec{E}_{\text{Makro}} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{E}_{\text{Makro}} = -\,\text{grad}\,\Phi_{\text{Makro}}$$

Problem: Äußeres Feld (Makrofeld) verändert mikroskopische Multipolmomente.
Dipolmoment, Ladung und Dichte vom Molekül des Typs i: $\vec{p}_i, e_i, N_i$. <...> ist der Mittelwert über ein kleines Volumen um $\vec{x}$.

$$\begin{aligned}
\text{Makroladungsdichte } \varrho(\vec{x}) &= \sum_i N_i < e_i > + \varrho_{\text{Frei}} \\
\text{Makropolarisationsdichte } p(\vec{x}) &= \sum_i N_i < p_i > \\
\text{Volumen } \underbrace{\Delta}_{\text{Delta}} V\text{: Beitrag } \underbrace{\Delta}_{\text{Delta}} \Phi(\vec{x}) &= \frac{\varrho(\vec{x}) \cdot \Delta V}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \Delta V \cdot \frac{\vec{p}(\vec{x}) \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}
\end{aligned}$$

Betrachte $\Delta V \rightarrow 0$: $\Delta V \rightarrow d^3x'$, $\sum \rightarrow \int$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Phi_{\text{Makro}}(\vec{x}) &= \int d^3x \left[\frac{\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{p}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}_{(x')} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\right] \\
&= \int d^3x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot \left[\varrho(\vec{x}') - \vec{\nabla}_{(x')} \vec{p}(\vec{x})\right] \\
\Rightarrow \vec{\nabla}\vec{E}_{\text{Makro}} &= 4\pi \cdot \left[\varrho - \vec{\nabla}\vec{p}\right] \\
\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E}_{\text{Makro}} &= 0 \\
\vec{\nabla}\vec{D} &\equiv \vec{\nabla}\left(\vec{E} + 4\pi\vec{p}\right) = 4\pi\varrho
\end{aligned}$$

Polarisationsladungsdichte $\varrho_p = -\vec{\nabla}\vec{p}$, einfachste Annahme: Das Medium ist

- **linear** $|\vec{p}| \sim |\vec{E}|$
- **isotrop** $\vec{p} \| \vec{E}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{p} &= \underbrace{\chi_e}_{\text{elektrische Suszeptibilitätskonstante}} \cdot \vec{E} \\
\vec{D} &= (1 + 4\pi\chi_e) \cdot \vec{E} \equiv \underbrace{\epsilon}_{\text{Dielektrizitätskonstante}} \cdot \vec{E}
\end{aligned}$$

Wenn das Medium auch **homogen** ist ($\epsilon(\vec{x}) = \epsilon$):

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\frac{\varrho}{\epsilon} \leftarrow \text{Abschirmung freier Ladungen}$$

2.5.2 Grenzflächen $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_2$

σ: freie Ladungsdichte auf der Oberfläche. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) \cdot \hat{n}_{1\rightarrow 2} &= 4\pi\sigma \\
\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) \times \hat{n}_{1\rightarrow 2} &= 0
\end{aligned}$$

2.5.3 Elektrostatische Energie in dielektrischen Medien

$$\left.\begin{array}{r}\delta W = \int d^3x\, \delta\varrho \cdot \Phi \\ \vec{\nabla}\vec{D} = 4\pi\varrho \Rightarrow \delta\varrho = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\delta\vec{D}\end{array}\right\} \Rightarrow \delta W = \frac{1}{4\pi}\int d^3x\, \Phi \cdot \vec{\nabla}\delta\vec{D}$$

$$\overset{\text{(partiell)}}{=} \frac{1}{4\pi}\int d^3x\, \vec{E}(\vec{x}) \cdot \delta\vec{D}$$

$$\Rightarrow W\left[\vec{D}_{end}(\vec{x})\right] = \frac{1}{4\pi}\int d^3x \int\limits_0^{\vec{D}_{end}} \vec{E}\left[\vec{D}\right] \cdot \delta\vec{D}$$

Ansatz: $\vec{D} = \vec{D}(\vec{x},\tau), \quad \vec{D}(\vec{x},0) = \vec{0}, \quad \vec{D}(\vec{x},1) = \vec{D}_{end}$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{4\pi}\int d^3x \int\limits_0^1 d\tau\, \vec{E}\left[\vec{D}(\vec{x},\tau)\right] \cdot \frac{\partial\vec{D}}{\partial\tau}$$

lineares, isotropes, homogenes Medium: $\vec{D} = \epsilon\vec{E} \Rightarrow \vec{E} \cdot \delta\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \cdot \delta\vec{E} = \frac{1}{2}\delta\left(\vec{E} \cdot \vec{D}\right)$

$$\Rightarrow W_{lin.Med} = \frac{1}{8\pi}\int d^3x\, \vec{E} \cdot \vec{D}$$

3 Magnetostatik

3.1 Einführung

Wesentlicher Unterschied zwischen Magneto- und Elektrostatik: es gibt keine magnetische Ladungen (Monopole)

- stationäre, lokalisierte Stromdichte $\vec{j}$
- Magnetischer Dipol mit magnetischem Moment $\vec{m}$
- Magnetische Flussdichte (Induktion) $\vec{B}$

$$\Rightarrow \text{mechanisches Drehmoment } \vec{N} \sim \vec{m} \times \vec{B}$$
$$\text{vgl. Elektrostatik } \vec{F} \sim q \cdot \vec{E}$$

- Oersted (1819 Kopenhagen): Elektrische Ströme $\leftrightarrow$ Magnetismus

$$\text{Ladungserhaltung } \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$$

  Magnetostatik: $\vec{\nabla}\vec{j} = 0$.

Ampère (1820-25): Das vom Stromelement $I \cdot \vec{dl}$ induzierte Element $d\vec{B}$ der magnetischen Induktion:

$$d\vec{B} = \underbrace{\left(\frac{1}{c}\right)}_{\text{(cgs-Einheiten)}} \cdot I \frac{\vec{dl} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

Nichtrelativistisch: $I \cdot \vec{dl} = q \cdot \vec{dv}$ mit $\left|\frac{v}{c}\right| \ll 1$ und $\left|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right| = 0$:

$$\vec{B}(\vec{x}) = q \cdot \frac{\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3} = \frac{q}{c} \cdot \frac{\vec{v} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

Weber&Kohlrausch:

$$\underbrace{\text{emE}}_{\text{Statik}} \overbrace{\leftrightarrow}^{\text{Geschwindigkeit}} \underbrace{\text{esE}}_{\text{Statik}}$$

3.1.1 magnetische Kraft

Die von einer magnetischen Induktion $\vec{B}_2$ auf ein Stromelement $I_1 \cdot \vec{dl}_1$ wirkende Kraft:

$$d\vec{F} = \frac{I_1}{c} \cdot \vec{dl}_1 \times \vec{B}_2$$

Realistische Betrachtung: Stöme fließen in geschlossenen Schleifen. Wird $\vec{B}_2$ nun selbst von einem Strom I_2 durch eine Schleife 2 verursacht, so gilt

$$\vec{F}_1 = \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_1 \oint_2 \vec{dl}_1 \times \frac{\vec{dl}_2 \times \vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3}$$

3.1.2 Ampère'sches Gesetz

mit $\vec{dl}_1 \times (\vec{dl}_2 \times \vec{x}_{12}) = -(\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2) \cdot \vec{x}_{12} + \vec{dl}_2 \cdot \underbrace{(\vec{dl}_1 \cdot \vec{x}_{12})}_{\oint = 0} = -(\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2) \cdot \vec{x}_{12}$:

Ampère'sches Gesetz:

$$\vec{F}_1 = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \oint \oint (\vec{dl}_1 \vec{dl}_2) \cdot \frac{\vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3}$$

Erfüllt offensichtlich das 3. NEWTON'sche Axiom: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

3.1.3 Verallgemeinerung

Stromdichte $\vec{j}(\vec{x})$, äußere magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{x})$:

$$\begin{aligned}
\text{Kraft } \vec{F} &= \frac{1}{c} \int d^3x \, \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}) \quad (*) \\
\text{Gesamtdrehmoment } \vec{N} &= \frac{1}{c} \int d^3x \, \vec{x} \times (\vec{j} \times \vec{B})
\end{aligned}$$

3.2 Differentialgleichungen der Magnetostatik

Ampère:

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{x}) &= \frac{1}{c} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\
&= \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \cdot \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\
\Rightarrow \vec{\nabla} \vec{B} &= 0 \\
\text{vgl. Elektrostatik} \quad \vec{E}(\vec{x}) &= \int d^3x' \varrho(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\
&= \vec{\nabla} \cdot \int d^3x' \varrho(\vec{x}') \cdot \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\
\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \\
\vec{\nabla} \vec{E} &= 4\pi \varrho
\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

mit $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{X} \right) = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \vec{X} \right) - \triangle \vec{X}$ und $\vec{\nabla}_{(x)} \left(\vec{j}(\vec{x}') f(\vec{x}) \right) = \vec{j}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}_{(x)} f(\vec{x})$:

$$\begin{aligned}
c \cdot \vec{\nabla}_{(x)} \times \vec{B} &= \vec{\nabla}_{(x)} \int d^3x' \, \vec{j}(\vec{x}) \cdot \underbrace{\vec{\nabla}_{(x)} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}_{= -\vec{\nabla}_{(x')} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}} - \int d^3x' \, \vec{j}(\vec{x}) \underbrace{\triangle_{(x)} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}_{= 4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')} \\
&= \vec{\nabla}_{(x)} \int d^3x' \left[\underbrace{\vec{\nabla}_{(x')} \vec{j}(\vec{x}')}_{=0\text{: Magnetostatik}} \right] \cdot \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + 4\pi \vec{j}(\vec{x})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{x})$$

Mit dem Satz von Stokes:

$$\int\limits_S dn \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \cdot \hat{n} = \frac{4\pi}{c} \int\limits_S dn\, \vec{j} \cdot \hat{n}$$
$$\overset{\text{(Stokes)}}{=} \oint\limits_{\partial S} \vec{B}\, d\vec{l}$$

Ampère'sches Durchflutungsgesetz:

$$\Rightarrow \oint\limits_{\partial S} \vec{B}\, d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \cdot \underbrace{I_S}_{\text{Gesamtstrom auf Oberfläche}}$$

3.2.1 Maxwellgleichungen der Magnetostatik

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{1}$$
$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \tag{2}$$

Lösung von (2): $\vec{B} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}$, $\vec{A}$: Vektorpotential. Eichtransformation:

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\tilde{\psi}$$
$$\vec{B} \to \vec{B}' = \vec{B}$$

$\tilde{\psi}$ ist eine beliebige skalare Funktion $\Rightarrow$ Freiheit bei der Bestimmung von $\vec{A}$.

$$(1) \to \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right) - \triangle\vec{A} = 0 \qquad (1')$$

Mit <u>Coulombeichung</u>: Wähle $\tilde{\psi}$ so, dass $\vec{\nabla}\vec{A} = 0$

$$\Rightarrow \triangle\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{3}$$

$=$ 3-fach Poisson

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \tag{4}$$

Check von (4): Ist $\vec{\nabla}\vec{A} = 0$?

$$\vec{\nabla}_{(x)} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\int d^3x' \vec{j}(\vec{x}')\vec{\nabla}_{(x')}\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \int d^3x' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \underbrace{\vec{\nabla}_{(x')}\vec{j}(\vec{x}')}_{=0} = 0\checkmark$$

Check von (3):

$$\triangle \underbrace{\vec{\nabla}\vec{A}}_{=0} = -\frac{4\pi}{c} \underbrace{\vec{\nabla}\vec{j}}_{=0} \checkmark$$

3.2.2 Magnetisches Moment

Lemma: lokalisiertes, quellenfreies $\vec{j}(\vec{x})$, beliebige $f(\vec{x}'), g(\vec{x}')$

$$\Rightarrow \int d^3x' \left[f \cdot \vec{j} \cdot \vec{\nabla}_{(x')} g + g \cdot \vec{j} \cdot \vec{\nabla}_{(x')} f\right] = 0$$

$$f = 1, g = x_i' : \int d^3x' \, j_i(\vec{x}) = 0 \qquad (L1)$$

$$f = x_i', g = x_k' : \int d^3x' \left[x_i' j_k + x_k' j_i\right] = 0 \qquad (L2)$$

Betrachte nun eine auf ein kleines Raumgebiet beschränkte Stromdichte $\vec{j}(\vec{x}')$, $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$.
Taylor:

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{|\vec{x}|^3} + O(|\vec{x}|^{-3})$$

$$(10) \rightarrow A_i(\vec{x}) = \frac{1}{c|\vec{x}|} \underbrace{\int d^3x' \, j_i(\vec{x}')}_{=0\,(L1)} + \frac{1}{c|\vec{x}|^3} \underbrace{\vec{x} \cdot \int d^3x' \, j_i(\vec{x}') \cdot \vec{x}'}_{\circledast} + ...$$

$$\circledast \sim x_k \int d^3x' \, x_k' j_i(\vec{x}') \overset{(L2)}{=} -\frac{1}{2}\left[\vec{x} \times \int d^3x' \, \vec{x}' \times \vec{j}\right]_i$$

Das magnetische Moment $\vec{m} \equiv \frac{1}{2c}\int d^3x' \left(\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}')\right)$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\vec{m}\times\vec{x}}{|\vec{x}|^3} + O(|\vec{x}|^{-3})$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{x}) = \frac{3\hat{x}\cdot(\hat{x}\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{x}^3|} + O(|\vec{x}|^{-4}) \textbf{ Magnetisches Dipolfeld}$$

Beispiele

- Strom I in einer Ebene, der die Fläche A einschließt:

$$\Rightarrow \vec{m} = \frac{I}{2c} \underbrace{\oint \vec{x} \times d\vec{l}}_{=2A\hat{n}} = \frac{I \cdot A}{c}\hat{n}$$

- Geladene Teilchen vom Typ i: $\vec{j}(\vec{x}) = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{x}-\vec{x}_i)$, Drehimpuls $\vec{L}_i$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{2c}\sum_i q_i \vec{x}_i \times \vec{v}_i \\ \vec{L}_i = M_i \cdot \vec{x}_i \times \vec{v}_i \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{2c}\sum_i \frac{q_i}{M_i} \cdot \vec{L}_i$$

Klassischer Zusammenhang zwischen Drehimpuls und magnetischem Moment

Quantenmechanik: Elektron hat Spin $\vec{s}$ (Eigenwerte $\pm\frac{1}{2}$), und ein magnetisches Moment $\vec{m} = g \cdot \frac{e}{2M_e c}\vec{s}$, $g = 2 \cdot (1 + O(\alpha)) \equiv \underbrace{2}_{\text{rel. QM}} \cdot (1 + \underbrace{a}_{\text{rel. QFT}})$

$\alpha \equiv \underbrace{\frac{e^2}{\hbar \cdot c}}_{\text{dimensionslos}} \approx \frac{1}{137{,}035963...}$, theoretisch: $a = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\pi} - [...] \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + [...] \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 ...$

$$(1+a)_{th} = 1{,}001159652460(\pm 44)(\pm 127)$$
$$(1+a)_{exp} = 1{,}001159652211(\pm 40)$$
$$(1+a)_{exp}^{2006} = 1{,}00115965218085(\pm 76)$$

3.3 Makroskopische Gleichungen der Magnetostatik

Mikroskopische Gleichungen:

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$\left.\begin{array}{l}\text{Elektronen im Atom } \hat{=}\vec{j}_e \\ \text{magnetische Momente von e,p und n}\end{array}\right\}\times 10^{23}$ $\Rightarrow$Mittelwert bilden: Betrachte statt eines Punkts den Mittelwert in einem kleinen Volumen ΔV um diesen Punkt: $\vec{y} \to \langle\vec{y}\rangle$

$$\vec{\nabla}\vec{B}_{Makro} = \vec{\nabla}\langle\vec{B}_{Mikro}\rangle = \langle\vec{\nabla}\vec{B}_{Mikro}\rangle = 0 \Rightarrow \vec{B}_{Makro} = \vec{\nabla}\times\vec{A}_{Makro}$$

Erinnerung: Lokalisierte Stromverteilung $\vec{j}$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\vec{m}\times\vec{x}}{|\vec{x}|^2} + ... \quad , \quad \vec{m} = \frac{1}{2c}\int d^3x\, \vec{x}\times\vec{j}(\vec{x})$$

- **mikroskopisch**:

$$\vec{m}(\vec{x}) = \sum_i \vec{m}_i \delta(\vec{x}-\vec{x}_i)$$

- **makroskopisch**:

$$\vec{M}(\vec{x}) = \langle\vec{m}\rangle(\vec{x}) = \sum_k N_k \cdot \langle\vec{m}\rangle(\vec{x})$$

  N_k ist die Anzahl der Moleküle vom Typ k im jeweils betrachteten Volumen um $\vec{x}$.

$$\Rightarrow \vec{A}_{Makro}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int d^3x' \left[\frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + c\cdot\frac{\vec{M}(\vec{x}')\times(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\right]$$

mit $\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} = \vec{\nabla}_{(x')}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ und partieller Integration:

$$\vec{A}_{Makro}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int d^3x' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\left[\underbrace{\vec{j}(\vec{x}') + c\vec{\nabla}_{(x')}\times\vec{M}(\vec{x}')}_{\text{effektive Stromdichte}}\right]$$

Ab hier: kein Index $\hat{=}$ makroskopisch

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + 4\pi\vec{\nabla}\times\vec{M}$$

$$\vec{H} \equiv \vec{B} - 4\pi\vec{M} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Verknüpfungsgleichungen $\vec{H} = \vec{H}(\vec{B})$
Einfachster Fall: Isotropes, lineares Medium:

$$\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H} \qquad \chi_m : \text{ Magnetische Suszeptibilität}$$
$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \qquad \mu : \text{relative Permeabilität}$$

$$\Rightarrow \mu = 1 + 4\pi\chi_m$$

3.3.1 Einteilung magnetischer Stoffe

Diamagnetismus

$\chi_m < 0$, χ_m ist temperaturunabhängig, $|\chi_m| \approx 10^{-5}$.

- reiner Induktionseffekt (Der Effekt benötigt keine magnetischen Dipole)
- $\rightarrow$ Alle Stoffe sind Diamagneten
- Spezialfall Supraleiter: $\chi_m = -\frac{1}{4\pi}$ „Ideale Diamagneten"

Paramagnetismus

$\chi_m > 0$, $\chi_m = \chi_m(T)$, $|\chi_m| \approx 10^{-5}..10^{-3}$.

- Magnetische Dipole werden im Feld ausgerichtet

Kollektiver Magnetismus

$\chi_m \gg 0$, χ_m ist unterhalb von T_{Curie} stark temperaturabhängig.

- Magnetische Dipole richten sich **spontan** parallel aus
- Die wichtigsten Arten: Ferromagnetismus, Ferrimagnetismus, Antiferromagnetismus

3.3.2 Grenzflächen

Betrachte die Grenzfläche A zwischen 2 Medien mit unterschiedlichen Permeabilitäten μ_1 und μ_2. Der Normalenvektor $\hat{n}$ zeigt vom ersten zum zweiten Medium senkrecht zur Fläche.

- **Gauß'scher Satz**:

$$0 = \int_V \vec{\nabla}\vec{B}\, d^3x = \int_{\partial V} \vec{B} \cdot \vec{da} = (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} \cdot \Delta A$$

$$\Rightarrow \hat{n} \cdot \vec{B}_1 = \hat{n} \cdot \vec{B}_2$$

- **Stokes'scher Satz**, $\hat{t}$ ist Normalenvektor der Schleife:

$$\begin{aligned} \int_S \vec{\nabla} \times \vec{H}\, \vec{da} = \oint_{\partial S} \vec{H} \cdot \vec{ds} \qquad &= \hat{t} \times \hat{n} \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \Delta l \\ &= \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{t} \cdot \Delta l \\ = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j}\vec{da} \qquad &= \underbrace{\vec{k}}_{\text{Oberflächenstromdichte}} \cdot \hat{t} \cdot \Delta l \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{k}$$

4 Elektrodynamik

Stationäres Problem:

$$\varrho(\vec{x}) \to \vec{E}(\vec{x}) \quad , \quad \vec{j}(\vec{x}) \to \vec{B}(\vec{x})$$

Faraday:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \to \vec{E} \quad , \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \to \vec{B}$$

$$\Rightarrow \left(\vec{E}, \vec{B}\right) \textbf{ elektromagnetisches Feld}$$

4.1 Das Faraday'sche Induktionsgesetz

$$\text{Die Elektromotorische Kraft (EMK): } \xi \equiv \oint_C \vec{E}'(\vec{l}) d\vec{l}$$

$$\text{Der Magnetische Fluß: } \Phi \equiv \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, da$$

