

Theoretische Physik C
Elektrodynamik

Prof. Dr. Kurt Busch

Mitschrieb erstellt von C.O., D.E. und Q.e.

11.02.2011

Inhaltsverzeichnis

1 Kapitel- Mathematische Hilfsmittel	5
1.1 Skalares Feld	5
1.2 Integralbildung auf Feldern	6
1.3 Verknüpfungen von Feldern über Integralbildung	8
1.4 Dirac'sche „Delta-Fkt“	11
1.5 Zylinder- und Kugelkoordinaten	11
2 Die Maxwell'schen Gleichungen für Felder im Vakuum	14
2.1 Mathematische Form und anschaulicher Inhalt, Kontinuitätsgleichung	14
2.1.1 Integrale Form	14
2.1.2 Differentielle Form	14
2.1.3 Erhaltung der Ladung	15
2.2 Zustände, Observablen und Dynamik des EM-Feldes - Teil 1	15
3 Elektrostatik	16
3.1 Das elektrische Potential für eine vorgegebene Ladungsverteilung	16
3.2 Lösung der Poisson Gleichung	17
3.2.1 Allgemeines Problem der Elektrostatik	17
3.2.2 Satz aus der Potentialtheorie:	17
3.2.3 Typische Randbedingungen	17
3.2.4 Green'sche Integralsätze	18
3.2.5 Lösungen der DGL mit Randbedingungen	18
3.2.6 Induzierte Oberflächenladungsdichte σ	20
3.3 Multipolentwicklung	20
3.3.1 Einführung	20
3.3.2 Multipolentwicklung für eine beliebige Ladungsverteilung	22
3.3.3 Multipolentwicklung und Kugelflächenfunktionen	23
3.4 Energie einer Ladungsverteilung und Arbeit W	25
3.4.1 Punktladungen	25
3.4.2 Kapazitätskoeffizienten und Kapazität	26
3.4.3 Kondensator und Kapazität	26
3.4.4 Energie Kontinuierlicher Ladungs bzw. Feldverteilungen	27
4 Magnetostatik	28
4.1 Das Vektorpotential	28
4.1.1 Magnetostatisches Analogon zum idealen Leiter der Elektrostatik	30
4.2 Beispiele für Vektorpotentiale	30
4.2.1 homogenes Magnetfeld	30
4.2.2 Vektorpotential und Magnetfeld eines kreisförmigen Linienstroms	31
4.2.3 Rechteckige Leiterschleife	33
4.3 Multipolentwicklung des Magnetfelds	34
4.3.1 Kraftwirkung und Drehimpuls	35
4.4 Energie einer Stromverteilung	35
5 Zeitlich veränderliche Felder	36
5.1 Zustände, Observablen und Dynamik des Elektrischen Feldes Teil 2 Energie, Impuls und deren Ströme	36
5.1.1 Beispiel 1: Elektrostatistisches Feld mit Feldlinien parallel zur x-z-Ebene	39
5.1.2 Beispiel 2: 2 Punktladungen	40
5.2 Die Ausbreitung Elektromagnetischer Wellen im Vakuum	41
5.3 Wellen in Hohlleitern	44
5.4 Resonatoren	48

5.4.1	Mathematischer Exkurs: Bessel'sche DGL	49
5.4.2	Beschränkungen auf einen Schwingungstyp (=Mode)	50
5.5	Zustände, Observablen und Dynamik des EM-Feldes III Skalar und Vektorpotential bewegter Ladungen	51
5.5.1	Lösungen der inhomogenen Wellengleichung	52
5.5.2	Beispiel Geladenes, punktförmiges Teilchen mit beliebiger Geschwindigkeit	53
5.5.3	Beispiel: Gleichförmig bewegte Punktladung:	54
5.5.4	Beispiel: Hetz'scher Dipol	55
6	Kovariante Formulierung der E-Dynamik	56
6.1	Der Raum-Zeit Begriff und die Lorentz-Trafo	56
6.2	Vierervektoren, Vierertensoren und Vektoroperationen	58
6.3	Die Feldgleichung	60
7	Materie im Elektromagnetischen-Feld	64

Vorwort

Dieser Mitschrieb beruht auf der oben genannten Vorlesung und ist nur eine Fassung des Wahrgenommenen eines Hörers ohne Garantie auf Richtigkeit.