Faraday:

$$\xi = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

Mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einem Magnetfeld $\vec{B}$ bewegte Schleife C:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \underbrace{\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\right) \cdot \vec{B}}_{\text{Konvektionsstrom}} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) + \vec{v} \cdot \underbrace{\left(\vec{\nabla}\vec{B}\right)}_{=0}$$

$$\xrightarrow[\text{Faraday}]{\text{Stokes}} \oint_C \underbrace{\left(\vec{E}' - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) d\vec{l}}_{=\oint_C \vec{E} d\vec{l}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \hat{n}\, da$$

$$\Rightarrow \vec{E}' = \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \text{ für } \left|\frac{v}{c}\right| \ll 1$$

C in Ruhe: $\vec{E}' = \vec{E}$. Im Laborsystem gilt (mit Stokes'schem Satz):

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \cdot \hat{n}\, da = 0 \quad \forall S$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \textbf{Faraday'sche Feldgleichung}$$

4.2 Energie des Magnetfelds

Ströme müssen erzeugt werden $\to$ zeitveränderliche $\vec{B}$-Felder $\to$ EMK $\to$ Arbeit wird verrichtet. Mit Ampère und Faraday:

$$\Rightarrow \delta W = ... = \frac{1}{4\pi} \int d^3x\, \vec{H} \cdot \delta \vec{B}$$

in linearen Medien gilt demnach:

$$W_{lin.Med.} = \frac{1}{8\pi} \int d^3x\, \vec{H} \cdot \vec{B}$$

Zusammenfassend

$$\text{Gauß:} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}) = 4\pi\varrho(\vec{x}) \tag{1}$$

$$\text{Ampère:} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{x}) \tag{2}$$

$$\varrho_{mag} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\vec{B}(\vec{x}) = 0 \tag{3}$$

$$\text{Faraday:} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

(1),(2),(3) sind hier noch die statischen Gleichungen mit $\vec{D} = \vec{D}\left[\vec{E}\right]$ und $\vec{H} = \vec{H}\left[\vec{B}\right]$
Maxwell (1864): Inkonsistenz von (2), wenn die Gleichung dynamisch, also mit $(\vec{x}, t)$-Abhängigkeit betrachtet wird:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}, t) \overset{?}{=} \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{x}, t)$$
$$\overset{\cdot\vec{\nabla}}{\Rightarrow} 0 = \vec{\nabla}\vec{j} \neq 0$$

Kontinuitätsgleichung: $0 = \vec{\nabla}\vec{j} + \frac{\partial\varrho}{\partial t} \overset{(1)}{=} \vec{\nabla}\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$

Maxwell: Substitution $\vec{j} \to \vec{j} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{\text{Maxwell'scher Verschiebungsstrom}}$ in (2)

4.3 Kurze Zusammenfassung der gesamten klassischen Physik

- **Maxwell**:

$$\vec{\nabla}\vec{D} = 4\pi\varrho$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

Mit gegebenen $\varrho(\vec{x})$, $\vec{j}(\vec{x})$, $\vec{D} = \vec{D}\left[\vec{E}(\vec{x})\right]$ und $\vec{H} = \vec{H}\left[\vec{B}(\vec{x})\right]$.

- **Lorentz**:

$$\vec{F}_{em} = q \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)$$

- **Newton**:

$$\vec{p} = \frac{m \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \quad , \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$
$$\vec{F}_{Grav} = -G_N \frac{m_1 m_2}{|\vec{x}_{12}|^2} \cdot \hat{x}_{12}$$

4.4 Zerlegungs- und Eindeutigkeitssatz (Mathematik)

Jedes Vektorfeld $\vec{V}(\vec{x})$ ist eindeutig durch sein Quellenfeld $\vec{\nabla}\vec{V}$ und sein Wirbelfeld $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ bestimmt.

- **Zerlegungssatz** Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r})$, $\lim_{r\to\infty} \vec{E} = 0$
$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_l + \vec{E}_t : \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_l = 0,\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_t = 0$$
Mit $\vec{E}_l = \vec{\nabla}\alpha$, $\vec{E}_t = \vec{\nabla} \times \vec{\beta}$ und
$$\begin{aligned} \alpha(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ \vec{\beta}(\vec{r}) &= +\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$
Beweis: siehe Literatur (oder kommt vielleicht noch...)
$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{\nabla}\alpha + \vec{\nabla} \times \vec{\beta}$$

- **Eindeutigkeitssatz** Die Zerlegung $\vec{E} = \vec{\nabla}\alpha + \vec{\nabla} \times \vec{\beta}$ ist Eindeutig. Beweis: Es gebe $\vec{E}_1(\vec{x}), \vec{E}_2(\vec{x})$ mit $\vec{\nabla}\vec{E}_1 = \vec{\nabla}\vec{E}_2$ und $\vec{\nabla} \times \vec{E}_1 = \vec{\nabla} \times \vec{E}_2$.
$$\Delta\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \Rightarrow \vec{\nabla}\Delta\vec{E} = 0 \tag{5}$$
$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \Delta\vec{E} = 0 \tag{6}$$
$$\overset{(6)}{\Rightarrow} \Delta\vec{E} = \vec{\nabla}\psi \overset{(5)}{\Rightarrow} \triangle\psi = 0 \quad (5')$$
Mit 1. Green'scher Identität ($\varphi = \psi$):
$$\int_{V_\infty} d^3x \left(\psi \underbrace{\triangle\psi}_{=0} + (\vec{\nabla}\psi)^2 \right) = \oint_{S_\infty} \psi \underbrace{\vec{\nabla}\psi}_{=0} \, df = 0$$
$$\Rightarrow \int d^3x \, (\vec{\nabla}\psi)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\psi = 0 = \Delta\vec{E}$$
$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2$$

4.5 Potentiale

Mikroskopische Maxwellgleichungen:
$$\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\varrho \tag{1}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{2}$$
$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \tag{3}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

$$(3) \Rightarrow \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$
$$(4) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \right) = 0 \Rightarrow \qquad \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} = -\vec{\nabla}\Phi$$
$$(1) \Rightarrow \qquad \triangle\Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\vec{A}) = -4\pi\varrho \tag{7}$$
$$(2) \Rightarrow \qquad \triangle\vec{A} \underline{- \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{A} + \underline{\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}} \right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{8}$$

Die unterstrichenen Terme sind Folge des **Verschiebungsstrom**s.

Statt 4 gekoppelten DGLs erster Ordnung (1),(2),(3) und (4) haben wir nun 2 gekoppelte DGLs zweiter Ordnung (7) und (8), die wir mittels **Eichtransformation** entkoppeln:

$$\begin{aligned}
\vec{A} &\to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{x},t) \\
\Phi &\to \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\vec{x},t) \\
\Rightarrow \vec{B} &\to \vec{B}' = \vec{B} \\
\Rightarrow \vec{E} &\to \vec{E}' = \vec{E}
\end{aligned}$$

- **Lorenz-Eichung**[3]: $\vec{\nabla}\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi' = 0 \quad (*)$

$$\Rightarrow \left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi' = -4\pi\varrho \qquad (7')$$

$$\underbrace{\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)}_{\Box}\vec{A}' = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad (8')$$

$\Box$ ist der d'Alembert'sche Operator: $\Box = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2$. Um die Lorenz-Eichung zu erreichen, brauchen wir die Lösung $\Lambda\left[\vec{A}(\vec{x},t),\Phi(\vec{x},t)\right]$ der Gleichung $(*)$:

$$\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \triangle\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda = 0$$

$$\Rightarrow \Box\Lambda = \underbrace{\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)}_{\text{bekannt}}\Lambda = \underbrace{\left[-\vec{\nabla}\vec{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]}_{\text{gegeben}}$$

$$\Rightarrow \Lambda = \text{"}\Box^{-1}\text{"}\left[-\vec{\nabla}\vec{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]$$

- **Coulomb-Eichung** (transversale Eichung, Strahlungseichung, $\vec{A}'', \Phi$): $\vec{\nabla}\vec{A}''(\vec{x},t) = 0$

$$\begin{aligned}
(7) \qquad &\Rightarrow \triangle\Phi = -4\pi\varrho(\vec{x},t) \\
&\Rightarrow \Phi(\vec{x},t) = \int d^3x'\,\frac{\varrho(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \\
(8) \qquad &\Rightarrow \Box\vec{A}'' = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\Phi \overset{*}{=} -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{trans}} \\
&* : \text{ zu beweisen}
\end{aligned}$$

Beweis: Vektorfeld $\vec{j} = \vec{j}_l + \vec{j}_t$ mit $\vec{\nabla}\times\vec{j}_l = 0 = \vec{\nabla}\vec{j}_t$:

$$\begin{aligned}
\vec{j}_l &= -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3x'\,\frac{\vec{\nabla}_{(x')}\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \\
\vec{j}_t &= +\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\int d^3x'\,\frac{\vec{j}(\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{x}'|}
\end{aligned}$$

[3] ohne T, das stimmt so.

Mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\vec{\nabla}\vec{j} = -\vec{\nabla}\vec{j}_l = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\triangle\Phi$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 4\pi\vec{j}_l \Rightarrow -\frac{4\pi}{c}\underbrace{(\vec{j}_l + \vec{j}_t)}_{=\vec{j}} + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_t\checkmark$$

Wenn $\varrho = 0$ (Vakuum):

$$\begin{aligned}
\Phi = 0 \Rightarrow \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} \\
\vec{B} &= \vec{\nabla}\times\vec{A} \\
\vec{A}'' &= \text{"}\square^{-1}\text{"}\left[-\frac{4\pi}{c}\vec{j}_t\right]
\end{aligned}$$

4.6 Green'sche Funktionen der Wellengleichung

$$\triangle\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = -4\pi f(\vec{x}, t) \qquad (*)$$

f: Quellenverteilung; Betrachte Problem ohne Randflächen in einem dispersionsfreien Medium. Fouriertransformation:

$$\begin{aligned}
\psi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \tilde{\psi}(\vec{x}, \omega)\cdot e^{-i\omega t} \\
\psi(\vec{x}, \omega) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\, \psi(\vec{x}, t)\cdot e^{+i\omega t}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\triangle + k^2)\tilde{\psi}(\vec{x}, \omega) = -4\pi\tilde{f}(\vec{x}, \omega) \qquad \textbf{Helmholtz-Gleichung}, k \equiv \frac{\omega}{c}$$

4.6.1 Zeitunabhängige Green'sche Funktion

Elliptische partielle Differentialgleichung, lösen mit Green'schen Funktionen:

$$\begin{aligned}
(\triangle + k^2)G_k(\vec{x}, \vec{x}') &= -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}') \\
\text{Symmetrie } &\Rightarrow G_k = G_k(R \equiv |\vec{x} - \vec{x}'|) \\
\Rightarrow \frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}(R\cdot G_k) + k^2 G_k &= -4\pi\delta(R)
\end{aligned}$$

- $R \neq 0$: "harmonischer Oszillator"$\Rightarrow R\cdot G_k = A\cdot e^{ikR} + B\cdot e^{-ikR}$
- $k\cdot R \ll 1$: "Poisson'sche Gleichung"$\Rightarrow \lim\limits_{kR\to 0} G_k(R) = \frac{1}{R} \Rightarrow B = 1 - A$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow G_k(R) &= A\cdot G_k^+ + (1 - A)\cdot G_k^- \\
G_k^\pm &= \frac{1}{R}e^{\pm ikR} \\
G_k^+\cdot e^{i\omega t}: \text{ Kugelwelle nach außen } &\approx \frac{1}{R}e^{i(kR - \omega t)}
\end{aligned}$$

Die zeitlichen Randbedingungen bestimmen die Konstante A.

4.6.2 Zeitabhängige Green'sche Funktion

$$\left(\triangle_{(x)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{x}, t, \vec{x}', t') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t')$$

Lösungen mit $R \equiv |\vec{x} - \vec{x}'|,\ \tau \equiv t - t',\ k = \frac{\omega}{c}$:

$$G^{\pm}(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{\pm ikR}}{R} e^{-i\omega t}$$

Kontrolle der Lösungen:

$$\left(\triangle_{(x)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G^{\pm}(R, \tau) = \int \underbrace{\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)}_{=0} ... + \int d\omega\ \underbrace{e^{\pm ikR}}_{=1} \delta(R) \underbrace{e^{-i\omega t}}_{=\delta(\tau)}$$
$$= -4\pi\delta(R)\delta(\tau)$$

Für $k = \frac{\omega}{c}$:

$$G^{\pm}(R, \tau) = \frac{1}{R}\delta\left(\tau \mp \frac{R}{c}\right) \begin{cases} \text{retardierte} \\ \text{avancierte} \end{cases} \quad \text{Green'sche Funktion}$$

Allgemeine Lösung von $(*)$:

$$\psi(\vec{x}, t) = \int d^3x'\, dt'\ G^{\pm}(\vec{x}, t, \vec{x}', t') \cdot f(\vec{x}', t') + \text{homogene Lösung}$$

4.7 Erhaltung von Energie und Impuls (mikroskopische Felder)

4.7.1 Energie

An einer einzelnen Ladung q geleistete Arbeit pro Zeiteinheit:

$$P = \frac{d\vec{x} \cdot \vec{F}}{dt} = \vec{v} \cdot q \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) = q \cdot \vec{v} \cdot \vec{E}$$

Kontinuierliche Arbeit pro Zeiteinheit ist $\int d^3x\, \vec{j} \cdot \vec{E}$.
Mit $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla}\vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$ $(*)$:

$$\int d^3x\, \vec{j} \cdot \vec{E} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{4\pi} \int d^3x \left[c\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right]$$
$$\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{4\pi} \int d^3x \left[c\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - c\vec{\nabla}(\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right]$$
$$\stackrel{(4)}{=} \frac{1}{4\pi} \int d^3x \left[c\vec{\nabla}(\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] \qquad (**)$$

- gesamte elektromagnetische Energiedichte $u \equiv \frac{1}{8\pi}\left(|\vec{E}^2 + |\vec{B}|^2\right)$ $\quad \left[\frac{\text{Energie}}{\text{Volumen}}\right]$
- Poynting'scher Vektor $\vec{s} \equiv \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$ $\quad \left[\frac{\text{Energie}}{\text{Fläche}\cdot\text{Zeit}}\right]$

$$(**) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{s} = -\vec{j}\cdot\vec{E}$$

$\vec{j}\cdot\vec{E}$ beschreibt die Umwandlung elektromagnetischer Energie in mechanische Energie.

$$\int\limits_V d^3x\ \vec{j}\cdot\vec{E} = \frac{dE_{\text{mech}}}{dt} \quad , \quad E_{\text{feld}} \equiv \int\limits_V d^3x\ u$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{(E_{\text{mech}} + E_{\text{feld}})}_{V} = -\oint\limits_{\partial V} \hat{n}\cdot\vec{s}\ da$$

4.7.2 Impuls

$$\underbrace{\frac{d\vec{p}_{\text{mech}}}{dt}}_{\text{Newton}} = \int\limits_V d^3x \left(\underbrace{\varrho\vec{E}}_{\text{Coulomb}} + \underbrace{\frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}}_{\text{Lorentz}} \right)$$

$$\varrho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B} = \frac{1}{4\pi}\left[\vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\vec{E}\right) + \frac{1}{c}\vec{B}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\vec{E}\right) + \vec{B}\cdot\underbrace{\left(\vec{\nabla}\vec{B}\right)}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{c}\vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}_{=-\vec{E}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\ (4)} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) - \vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\underbrace{\vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\vec{E}\right) + \vec{B}\cdot\left(\vec{\nabla}\vec{B}\right) - \vec{E}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) - \vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)}_{\text{Divergenz eines Tensors}}\right] - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)$$

Mit Summenkonvention,

$$\vec{p}_{\text{feld}} \equiv \int\limits_V d^3x\ \frac{1}{4\pi c}\vec{E}\times\vec{B} = \int d^3x\ \frac{\vec{s}}{c^2}$$

und Maxwell'schem Spannungstensor $\quad T_{m,n} \equiv \frac{1}{4\pi}\left(E_m E_n + B_m B_n - \frac{1}{2}\left(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2\right)\delta_{m,n}\right)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{p}_{\text{mech}} + \vec{p}_{\text{feld}}\right)_l = \int\limits_V d^3x\ \frac{\partial}{\partial x_m}T_{l,m} = \oint\limits_{\partial V} da\ T_{l,m}\cdot\hat{n}_m$$

$\hat{n}$ zeigt nach außen.

4.8 Harmonische Zeitabhängigkeit ($\mathbb{R}$ vs. $\mathbb{C}$)

$$\vec{E}_{\mathbb{R}}(\vec{x},t) = Re\left[\vec{E}(\vec{x})\cdot e^{-i\omega t}\right] = \frac{1}{2}\left(\vec{E}e^{-i\omega t} + \vec{E}^* e^{-i\omega t}\right)$$

$$\vec{j}(\vec{x},t)\cdot\vec{E}(\vec{x},t) = \frac{1}{4}\left[\vec{j}(\vec{x})e^{-i\omega t} + \vec{j}^*(\vec{x})e^{-i\omega t}\right]\cdot\left[\vec{E}(\vec{x})e^{-i\omega t} + \vec{E}^*(\vec{x})e^{-i\omega t}\right]$$

$$= \frac{1}{2}Re\left[\vec{j}^*\cdot\vec{E} + \vec{j}\cdot\vec{E}\ \underbrace{e^{-2i\omega t}}_{=0\ \text{(zeitl. Mittel)}}\right]$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} - \frac{i\omega}{c}\vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla}\vec{D} = 4\pi\varrho \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} + \frac{i\omega}{c}\vec{D} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Der Realteil von $\frac{1}{2}\int\limits_V d^3x\ \vec{j}^*\cdot\vec{E}$ ist der zeitliche Mittelwert der von den Feldern geleistete Arbeit.

$$\frac{1}{2}\int \vec{j}^*\cdot\vec{E}\ d^3x + 2i\omega\int\left(W_{el} - W_{mag}\right)d^3x + \oint \vec{s}\cdot\hat{n}\ d^3x = 0$$
$$\text{mit } \vec{s} \equiv \frac{c}{8\pi}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right),\ W_{el} \equiv \frac{1}{16\pi}\left(\vec{E}\cdot\vec{H}^*\right),\ W_{mag} \equiv \frac{1}{16\pi}\left(\vec{B}\cdot\vec{H}^*\right)$$

4.9 Ebene elektromagnetische Wellen

Betrachte Medium mit räumlich konstanter Permeabilität und Suszeptibilität:

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

Sei $\varrho = \vec{j} = 0$.

$$\Rightarrow\ \vec{\nabla}\vec{E} = \vec{\nabla}\vec{B} = 0 \tag{9}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{10}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{\mu\epsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0 \tag{11}$$

mit

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\begin{cases}\vec{E}\\ \vec{B}\end{cases}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\begin{cases}\vec{E}\\ \vec{B}\end{cases}) - \triangle\begin{cases}\vec{E}\\ \vec{B}\end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(9) \Rightarrow \vec{\nabla}\times\underbrace{\partial_t\vec{E}}_{=\frac{c}{\mu\epsilon}\vec{\nabla}\times\vec{B}} + \frac{1}{c}\partial_t^2\vec{B} = 0$$
$$\Rightarrow -\frac{c}{\mu\epsilon}\triangle\vec{B} + \frac{1}{c}\partial_t^2\vec{B} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(11) \Rightarrow \vec{\nabla}\times\underbrace{\partial_t\vec{B}}_{=-c\vec{\nabla}\times\vec{E}} - \frac{\mu\epsilon}{c}\partial_t^2\vec{E} = 0$$
$$\Rightarrow c\triangle\vec{E} - \frac{\mu\epsilon}{c}\partial_t^2\vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\triangle - \frac{1}{v^2}\partial_t^2\right)\begin{Bmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{Bmatrix} = 0 \quad \textbf{Wellengleichgung}$$

- Phasengeschwindigkeit $v \equiv \frac{c}{n}$ und
- Brechungsindex $n \equiv \sqrt{\mu\epsilon}$

<u>**Lösung**</u> von $(\triangle - \frac{1}{v^2}\partial_t^2)u(\vec{x},t) = 0$ mit **1.Ansatz** $u(\vec{x},t) = e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega t}$

$$\Rightarrow\ \text{Dispersionsbeziehung } k \equiv |\vec{k}| = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}\cdot n$$

Wähle Koordinatensystem: $\vec{k}||\hat{x}$

$$\Rightarrow u(\vec{x},t) = A_k e^{ikx-i\omega t} + B_k e^{-ikx-i\omega t}$$

$$\left[\text{In dispersionsfreiem Medium: } v(k) = \frac{c}{n} = const.\right] \quad = A_k e^{ik(x-vt)} + B_k e^{-ik(x+vt)}$$