Deshalb wird jegliche Verantwortung für fehlerbehaftete Informationen von sich gewiesen, da der folgende Aufschrieb nur zur Hilfe und Orientierung oder einer Diskussionsplattform des Suchenden dient, somit gar nicht der wissenschaftlichen praktischen Nutzung des Inhaltes.

Es besteht keine Behauptung das Verfasste sei eine wörtliche Dokumentation von verbreiteten Wissen, oder wäre tatsächlich so in ihrer Form veröffentlicht worden. Allen erwähnten Menschen werden keine Unterstellungen vorgeworfen etwas von Folgendem so gesagt zu haben.

Dieses Skript soll Denkipulse setzen und den Leser zur Entwicklung eigenes Verständnisses anregen!

Es sei viel Spaß gewünscht.

1 Kapitel- Mathematische Hilfsmittel

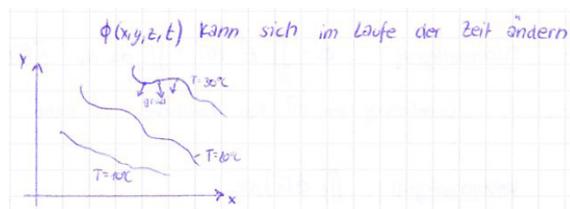
Was wir kennen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} & \text{ Gradient} \\ \vec{\nabla} \cdot & \text{ Divergenz} \\ \vec{\nabla} \times & \text{ Rotation} \\ \text{Linienintegral } W & = \int_C \vec{F} d\vec{r} \end{aligned}$$

1. Skalar- und Vektorfelder und deren Veranschaulichung
2. Integralbildung auf Feldern
3. Verknüpfung von Feldern über Integralbildung
4. Dirac'sche Delta- Fkt.
5. Zylinder- und Kugelkoordinaten

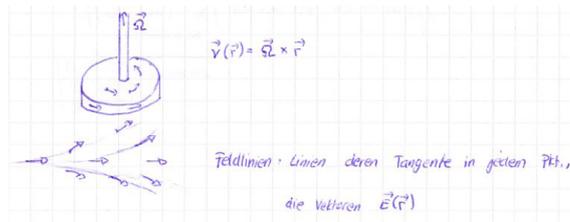
1.1 Skalares Feld

Jedem Raumpunkt $\vec{r} = (x, y, z)$ wird eine Wert $\phi = \phi(\vec{r}) = \phi(x, y, z)$ zugeordnet. $\phi(x, y, z, t)$ kann sich im Laufe der Zeit ändern.



Vektorfelder

Jedem Raumpunkt \vec{r} wird ein Vektor $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ zugeordnet. (Ein Vektor wird definiert durch sein Transformationsverhalten) $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\Omega} \times \vec{r}$



Feldlinien: Linien deren Tangente in jedem Punkt die Vektoren $\vec{E}(\vec{r})$

a) $\frac{d\vec{r}(\tau, c)}{d\tau} = \vec{E}(\vec{r}(\tau, c))$ C =Startpunkt

Gl. für Feldlinien

b) Durch jeden Punkt des Raumes mit $\vec{E} \neq 0$ geht eine Feldlinie.

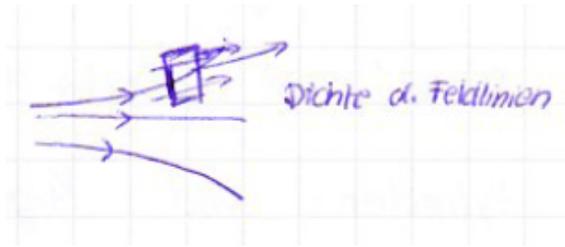
Durch Pkt mit $\vec{E} = 0$ oder $\vec{E} = \infty$ können mehrere FLen gehen.

c) $\vec{E}(\vec{r})$, $f(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})$ haben die gleichen FLen

→ FL "unendlich Licht".

d) Konvention "Stärke" eines Feldes

→ Anzahl der Feldlinien pro Einheit der rechtwinklig zu den Linien stehenden Flächen ist proportional zur Feldstärke.