Die Lösung ist linear $\Rightarrow$ Allgemeine Lösung ist Superposition $\Rightarrow$ Integrieren über k $\Rightarrow$ Fouriertransformation, allgemeine Lösung ist (f und g beliebige Funktionen):

$$u(\vec{x},t) = f(x-vt) + g(x+vt)$$

2.Ansatz

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 \cdot e^{ik\vec{x}\cdot\hat{n}-i\omega t}$$
$$\vec{B}(\vec{x},t) = \vec{B}_0 \cdot e^{ik\vec{x}\cdot\hat{n}-i\omega t}$$

$\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ und $\hat{n}$ sind zeitlich und räumlich konstant, $k^2 = \mu\epsilon\frac{\omega^2}{c^2}$. Aus den Divergenzgleichungen (9) folgt $\hat{n}\cdot\vec{E} = \hat{n}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow$ die betrachteten Wellen sind Transversalwellen. Aus den Rotationsgleichungen (10) und (11) folgt $\vec{B}_0 \sim \sqrt{\mu\epsilon}\hat{n}\times\vec{E}_0 \Rightarrow \vec{E}\perp\vec{B}_0$

$$\begin{aligned}
(10)\quad & ik\hat{n}\times\vec{E}_0 - \frac{1}{c}i\omega\vec{B}_0 = 0 \\
& \Rightarrow \vec{B}_0 = c\frac{k}{\omega}\hat{n}\times\vec{E}_0 \\
& \Rightarrow \vec{B}_0 = \sqrt{\mu\epsilon}\cdot\hat{n}\times\vec{E}_0 \\
(11)\quad & ik\hat{n}\times\vec{B}_0 + i\frac{\mu\epsilon}{c}\omega\vec{E}_0 = 0 \\
& \Rightarrow \vec{E}_0 = -\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\hat{n}\times\vec{B}_0 \\
& \Rightarrow \hat{n}\times(\hat{n}\times\vec{B}_0) = -\sqrt{\mu\epsilon}\cdot\hat{n}\times\vec{E}_0 = (\underbrace{\hat{n}\cdot\vec{B}}_{=0})\cdot\hat{n} - \vec{B}_0 \\
& \Rightarrow \vec{B}_0 = \sqrt{\mu\epsilon}\cdot\hat{n}\times\vec{E}_0
\end{aligned}$$

Definiere orthogonale Einheitsvektoren $\epsilon_1 \perp \epsilon_2, \epsilon_1 \perp \hat{n} \perp \epsilon_2$ und $\hat{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$

- **Lineare Polarisation**

$$\vec{E}_0 = \hat{\epsilon}_1 E_1, \quad \vec{B}_0 = \hat{\epsilon}_2\sqrt{\mu\epsilon}\cdot E_1$$
$$(\vec{E}_0 = \hat{\epsilon}_2 E_2, \quad \vec{B}_0 = -\hat{\epsilon}_1\sqrt{\mu\epsilon}\cdot E_2)$$
$$E_1, E_2 \in \mathbb{C}, \text{ konstant.}$$
$$\text{Energiestrom } \vec{s} \equiv \frac{1}{2}\frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\left(\frac{\vec{B}}{\mu}\right)^* = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\left|\vec{E}_1\right|^2\cdot\hat{n}$$
$$\text{zeitl. Mittel der Energiedichte } u \equiv \frac{1}{16\pi}\left(\epsilon\vec{E}\cdot\vec{E}^* + \frac{1}{\mu}\vec{B}\cdot\vec{B}^*\right) = \frac{\epsilon}{8\pi}\left|\vec{E}_1\right|^2$$

Hier: $v_{\text{Phase}} = v_{\text{Gruppe}} \Rightarrow |\vec{s}| = u\frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} = u\cdot v$

- **Allgemeine Polarisation** mit $\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2, \hat{n}$ als allgemeine Lösung:

$$\vec{E}(\vec{x},t) = (\hat{\epsilon}_1 E_1 + \hat{\epsilon}_2 E_2)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t}$$
$$\vec{B}(\vec{x},t) = \sqrt{\mu\epsilon}\cdot\hat{k}\times\vec{E}(\vec{x},t)$$
$$k^2 \equiv |\vec{k}|^2 = \mu\epsilon\frac{\omega^2}{c^2} \quad E_1, E_2 \in \mathbb{C}$$

- E_1, E_2 gleiche Phase $\Rightarrow$ Lineare Polarisation
- E_1, E_2 verschiedene Phasen $\Rightarrow$ Elliptische Polarisation, z.B. Zirkulare Polarisation: $\varphi(E_1) = \varphi(E_2) \pm \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{x}, t) = E_0 \cdot (\hat{\epsilon}_1 \pm i\hat{\epsilon}_2) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}$$

Wähle $\underbrace{\hat{\epsilon}_1}_{x} \times \underbrace{\hat{\epsilon}_2}_{y} = \underbrace{+\hat{n} = +\hat{k}}_{z}$

$$\Rightarrow Re\left(\vec{E}(\vec{x}, t)\right) = |E_0| \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bei $\vec{E}(\vec{x}, t) = E_0 \cdot (\hat{\epsilon}_1 + i\hat{\epsilon}_2) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}$ spricht man von positiver Helizität, d.h. die Projektion des Drehimpulses auf die Bewegungsrichtung ist positiv.

4.10 Ebene Trennflächen zweier Dielektrika

Betrachte zwei angrenzende Dielektrika mit den Suszeptibilitäten ϵ, ϵ' und den Permeabilitäten μ, μ'. Auf der Grenzebene (Normalenvektor $\hat{n}$) bei z=0 fileße kein Strom und sei keine Ladung vorhanden. Die Welle komme in $\vec{k}$-Richtung im Winkel α zum Lot aus dem ungestrichenen Medium; sie wird an der Grenze

- gebrochen, d.h. läuft in $\vec{k}'$-Richtung im Winkel α' zum Lot im gestrichenen Medium weiter
- reflektiert, d.h. läuft in $\vec{k}_2$-Richtung im Winkel α_2 zum Lot zurück in das ungestrichene Medium.

Ansatz:

$$\begin{aligned} \text{Einfallende Welle: } \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t} & \vec{B} &= \sqrt{\mu\epsilon}\hat{k} \times \vec{E} \\ \text{Gebrochene Welle: } \vec{E}' &= \vec{E}_0' e^{i\vec{k}'\vec{x} - i\omega t} & \vec{B}' &= \sqrt{\mu'\epsilon'}\hat{k}' \times \vec{E}' \\ \text{Reflektierte Welle: } \vec{E}_2 &= \vec{E}_2 e^{i\vec{k}_2\vec{x} - i\omega t} & \vec{B}_2 &= \sqrt{\mu_2\epsilon_2}\hat{k}_2 \times \vec{E}_2 \end{aligned}$$

Grenzbedingungen ($\forall t$): $i\vec{k}\vec{x}\Big|_{z=0} = i\vec{k}'\vec{x}\Big|_{z=0} = i\vec{k}_2\vec{x}\Big|_{z=0}$

- Reflexion: $\Rightarrow \alpha_2 = \alpha$
- Brechung: $\Rightarrow \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha')} = \frac{n'}{n}$ (Snellius)
- Herleitung???

Flächenbedingungen: $\hat{n} \cdot \vec{D}, \hat{n} \cdot \vec{B}, \hat{n} \times \vec{E}$ und $\hat{n} \times \vec{H}$ sind kontinuierlich.
$\Rightarrow$ für $\vec{E} \parallel (\hat{k}, \hat{n})$-Ebene:

$$\begin{aligned} \frac{E_0'}{E_0} &= \frac{2nn'\cos(\alpha)}{\frac{\mu}{\mu'}(n')^2\cos(\alpha) + n\sqrt{(n')^2 - n^2\sin^2(\alpha)}} \\ \frac{E_2}{E_0} &= \frac{\frac{\mu}{\mu'}(n')^2\cos(\alpha) - n\sqrt{(n')^2 - n^2\sin^2(\alpha)}}{\frac{\mu}{\mu'}(n')^2\cos(\alpha) + n\sqrt{(n')^2 - n^2\sin^2(\alpha)}} \\ \mu &= \mu' = 1 \Rightarrow \text{Fresnel-Formeln} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Licht ist eine EM-Welle, c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

5 Spezielle Relativitätstheorie

5.1 Galileitransformation

Eine Galileitransformation transformiert Koordinaten eines Inertialsystems k in die eines IS k' (und/oder umgekehrt):

$$k : (x, y, z) \Leftrightarrow k' : (x', y', z')$$

Wählt man nun die Achsen der beiden Systeme parallel, also $\hat{e}_i = \hat{e}'_i \forall i \in \{i, 2, 3\}$ und die Nullpunkte so, dass sie zur Zeit t=0 zusamenfallen, kann man mit der Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$ der Systeme zueinander einfach umrechnen:

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v} \cdot t$$

Die Newton'sche Mechanik ist invariant unter dieser Transformation:

$$\begin{aligned} k' : \quad m_i \cdot \frac{d\vec{v}'_i}{dt} &= -\vec{\nabla}_{(x'_i)} \sum_{j \neq i} V_{i,j} \left(|\vec{x}'_i - \vec{x}'_j| \right) \\ \text{Mit } \vec{v}'_i &= \vec{v}_i - \vec{v} \text{ und } \vec{\nabla}_{(x_i)} = \vec{\nabla}_{(x'_i)} : \\ k : \quad m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} &= -\vec{\nabla}_{(x_i)} \sum_{j \neq i} V_{i,j} \left(|\vec{x}_i - \vec{x}_j| \right) \end{aligned}$$

Die Elektrodynamik ist jedoch **nicht** invariant unter dieser Transformation:

$$\begin{aligned} k' : \quad & \left(\triangle' - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \varphi = 0 \\ k : \quad & \left[\triangle - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \frac{2}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \partial_t - \frac{1}{c^2} \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right)^2 \right] \varphi = 0 \end{aligned}$$

Es gibt nun mehrere Erklärungsmöglichkeiten hierfür:

1.
   - Newton-Mechanik ist korrekt
   - Maxwellgleichungen sind falsch
   - Galileiinvarianz ist korrekt
2.
   - Newton-Mechanik ist korrekt
   - Maxwellgleichungen sind richtig $\Rightarrow$ Es gibt einen Äther
   - Galileiinvarianz ist korrekt
3.
   - Newton-Mechanik ist falsch
   - Maxwellgleichungen sind korrekt
   - Galileitransformation ist keine fundamentale Symmetrie der Natur

Aus Experimenten weiß man, dass die Maxwellgleichungen korrekt sind $\Rightarrow$ 2 oder 3. Die Äthertheorie wird allerdings umso absurder, je weiter man sie ausbaut.
Einstein 1905 (3): Spezielle Relativitätstheorie, aufbauend auf 2 Postulaten:

1. Die physikalischen Gesetze und die Ergebnisse aller Experimente, die in einem bestimmten Bezugssystem durchgeführt werden, sind unabhängig von der Translationsbewegung $\vec{v}$ des Systems als ganzes, sofern gilt $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$.
   Alle gleichförmig zueinander bewegten Bezugssysteme sind physikalisch äquivalent.
2. Die Geschwindigkeit des Lichts ist unabhängig von seiner Quelle.