Wdh.

$$\frac{\vec{r}(\tau, c)}{d\tau} = f(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}(\tau, c))$$

1.2 Integralbildung auf Feldern

Linienintegral

$$\int_c \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \vec{E}(\vec{r}(\tau)) \cdot \frac{\vec{r}(\tau)}{d\tau}$$

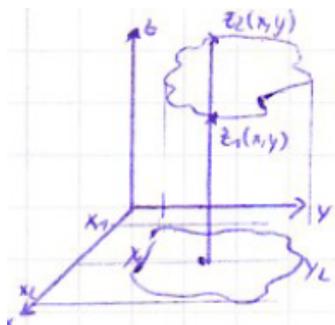
Zirkulation $\Gamma = \oint_c \vec{E} d\vec{r}$ N.B. c hat eine Richtung

Flächenintegral

$$\phi = \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint_{B(u,v)} du dv \vec{E}(\vec{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{d\vec{r}(u,v)}{du} \times \frac{d\vec{r}(u,v)}{dv} \right)$$

Orientierung von $d\vec{A}$: Bzgl. Randkrume c der Fläche.

Volumenintegral



$$\begin{aligned} \iiint_V \phi(\vec{r}) dV &= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz \phi(x, y, z) \\ &= \iiint_{\tilde{V}} du dv dw \phi(\vec{r}(u, v, w)) \left| \frac{\delta \vec{r}}{\delta u} \cdot \left(\frac{\delta \vec{r}}{\delta v} \times \frac{\delta \vec{r}}{\delta w} \right) \right| \\ &\quad \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta z}{\delta u} \\ \frac{\delta x}{\delta v} & \frac{\delta y}{\delta v} & \frac{\delta z}{\delta v} \\ \frac{\delta x}{\delta w} & \frac{\delta y}{\delta w} & \frac{\delta z}{\delta w} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Bsp.

$$\int_c \vec{E} d\vec{r}, \vec{E} = (y, -x, x^2 + y^2 - z)$$

C: Gerade, die Pkt (0,0,0) und (1,2,3) verbindet

C: $\vec{r}(\tau) = (\tau, 2\tau, 3\tau) \quad \tau \in [0, 1]$

I.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 d\tau \begin{pmatrix} y \\ -x \\ x^2 + y^2 - z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \int_0^1 d\tau (y - 2x + 3(x^2 + y^2 - z)) \\ &= \int_0^1 d\tau (15\tau^2 - 9\tau) = \frac{1}{3}15 - \frac{1}{2}9 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

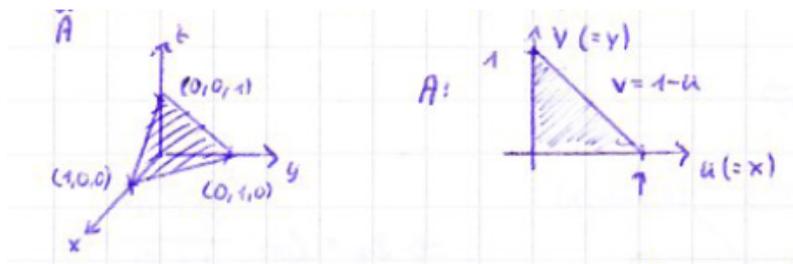
Bsp.

$\iint_C \vec{E} d\vec{A}, \quad \vec{E} = (y, x, z)$

1)

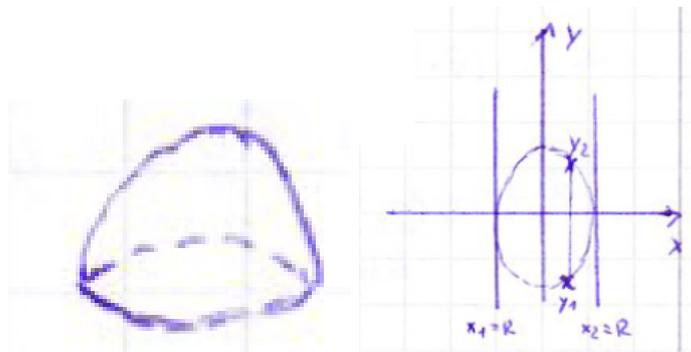
$$\begin{aligned} \iint_C \vec{E} d\vec{A} &= \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv \begin{pmatrix} v \\ u \\ 1-u-v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \int_0^1 du (1-u) = 1/2 \end{aligned}$$

2)



$$\begin{aligned} \frac{\delta \vec{r}}{\delta u} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \frac{\delta \vec{r}}{\delta v} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \frac{\delta \vec{r}}{\delta u} \times \frac{\delta \vec{r}}{\delta v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3) Bsp. $\iiint_F z = dV$ mit $F =$ homogene Halbkugel mit Radius R über (x,y) -Ebene



$$\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} dz \cdot z = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \frac{1}{2} (R^2 - (x^2 + y^2))$$

$$= \int_{-R}^R dx \frac{1}{2} ((R^2 - x^2)y - \frac{1}{3}y^3) \Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^R (R^2 - x^2)^{3/2} = \frac{\pi}{4} R^4$$

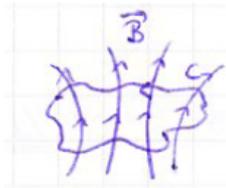
$\oiint d\vec{a} \cdot \vec{T}$ (Satz v. Gauß)

1.3 Verknüpfungen von Feldern über Integralbildung

i

$$\phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1) = \int_C \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r}$$

$$\oint_C \vec{A} d\vec{r} = 0 \text{ mit } \vec{A} = \vec{\nabla} \phi$$

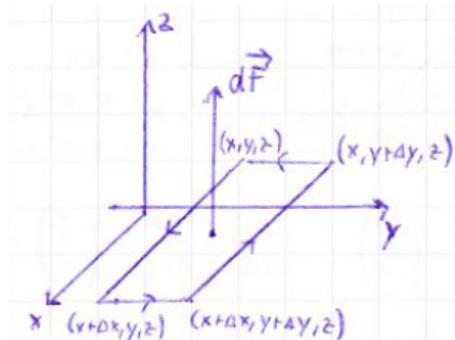


ii

$$\oint_C \vec{A} d\vec{r} \neq 0$$

Ansatz: $\oint_C \vec{A} d\vec{r} = \iint_{F(C)} \vec{B} d\vec{F}$

Aufgabe: Bestimme \vec{B}



$$\rightarrow \vec{B}_z = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{A} d\vec{r}}{|\Delta \vec{F}|}$$

$$\Delta \vec{F} = \Delta x \Delta y \cdot z$$

$$\oint_C \vec{A} d\vec{r} = A_x(\bar{x}, y, z) \Delta x + A_y(x + \Delta x, \bar{y}, z) \Delta y$$

$$- (A_x(\tilde{x}, y + \Delta y, z) \Delta x + A_y(x, \tilde{y}, z) \Delta y)$$

$$= (\delta_y A_x - \delta_x A_y) \Delta x \Delta y + \dots$$

$$\rightarrow B_z = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z$$

Wdh.

Zshg: $\vec{A} \leftrightarrow \vec{B} : \oint \vec{A} d\vec{r} \stackrel{!}{=} \iint_{F(C)} \vec{B} d\vec{F}$

$$\oint_C \vec{A} d\vec{r} = A_x(\bar{x}, y, z) \Delta x + A_y(x + \Delta x, \bar{y}, z) \Delta y$$

$$- (A_x(\tilde{x}, y + \Delta y, z) \Delta x + A_y(x, \tilde{y}, z) \Delta y)$$

$$\vec{B}_n(\vec{r}) = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{A} d\vec{r}}{\Delta F} \hat{n}$$

$$\vec{B}_n = (\delta_x A_y - \delta_y A_x) \hat{n}$$

$\rightarrow \oint_C \vec{A} d\vec{r} = \iint_{F(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) d\vec{F}$ Satz von Stokes

Gauß

$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = \iiint_{V(A)} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV$$

Achtung

- Felder müssen diff'bar sein
- Felder dürfen keine Singularitäten haben
- Felder müssen eindeutig def. sein

I.