5.2 Lorentz-Transformation

5.2.1 Eindimensionaler Fall

2 Bezugsysteme wie oben:

$$k : (x, y, z) \Leftrightarrow k' : (x', y', z')$$

k' bewegt sich von k aus gesehen mit v in die positive x-Richtung. Zur Zeit t=t'=0 fallen die Ursprünge der beiden Systeme zusammen. Betrachte nun einen Lichtblitz, bei t=t'=0 am Ursprung:
Die Wellenfront lässt sich beschreiben durch

$$\begin{aligned} c^2 t - (x^2 + y^2 + z^2) &= 0 \quad (k) \\ c^2 t' - (x'^2 + y'^2 + z'^2) &= 0 \quad (k') \end{aligned}$$

Mit den Postulaten und der Forderung, dass die Transformation linear sein soll:

$$\begin{aligned} \Rightarrow t' &= \gamma \cdot (t - \frac{v}{c^2} \cdot x) & t &= \gamma \cdot (t' + \frac{v}{c^2} \cdot x') \\ x' &= \gamma \cdot (x - v \cdot t) & x &= \gamma \cdot (x' + v \cdot t') \\ y' &= y & y &= y' \\ z' &= z & z &= z' \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} & \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{aligned}$$

Bemerkungen

- $t \neq t'$
- $v \ll c$ oder $c \to \infty$: Lorentz≈Galileitransformation

5.2.2 Transformation von Geschwindigkeiten

$$k: \quad u_x = \frac{dx}{dt} \qquad k': \quad u'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

$$u'_x = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{dt}{dt'}$$

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \frac{v \cdot u_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \left(\frac{dt}{dt'}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x \cdot v}{c^2}}$$

5.2.3 Lorentztransformation allgemein (dreidimensional)

Nach wie vor zeigen die Achsen der betrachteten Koordinatensysteme in die gleiche Richtung, allerdings bewegen sie sich nun mit $\vec{v}$ in einer beliebigen Richtung zueinander.

$$\vec{x}_{\|} = \frac{(\vec{v}\cdot\vec{x})\cdot\vec{v}}{v^2}$$
$$\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\|}$$
$$t' = \gamma\cdot\left(t - \frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{c^2}\right)$$
$$\vec{x}'_{\|} = \gamma\cdot\left(\vec{x}_{\|} - \vec{v}\cdot t\right)$$
$$\vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp}$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{\vec{v}}{c})^2}}$$

5.3 Einfache Anwendungen der Lorentztransformation

1. Zeitdilatation: Uhr im Ursprung von k, die zu den Zeiten t_1 und t_2 tickt. $\Delta t = t_2 - t_1$. k' bewegt sich in k mit v in x-Richtung.

$$k \to k'$$
$$\begin{Bmatrix}(t_1,0,0,0)\\(t_2,0,0,0)\end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix}(\gamma\cdot t_1, -\gamma\cdot v\cdot t_1,0,0)\\(\gamma\cdot t_2, -\gamma\cdot v\cdot t_2,0,0)\end{Bmatrix}$$
$$\Delta t \to \Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma\cdot\Delta t > \Delta t$$

$$\Rightarrow \textbf{Bewegte Uhren gehen langsamer}$$

2. Längenkontraktion: ähnlich

3. Addition von Geschwindigkeiten

$$u = u_x \qquad w \equiv -v \qquad s = u'_x$$
$$s = {}''u+w'' = \frac{u+w}{1+\frac{u\cdot w}{c^2}}$$

- $u, w \ll c \Rightarrow s \approx u + w$
- $u = c \Rightarrow s = \frac{c+w}{1+\frac{w}{c}} = c$

4. Abberration (Bradley 1725): 2 Koordinatensysteme, k und k'; k' bewegt sich von k aus gesehen mit v in x-Richtung. Das Licht eines Sterns, dessen Licht in k senkrecht von oben (y-Richtung) kommt, hat in k' einen Winkel θ' zum Lot:

$$\tan\theta' = \gamma\cdot\frac{v}{c} \approx \frac{v}{c}\ (v \ll c)$$

5. Fizeau-Experiment: Ein Medium strömt, parallel dazu wird Licht durch dieses Medium geschickt und dessen Geschwindigkeit im Medium gemessen. Im mitgeführten System des Mediums:

$$u' = \frac{c}{n}$$

Und für einen Beobachter von außen:

$$\Rightarrow u = \frac{\frac{c}{n}+v}{1+\frac{v}{n\cdot c}} \approx \frac{c}{n} + c\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right) + O(v^2)$$

5.4 Vierervektoren, Minkowski-Raumzeit

5.4.1 Erinnerung Vektoren

- Praktisch, um Kovarianz unter Rotation zu überprüfen. Beispiele:
  - Vektor=Vektor $\surd$
  - Vektor·Vektor=Skalar $\surd$
  - $v_x + v_y + v_z \neq w_x + w_y + w_z$
- Ein Invariantes Produkt existiert:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{3} v_i w_i \equiv \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

  Mit einer Drehmatrix R, für die gilt (Stichwort EULER-Winkel):

$$\det(R) > 0, \qquad R = R_{1,2}(\varphi_{1,2}) R_{1,3}(\varphi_{1,3}) R_{2,3}(\varphi_{2,3})$$

  Ist das oben definierte Produkt invariant:

$$(R \cdot \vec{v}) \cdot (R \cdot \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}$$

5.4.2 Vierervektoren

Eine Lorentztransformation k→k' lässt sich als Matrix schreiben:

$$L^{(0,1)}(v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Index $^{(1,0)}$ gibt dabei an, dass die Matrix eine Transformation in der (0,1)- bzw. (t, x)-Ebene beschreibt. Bei $L^{(\alpha,\beta)}$ mit $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ und $\alpha \neq \beta$ sind die erste Zeile und Spalte der Matrix (1,0,0,0), der Rest der Matrix entspricht den bekannten dreidimensionalen Drehmatrizen. Beispiel:

$$L^{(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ein Vierervektor $a \equiv (a_0, a_1, a_2, a_3) \equiv (a_0, \vec{a})$ (mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$) ist ein Vektor, der sich unter k→k' für $\vec{v} \parallel \hat{x}$ wie folgt transformiert:

$$a \to L^{(0,1)}(v) \cdot a = a'$$
$$a_\mu \to L^{(0,1)}(v)_\mu^{\ \nu} \cdot a'_\nu$$

Analog für $\vec{v} \parallel \hat{y}$ und $\vec{v} \parallel \hat{z}$: $a \to L^{(0,[2 \text{ bzw. } 3])} \cdot a$.

5.4.3 Rapidität ζ (Zeta)

Man kann schreiben:

$$\begin{aligned}
\frac{v}{c} &= \tanh(\zeta) && \in [-1,1] \\
\Rightarrow \gamma &= \cosh(\zeta) && \in [1,+\infty] \\
\Rightarrow \gamma\frac{v}{c} &= \sinh(\zeta) && \in [-\infty,+\infty]
\end{aligned}$$

Damit lässt sich obige Lorentztransformation auch wie folgt schreiben:

$$L^{(0,1)} = \begin{pmatrix} \cosh(\zeta) & -\sinh(\zeta) & 0 & 0 \\ -\sinh(\zeta) & \cosh(\zeta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.4.4 Invariantes Skalarprodukt

Ein unter Lorentztransformation invariantes Produkt kann man definieren als:

$$\begin{aligned}
a \cdot b \equiv a_\mu b^\mu &= a_0 b_0 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\
&= \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\eta} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
&= a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (L \cdot a) \cdot (L \cdot b) = a \cdot b$$

$\eta = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ bezeichnet man als (Minkowski-)Metrik der Raumzeit.
Für ein gegebenes a^μ gibt es demnach 3 Möglichkeiten:

- $a_\mu a^\mu > 0$: a^μ ist zeitartig:
  - $a^0 > 0$: a^μ ist zukunftsgerichtet
  - $a^0 < 0$: a^μ ist vergangenheitsgerichtet
- $a_\mu a^\mu = 0$: a^μ ist lichtartig
- $a_\mu a^\mu < 0$: a^μ ist raumartig

5.4.5 Minkowski-Raum(zeit)

Die Menge aller zukunftsgerichteten Vektoren nennt man Zukunft, die Menge aller vergangenhaitsgerichteten Vektoren Vergangenkeit. Die Lichtartigen Vektoren bilden den Lichtkegel, die raumartigen ein "Anderswo". Einzelne Punkte in der Raumzeit nennt man auch Ereignisse, dabei sind die Ereignisse der Zukunft und des Lichtkegels, der die Grenze bildet, von der Gegenwart beeinflussbar. Diese wiederum beeinflussen können nur Ereignisse aus der Vergangenheit und des Lichtkegels in der Vergangenheit, der auch hier wieder die Grenze bildet. Ereignisse im Anderswo haben auf die Gegenwart überhaupt keinen Einfluss (und umgekehrt). Kurven in dieser Raumzeit mit zeitartigen Tangenten nennt man **Weltlinien**.

$$\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^3, \qquad \vec{u}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= c^2dt^2 - |d\vec{x}|^2 \\
&= c^2dt^2 \cdot \left(1 - \frac{|\vec{u}|^2}{c^2}\right) \\
&= c^2d\tau^2
\end{aligned}
$$

τ ist die Eigenzeit eines Beobachters, der am Ereignis $(t, \vec{x})$ ruht (sich instantan im mitbewegten Inertialsystem befindet).