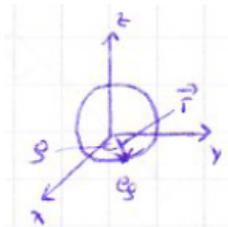
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \quad (\Leftarrow \hat{r}, \hat{e}_r)$$

$$\oint_{Kugel} \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \int \frac{dA}{4\pi R^2} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\forall \vec{r} \neq \vec{0}$$

II.



$$\vec{V} = \vec{\Omega} \times \vec{r} \qquad \vec{\Omega} = \frac{\Gamma_0}{2\pi \varrho^2} \hat{z}$$

$$= \frac{\Gamma_0}{2\pi \varrho} \frac{1}{\varrho} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\oint_C \vec{V} d\vec{r} = \int_C \frac{\Gamma_0}{2\pi} d\varphi$$

$$= \Gamma_0$$

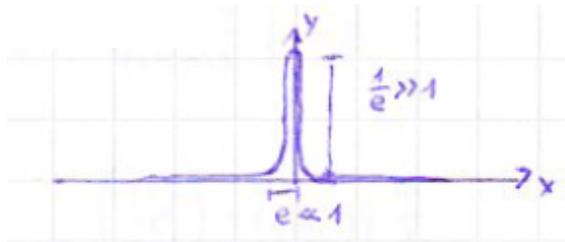
$$\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad \vec{A} = -\frac{\Gamma_0}{2\pi} \underbrace{\ln\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)}_{\text{wesentliche Singularität}} \hat{z}$$

wesentliche Singularität

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$$

$$\hookrightarrow \vec{V} \stackrel{!}{=} \vec{\nabla} \phi$$

1.4 Dirac'sche „Delta-Fkt“



$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x) = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - a) = f(a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - a) \delta(x - b) = \delta(a - b)$$

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$

↑ Nullstelle von $g(x_i)$

Bsp.

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} (\delta(x - a) + \delta(x + a))$$

$F(\delta(x))=1, 1/\sqrt{2\pi}, 1/2\pi$ je nachdem, wie die FT definiert ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta'(x) f(x) = -f'(0) \quad \text{partielle Integration}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta^n(x) f(x) = (-1)^n f^n(0)$$

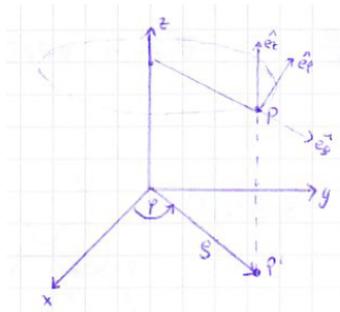
$$\frac{d}{dx} \Theta(x) = \delta(x)$$

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

Einheiten nicht vergessen

1.5 Zylinder- und Kugelkoordinaten

Zylinderkoordinaten



$$\begin{aligned}
 x &= \rho \cdot \cos(\varphi) \\
 y &= \rho \cdot \sin(\varphi) \\
 z &= z \\
 \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 \varphi &= \arctan(y/x) \\
 z &= z
 \end{aligned}
 \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned}
 \hat{e}_\rho &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos(\varphi)\hat{e}_x + \sin(\varphi)\hat{e}_y \\
 \hat{e}_\varphi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\sin(\varphi)\hat{e}_x + \cos(\varphi)\hat{e}_y \\
 \hat{e}_z &= \hat{e}_z
 \end{aligned}$$

$$\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\varphi = \hat{e}_z$$

$$\vec{A} = A_\rho \hat{e}_\rho + A_\varphi \hat{e}_\varphi + A_z \hat{e}_z$$

Linienelement

$$d\vec{r} = d\rho \hat{e}_\rho + d\varphi \hat{e}_\varphi + dz \hat{e}_z$$

$$\text{Funktionaldet} \quad \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} \right| = \rho \qquad dV = dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz$$

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix}$$

$$\partial_x f(\rho(x, y), \varphi(x, y), z) = \frac{\partial \rho}{\partial x} \partial_\rho f + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \partial_\varphi f$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \varphi \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{1 + (y/x)^2} (-y/x^2) = -\frac{\sin(\varphi)}{\rho}$$

$$\partial_y f(\rho(x, y), \varphi(x, y), z) = \sin(\varphi) (\partial_\rho f) + \frac{\cos(\varphi)}{\rho} \partial_\varphi f$$

$$\vec{\nabla} f = \hat{e}_x (\partial_x f) + \hat{e}_y (\partial_y f) + \hat{e}_z (\partial_z f) = \hat{e}_\rho \partial_\rho f + \hat{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \partial_\varphi f + \hat{e}_z \partial_z f$$

Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\
 y &= r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\
 z &= r \cos(\theta) \\
 r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\varphi = \arctan(y/x) \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned}
 \hat{e}_r &= \cos(\varphi) \sin(\theta) \hat{e}_x + \sin(\varphi) \sin(\theta) \hat{e}_y + \cos(\theta) \hat{e}_z \\
 \hat{e}_\theta &= \cos(\varphi) \cos(\theta) \hat{e}_x + \sin(\varphi) \cos(\theta) \hat{e}_y - \sin(\theta) \hat{e}_z \\
 \hat{e}_\varphi &= -\sin(\varphi) \hat{e}_x + \cos(\varphi) \hat{e}_y
 \end{aligned}$$

$$\vec{A} = A_r \hat{e}_r + A_\varphi \hat{e}_\varphi + A_\theta \hat{e}_\theta$$

Linienelement

$$d\vec{r} = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \hat{e}_\varphi$$

Funktionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} \right| = r^2 \sin(\theta) \quad dV = r^2 \sin(\theta) dr d\varphi d\theta$$

$$\iiint z \, dV = \iiint r \cos(\theta) r^3 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$$

Obere Halbkugel mit Radius R Halbkugel

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^R dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) \\
 &= 2\pi \frac{1}{4} R^4 \int_0^{\pi/2} d\theta \cos(\theta) \sin(\theta) \\
 &= 2\pi \frac{1}{4} R^4 \left(\frac{1}{2} \sin^2(\theta) \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} R^4
 \end{aligned}$$

2 Die Maxwell'schen Gleichungen für Felder im Vakuum

2.1 Mathematische Form und anschaulicher Inhalt, Kontinuitätsgleichung

2.1.1 Integrale Form

$$\oiint_{\partial V} \vec{E} d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad (1)$$

$$\oint_{\partial A} \vec{E} d\vec{r} = \frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} d\vec{A} \quad (2)$$

$$\oint_{\partial A} \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 \iint_A \vec{j} d\vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \iint_A \vec{E} d\vec{A} \quad (3)$$

$$\oiint_{\partial V} \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad (4)$$

2.1.2 Differentielle Form

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad (6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} \quad (7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (8)$$

- 1) und 5): Gauß'sches Gesetz
 2) und 6): Induktionsgesetz
 3) und 7): Ampere'sches Gesetz
 4) und 8): Namenloses Gesetz

Inhalt:

1. $\underbrace{\rho(\vec{r}, t)}_{\text{Ladungsdichte}}$, $\underbrace{\vec{j}(\vec{r}, t)}_{\text{Stromdichte}}$ vorgegeben \rightarrow Felder $\vec{E}(\vec{r}, t)$; $\vec{B}(\vec{r}, t)$
2. Quellen und Senken von \vec{E} -Feldlinien: ρ
3. Wirbeldichte von \vec{E} ist durch $-\partial_t \vec{B}$ gegeben.
4. \vec{B} hat immer geschlossene Feldlinien
5. Es gibt zwei Ursachen für magnetische Wirbelfelder
 - a) Strom \vec{j}
 - b) Zeitlich Veränderliche \vec{E} Felder (\rightarrow Maxwell'scher Verschiebungsstrom)
6. Wenn ρ und \vec{j} nicht fest vorgegeben sind, benötigt man weitere Gleichungen welche diese Größen mit den Feldern verknüpfen
 Bsp: $\vec{f}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{j}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)$
 Lorentzkraftdichte!

2.1.3 Erhaltung der Ladung

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \partial_t \rho \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial_t \varrho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \tag{9}$$

Dies ist die so genannte Kontinuitätsgleichung!