5.4.6 Zeitdilatation einer beliebig bewegten Uhr

$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}$, Zeit des Beobachters: t, Zeit der Uhr: τ. Die Länge der Weltlinie der Uhr im Minkowskiraum s:

$$
s = \int ds = c \cdot \int d\tau
$$

Für die verstrichene Zeit zwischen zwei Ereignissen ergibt sich für die beiden Beobachter:

$$
t_2 - t_1 = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{u}^2(\tau)}{c^2}}} d\tau \geq \tau_2 - \tau_1
$$

Das heißt, die bewegte Uhr misst eine kürzere Zeitspanne als der "ruhende"Beobachter.
Beispiel: Energiereiche kosmische Protonen, die auf die Atmosphäre der Erde treffen, werden in dieser stark abgebremst; durch die Wechselwirkung entstehen Myonen mit einer Lebensdauer τ.

$$
\begin{aligned}
&\tau \approx 2 \cdot 10^{-6} s && \hat{=} 600m \\
&\gamma \approx 20 && \hat{=} 12km
\end{aligned}
$$

Die Myonen, die eigentlich viel zu kurz leben, um die Eroberfläche zu erreichen, können dies doch aufgrund der Zeitdilatation.

5.4.7 Dopplerefekt

Betrachte eine Welle in zwei Inertialsystemen $(t, \vec{x})$ und $(t', \vec{x}')$ mit der Relativgeschwindigkeit $\vec{v}'$:

$$
\begin{aligned}
\cos(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{x}) &= \cos\left(\omega \cdot t(t', \vec{x}') - \vec{k} \cdot \vec{x}(t', \vec{x}')\right) \\
&= \cos\left(\gamma\omega \cdot (t' + \frac{\vec{v}'\vec{x}'}{c^2}) - \gamma\vec{k} \cdot \left(\vec{x} + \vec{v}'t'\right)\right) \\
&= \cos\left(\gamma \cdot (\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \cdot t' - \gamma \cdot (\vec{k} - \omega\frac{\vec{v}}{c^2}) \cdot \vec{x}'\right) \\
&\equiv \cos(\omega' \cdot t - \vec{k}' \cdot \vec{x}')
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \vec{k}' \equiv \gamma \cdot (\vec{k} - \omega\frac{\vec{v}}{c^2}) \qquad \omega' \equiv \gamma \cdot (\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})
$$

$$
\Rightarrow k_\mu = (k_0, \vec{k}) = (\frac{\omega}{c}, \vec{k}) \text{ ist ein Vierervektor.}
$$

$$
\Rightarrow \cos(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \equiv \cos(k_\mu k^\mu) \text{ ist invariant unter Lorentztransformation.}
$$

Für Licht im Vakuum gilt $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c} \Rightarrow k_\mu k^\mu = 0$. Damit kann man schreiben:

$$
\omega' = \gamma \cdot \omega \cdot (1 - \frac{v}{c} \cdot \cos\left(\underbrace{\measuredangle(\vec{k}, \vec{v})}_{\Theta}\right)
$$

Die SRT sagt also einen transversalen Dopplereffekt voraus ($\Theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega' = \gamma\omega$), der beobachtet wird.

5.4.8 Vierergeschwindigkeit

$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ ist **nicht** Raumkomponente eines Vierervektors. Definiere:

$$\begin{aligned} U_\mu &\equiv (U_0, \vec{u}) \\ \vec{u} &= \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{d\vec{x}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma_u \cdot \vec{u} \\ U_0 &\equiv \frac{dx_0}{d\tau} = \frac{dx_0}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma_u \cdot c \\ \text{mit } \gamma_u &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{u}^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow U_\mu$ ist ein Vierervektor.

5.4.9 Impuls und Energie

Plausible Annahme: $P_\mu \equiv m_0 \cdot U_\mu$="Impuls-Vierervektor"
Daraus folgt für den relativistischen Impuls

$$\vec{p} = \underbrace{m_0 \cdot \gamma_u}_{m} \cdot \vec{u}$$

m nennt man die relativistische Masse.

$$\begin{aligned} \frac{dP_0}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{\vec{u}^2(t)}{c^2}}}\right) \\ &= \frac{\vec{u}}{c} \cdot \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)}_{\text{rel. Impuls}} \\ &= \frac{\vec{u}}{c} \cdot \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{\vec{u}}{c} \cdot \vec{F} \\ &= \frac{1}{c}\frac{dE}{dt} \\ \Rightarrow P_0 &= \frac{E}{c} + \underbrace{\text{const.}}_{=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E &= c \cdot P_0 \\ &= m_0 \cdot \gamma_u \cdot c^2 \\ &= m \cdot c^2 \end{aligned}$$

Bemerkungen

- $\left.\begin{matrix} E \to \infty \\ m \to \infty \end{matrix}\right\} u \to c$
-
$$\begin{aligned} E &= m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 \vec{v}^2 + O(\frac{u^4}{c^2}) \\ &= m_0 c^2 + E_{\text{kin}} \end{aligned}$$
- $p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m_0^2 c^2$ ist unabhängig von der Wahl des Bezugssystems. $\Rightarrow$ Energie und Impuls sind abhängig vom Beobachter, die Ruhemasse m_0 dagegen nicht.

5.4.10 Energie- und Impulserhaltung

Es gilt für mehrere Teilchen:

$$P_\mu^{tot} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_i P_\mu^i = 0 \quad (\mu = 1..4)$$

5.4.11 c

In der SRT steht die Konstante c an vielen Stellen. Ursache dafür ist, dass die Einheiten von Raum und Zeit unterschiedlich sind: $[T] \neq [L]$. Man definiert daher:

$$[T] = 1m = \text{"Die Zeit, die Licht braucht, um diese Strecke zurückzulegen."}$$

$$\Rightarrow c = 1, \quad v \in [0,1], \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad t = c \cdot x^0 = x^0$$

5.5 Indexschreibweise, Summenkonvention ("Tensoranalysis")

Definiere Raum-Zeit-Kontinuum mit den Koordinaten

$$x^0, x^1, x^2, x^3$$

Betrachte eine beliebige Transformation (z.B. Lorentztransformation, $\mu = 0, 1, 2, 3$):

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^{\mu\prime}(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

5.5.1 Einstein'sche Summenkonvention

Taucht ein Index in einem Term mehrfach auf, so wird automatisch - ohne explizites Summenzeichen - über all dessen möglichen Werte summiert, falls der Index sowohl oben als auch untenstehend vorhanden ist.

5.5.2 Skalare (Tensoren nullter Stufe)

Für Skalare gilt $\varphi'(x^{\mu\prime}) = \varphi(x^\mu)$, d.h. dem gleichen Ereignis wird die gleiche Zahl zugeordnet, sowohl vor als auch nach der Transformation.

5.5.3 Vektoren (Tensoren erster Stufe)

kontravariante Vektoren

$$A^{\mu\prime} = \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\nu} A^\nu$$

<u>**Beispiel**</u>

$$\begin{aligned} U^\mu &\equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \\ U^{\mu\prime} &= \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial \tau} = \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\nu} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \\ &= \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\nu} \cdot U^\nu \end{aligned}$$

kovariante Vektoren

$$A'_\mu = \frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^\mu} A_\nu$$

Beispiel

$$\begin{aligned}\partial_\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ \partial'_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^{\mu\prime}} \\ &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu\prime}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\nu}\end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten: Ein obenstehender Index nach dem abgeleitet wird, behandelt man wie einen untenstehenden, d.h. über ν wird von 1 bis 4 summiert.

5.5.4 Tensoren höherer Stufe

Der elektromagnetische Feldstärketensor ist ein kontravarianter Tensor zweiter Stufe:

$$F^{\mu\nu\prime} = \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^\beta} F^{\alpha\beta}$$

Allgemein gilt für Tensoren (m+n)-ter Stufe vom Typ (m,n):

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_m \prime}_{\beta_1 \dots \beta_n} = \frac{\partial x^{\alpha_1 \prime}}{\partial x^{\gamma_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_m \prime}}{\partial x^{\gamma_m}} \cdot \frac{\partial x^{\delta_1}}{\partial x^{\beta_1 \prime}} \dots \frac{\partial x^{\delta_n}}{\partial x^{\beta_n \prime}} \cdot T^{\gamma_1 \dots \gamma_m}_{\delta_1 \dots \delta_n}$$

5.5.5 Rechenoperationen

Multiplikation

$$C^{\mu\nu} = A^\mu \cdot B^\nu$$

Kontraktion

$$C^\mu = A^{\mu\nu} \cdot B_\nu$$

Insbesondere gilt: $A^\mu B_\mu$ ist ein Skalar.

5.5.6 Metrischer Tensor

$\eta_{\mu\nu}$ nennt man metrischen Tensor. Er ist symmetrisch ($\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$) und nicht entartet ($\exists \eta^{-1}.\eta^{-1} \equiv \eta^{\mu\nu}$). Gegeben ein $T^{\mu\nu} \Rightarrow T^{\mu\nu} \cdot \eta_{\mu\nu}$ ist ein Skalar.

$$\begin{aligned}A_\mu &= \eta_{\mu\nu} A^\nu \\ B^\mu &= \eta^{\mu\nu} B_\nu\end{aligned}$$

In der Speziellen Relativitätstheorie und der Elektrodynamik gilt im Inertialsystem:

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In der allgemeinen Relativitätstheorie ist $\eta_{\mu\nu}$ Ortsabhängig (Raumzeitkrümmung).
$A_\mu A^\mu = A_\mu A_\nu \eta^{\mu\nu}$ ist unter Lorentztransformationen invariant, d.h. die Metrik der Raumzeit

hängt nicht von der Wahl des Inertialsystems ab. Ein weiteres (fast) lorentzinvariantes Objekt ist der ϵ-Tensor:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1: & (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\underline{\text{gerade}}\text{ Permutation von }(0,1,2,3) \\ -1: & (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\underline{\text{ungerade}}\text{ Permutation} \\ 0: & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die transformierte Größe gilt:

$$\begin{aligned} \epsilon'_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} &= L^{\beta_1}_{\alpha_1}...L^{\beta_4}_{\alpha_4}\cdot\epsilon_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4} \\ &= \epsilon_{\alpha_1...\alpha_4}\cdot\det(L) \\ L\cdot\eta\cdot L^T &= \eta \\ \Rightarrow \underbrace{(\det(L))^2}_{=1}\det\eta &= \det\eta \\ \Rightarrow \det(L) &= \pm 1 \\ \Rightarrow \epsilon'_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} &= \pm\epsilon_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4} \end{aligned}$$

$\det(L) = -1$ entspricht einer Spiegelung der Koordinatenachsen, für gewöhlich wählt man $\det(L) = +1$, so dass der ϵ-Tensor effektiv invariant unter Lorentztransformationen ist.