Integralform:

$$\iiint_V dV \partial_t \varrho + \iiint_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Mit dem Satz von Gauss folgt:

$$\frac{d}{dt} Q + \iint_{\partial V} \vec{j} d\vec{A} = 0 \tag{10}$$

2.2 Zustände, Observablen und Dynamik des EM-Feldes - Teil 1

Zustand: In einem Zustand hat jede Observable (= Physikalische Größe) einen festen Wert.

In Der Elektrodynamik: Ein Zustand des EM Feldes $\hat{=}$ Angabe von $\vec{E}(\vec{r})$ und $\vec{B}(\vec{r})$

System: Die Menge aller Zustände

Prozess: Jeder physikalische Vorgang ist ein Übergang von einem Zustand zu einem anderen.

Vorgänge die stetig in der Zeit sind heißen Prozesse.

Dynamik: Zu jedem Zeitpunkt befindet sich das System in einem bestimmten Zustand, d.h. als

Funktion der Zeit durchläuft das System eine Folge von Zuständen.

(= Dynamik des System)

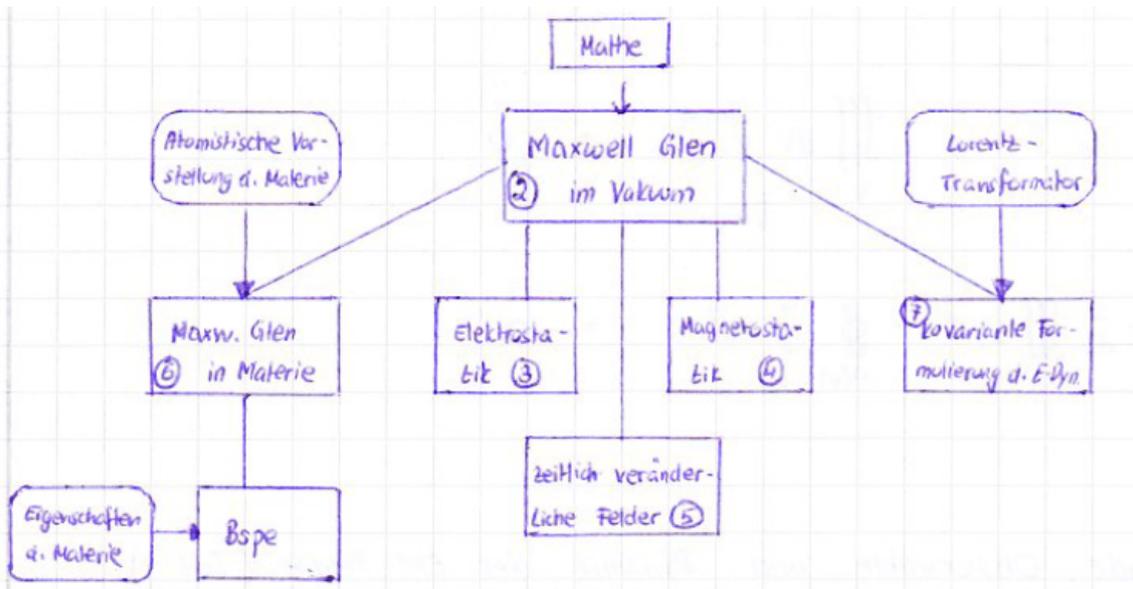
$$\rightarrow t = t_0 : \vec{E}(\vec{r}, t_0), \vec{B}(\vec{r}, t_0)$$

$$t \geq t_0 : \text{Bewegungsgleichungen: } \partial_t \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{j} + \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$$\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

$$\text{Nebenbedingungen: } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$



3 Elektrostatik

3.1 Das elektrische Potential für eine vorgegebene Ladungsverteilung

Es gilt: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, daraus können wir folgern, dass es ein Potential ϕ so gibt, dass sich \vec{E} wie folgt darstellen lässt:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

Außerdem lässt sich die Maxwell'sche Gleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ wie folgt umschreiben:

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Dies ist die so genannte Poisson-Gleichung!

Die homogene Gleichung $\Delta\phi = 0$ nennt man Laplace Gleichung.