5.6 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

5.6.1 Ladung und Strom

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} &= 0 \\ \frac{\partial\varrho}{\partial x^0} + \partial_i j^i &= 0 \\ \Rightarrow \text{ Vierervektor } j^\mu &= (c\cdot\varrho, \vec{j}) \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

5.6.2 Potentiale und Feldstärketensor

Man definiert das Viererpotential als

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A})$$

In Lorenz-Eichung ($\frac{1}{c}\partial_t\Phi + \vec{\nabla}\vec{A} = 0$):

$$\Rightarrow \partial_\mu A^\mu = 0$$

d.h. die Lorenz-Eichung ist Lorentz-invariant; die Coulombeichung ($\vec{\nabla}\vec{A} = 0$) dagegen nicht. Die Wellengleichung lässt sich mit dem Viererpotential ausdrücken:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} - \triangle\vec{A} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \frac{1}{c^2}\partial_t^2\Phi - \triangle\Phi &= 4\pi\varrho \\ \Rightarrow \underbrace{\partial_\mu\partial^\mu}_{\Box} A^\nu &= \frac{4\pi}{c}j^\nu \end{aligned}$$

Für die Felder gilt:

$$\begin{gathered}
\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \\
\Rightarrow E_x = -\frac{1}{c}\partial_t \vec{A} - \partial_x \Phi = -(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0) \\
\Rightarrow B_x = \partial_y A_z - \partial_z A_y = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) \\
\left(\text{mit } \partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu = (\partial_{x^0}, -\vec{\nabla})\right)
\end{gathered}$$

Damit definiert man den elektromagnetischen Feldstärketensor wie folgt. Er ist antisymmetrisch und spurfrei:

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \\
&= -F^{\nu\mu} \\
F^{\mu\mu} &= 0 \forall \mu
\end{aligned}$$

Bemerkung der Feldstärketensor ist eichinvariant:

$$\begin{aligned}
A^\mu &\to A^\mu + \partial^\mu \chi \\
\Rightarrow F^{\mu\nu} &\to F^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu\chi - \partial^\nu\partial^\mu\chi = F^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Desweiteren definiert man den dualen Feldstärketensor:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

5.6.3 Kovariante Maxwellgleichungen

Mit den Tensoren $F^{\mu\nu}$ und $\tilde{F}^{\mu\nu}$ lassen sich die inhomohenen Maxwellgleichtungen

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\varrho \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

wie folgt schreiben:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

Die homogenen

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{B} = 0$$

lassen sich ebenfalls kovariant ausdrücken:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

Beweis (?):

$$\begin{aligned}
\underbrace{\underbrace{\partial_\mu\partial_\nu}_{sym.}\ \underbrace{F^{\mu\nu}}_{antisym.}}_{=0} &= \frac{4\pi}{c}\partial_\nu j^\nu = 0 \\
\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta - \partial_\mu\partial_\beta A_\alpha) \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}_{antisym.}\underbrace{(\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta + \partial_\mu\partial_\alpha A_\beta)}_{sym.} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Die auf ein Teilchen mit Impuls P und Eigenzeit τ wirkende Lorentzkraft kann man ebenfalls in der Tensorschreibweise ausdrücken:

$$\frac{d}{d\tau}P^\mu = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}U_\nu$$

Beispiel: ruhendes Teilchen: $U = (c, 0, 0, 0)$

$$\begin{aligned}
\frac{dP^\mu}{dt} &= \frac{q}{c}F^{\mu 0}\cdot c \\
&= q\cdot E^\mu \\
&= (0, q\cdot\vec{E}) \hat{=} \text{Coulomb}
\end{aligned}$$

5.6.4 Transformation der Felder

Das Transformationsverhalten der Felder ergibt sich aus dem Transformationsverhalten des Feldstärketensors:

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu\prime} &= L^\mu_\alpha L^\nu_\beta F^{\alpha\beta} \\
\Rightarrow \vec{E}' &= \gamma\cdot\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{\vec{v}}{c}\cdot\left(\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{E}\right) \\
\Rightarrow \vec{B}' &= \gamma\cdot\left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{E}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{\vec{v}}{c}\cdot\left(\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{B}\right)
\end{aligned}$$

Beispiel: $(\vec{E}, \vec{B} = 0) \rightarrow (\vec{E}', \vec{B}' \neq 0)$

5.6.5 Kovariante Green'sche Funktionen der Wellengleichung

- Es gilt (mit $x^0 = c\cdot t$):

$$\int dt' d^3x'\ G(\vec{x}, t, \vec{x}', t')\cdot ... = \frac{1}{c}\int d^4x'\ G(x, x')\cdot ...$$

- Mit $R = |\vec{x} - \vec{x}'|$ kann man die Green'schen Funktionen wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}G^\pm(R, t, t') &= \frac{1}{Rc}\delta\left(t - t' \mp \frac{R}{c})\right) \\
&= \frac{1}{Rc}\delta\left(\frac{x^0}{c} - \frac{x^{0\prime}}{c} \mp \frac{R}{c}\right) \\
&= \frac{1}{R}\delta\left(x^0 - x^{0\prime} \mp R\right)
\end{aligned}$$

- Mit folgender Deltafunktion:

$$\begin{aligned}\delta\left((x_\mu - x'_\mu)\cdot(x^\mu - x^{\mu\prime})\right) &= \delta\left((x^{0\prime} - x^0)^2 - R^2\right)\\ &= \frac{1}{2R}\left[\underbrace{\delta\left(x^{0\prime} - x^0 - R\right)}_{\approx G^{(-)}} + \underbrace{\delta\left(x^{0\prime} - x^0 + R\right)}_{\approx G^{(+)}}\right]\end{aligned}$$

  und der Stufenfunktion Θ lassen sich die Green'schen Funktionen auch so schreiben:

$$\frac{1}{c}G^{\pm} = 2\Theta\left(\pm(x^0 - x^{0\prime})\right)\cdot\delta\left((x_\mu - x'_\mu)\cdot(x^\mu - x^{\mu\prime})\right)$$

5.6.6 Kovariantes Wirkungsfunktional S

Das Wirkungsfunktional S der Elektrodynamik hängt vom Viererpotential A und dem Viererstrom j ab. Es lässt sich mit der Lagrangefunktion L und der Lagrangedichte $\mathfrak{L}$ beschreiben:

$$S[A,j] = \int dt\ L[A,j] = \int d^4x\ \mathfrak{L}(A(x), j(x))$$

Sei $A^\mu_{(0)}$ mit $j^\mu_{(0)}$ eine Lösung der Maxwellgleichungen, dann ist $\mathfrak{L}$ so zu bestimmen, dass für eine kleine Änderung δA in A gilt:

$$S\left[A_{(0)} + \delta A\right] \approx S\left[A_{(0)}\right]$$

, S in $A_{(0)}$ also stationär ist.

- **Funktionen** sind stationär in $\vec{x}_0$, wenn alle Richtungsableitungen bei $\vec{x}_0$ verschwinden:

$$\left.\frac{d}{dt}f(\vec{x}_0 + t\cdot\vec{v})\right|_{t=0} = 0 \quad \forall\vec{v}$$

- **Funktionale** sind stationär bei $A_{(0)}$, wenn alle Richtungsableitungen bei $A_{(0)}$ verschwinden:

$$\begin{aligned}\forall h(x): \quad \left.\frac{d}{dt}S\left[A_{(0)} + t\cdot h(x)\right]\right|_{t=0} &= 0\\ &= \int d^4x\ h(x)\left.\frac{\delta s}{\delta A(x)}\right|_{A_{(0)}}\end{aligned}$$

$\mathfrak{L}$ hat folgende Eigenschaften:

1. S ist Lorentz-Skalar $\Rightarrow \mathfrak{L}$ ist auch Lorentzskalar
2. Die Maxwellgleichungen sind linear in $A^\mu \Rightarrow \mathfrak{L}$ ist quadratisch in A^μ

Die "erratene" Lösung ist:

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}j_\mu A^\mu$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \mathfrak{L}(A^\mu + t\cdot h^\mu) =\\ &= -\frac{1}{16\pi}\left[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + 2tF^{\mu\nu}\cdot(\partial_\mu h_\nu - \partial_\nu h_\mu) + t^2\cdot(\partial^\mu h^\nu - \partial^\nu h^\mu)\cdot(\partial_\mu h_\nu - \partial_\nu h_\mu)\right] - \frac{1}{c}(j_\mu A^\mu + t\cdot j_\mu h^\mu)\\ &= \mathfrak{L} + t\cdot(...) + t^2\cdot(---)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{d}{dt}\int d^4x\left[\mathfrak{L} + t\cdot(...) + t^2\cdot(---)\right]\Big|_{t=0}\\
&= \int d^4x \left[(-\frac{1}{8\pi}F^{\mu\nu}\cdot(\partial_\mu h_\nu - \underbrace{\partial_\nu h_\mu}_{=+\partial_\mu h_\nu}) - \frac{1}{c}j_\mu h^\mu\right]\\
\text{(wähle } \lim_{x\to\infty} h = 0\text{)}:\ &= \int d^4x \left[+\frac{1}{4\pi}\partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}j^\nu\right] h_\nu\\
&= 0 \quad \forall h\\
&\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j^\nu
\end{aligned}
$$

Die Maxwellgleichungen folgen damit aus der Stationarität des betrachteten Funktionals.

5.6.7 Eichinvarianz von S

$\mathfrak{L}$ ist nicht eichinvariant:

$$
\begin{aligned}
A^\mu &\to A^\mu + \partial^\mu\chi\\
F^{\mu\nu} &\to F^{\mu\nu}\\
j_\mu A^\mu &\to j_\mu A^\mu + j_\mu\partial^\mu\chi\\
\mathfrak{L} &\to \mathfrak{L} + j_\mu\partial^\mu\chi
\end{aligned}
$$

Das ist aber kein Problem, da nicht $\mathfrak{L}$, sondern S von Interesse ist:

$$
\begin{aligned}
S\left[A + \partial_\mu\chi\right] &= S[A] - \frac{1}{c}\int d^4x\ j^\mu\partial_\mu\chi\\
&= S[A] + \frac{1}{c}\int d^4x\ \chi\cdot(\underbrace{\partial_\mu j^\mu}_{*})\\
&= S[A]
\end{aligned}
$$

Die Eichinvarianz des elektrodynamischen Wirkungsfunktionals folgt aus der Kontinuitätsgleichung $*$ (Weyl 1918)

6 Erweiterung der bisherigen Theorie