Beispiele:

(i) Potentialfeld einer Punktladung im freien Raum:

q : Ladung

\vec{r}_p : Position der Punktladung:

$$\vec{E}_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_p|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_p}{|\vec{r} - \vec{r}_p|}$$

$$\phi_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_p|}$$

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_p)$$

(ii) Potential und Feld einer beliebigen Ladungsdichteverteilung im freien Raum

a)

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{n=1}^N q_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n)$$

$$\rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|}$$

b) Kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \underbrace{\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{G(\vec{r}, \vec{r}')} \rho(\vec{r}') dV' \end{aligned}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

3.2 Lösung der Poisson Gleichung

(Bild fehlt) (Bild fehlt)

3.2.1 Allgemeines Problem der Elektrostatik

(Bild fehlt)

3.2.2 Satz aus der Potentialtheorie:

Bei vorgegebener Ladungsdichteverteilung $\rho(\vec{r})$ sind die Lösungen der Potentialgleichung auf einem Gebiet V eindeutig gegeben durch:

- Die Angabe des Potentials auf dem Rand von V (∂V)
→ Diriclet'sche Randbedingung
- Die Angabe der Normalenableitung $\partial_n \phi = (\vec{\nabla} \phi) \cdot \hat{n}$ auf dem Rand von V
→ Neumann'sche Randbedingung
- Durch eine geeignete Kombination von a) und b) auf dem Rand von V
→ Gemischte Randbedingungen

3.2.3 Typische Randbedingungen

- Fläche mit Ladungsdichte
(Bild fehlt)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \oint_{Dose} \underbrace{\vec{E} d\vec{A}}_{=E_{2,n} \Delta A - E_{1,n} \Delta A} &= \sigma \Delta A \\ \rightarrow E_{2,n} - E_{1,n} &= \sigma \end{aligned}$$

- im Inneren eines Metalls, das sich in einem konstanten elektrischen Feld befindet ist $\vec{E} = 0$, d.h. $\phi = const.$

⇒ eine Metallfläche ist eine Äquipotentialfläche

- geladenes Metall

Auf der Oberfläche gilt: $\vec{E}_{tan} = 0$ und $\vec{E}_{normal} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

3.2.4 Green'sche Integralsätze

- Green'sche Identität:

$$\iiint_V [f(\vec{r})(\Delta g(\vec{r})) + (\vec{\nabla} f(\vec{r})) \cdot (\vec{\nabla} g(\vec{r}))] dV = \oint_{\partial V} f(\vec{r})(\vec{\nabla} g(\vec{r})) dA$$

- Green'sche Identität:

$$\iiint_V [f(\vec{r})(\Delta g(\vec{r})) - g(\vec{r})(\Delta f(\vec{r}))] dV = \oint_{\partial V} [f(\vec{r})(\vec{\nabla} g(\vec{r})) - g(\vec{r})\vec{\nabla} f(\vec{r})] dA$$

3.2.5 Lösungen der DGL mit Randbedingungen

$\nabla \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ mit Randbedingung RB $\nabla G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') + RB$ $\nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$

Wende die Green'sche Identität an:

$$\begin{aligned} &\iiint_V [\phi(\vec{r}') \underbrace{(\Delta' G)}_{-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')} - G \underbrace{(\Delta' \phi(\vec{r}'))}_{-\frac{\rho}{\epsilon_0}}] dV' \\ &= \oint_{\partial V} [\phi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial \phi}{\partial n}] dA \\ \Rightarrow -4\pi\phi(\vec{r}) &= \oint_{\partial V} \phi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n'} dA - \iiint_V G \frac{\rho}{\epsilon} \end{aligned}$$

Fallunterscheidung:

Diriclet'sche GF:

$$\begin{aligned} \Delta G_D(\vec{r}, \vec{r}') &= -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') && \text{in } V \\ G_D(\vec{r}, \vec{r}') &= 0 && \forall \vec{r} \in \partial V \end{aligned}$$

Neumann'sche GF:

$$\Delta G_N(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad \text{in } V$$

$$\frac{\partial G_N}{\partial n} = -\frac{4\pi}{|\partial V|}$$

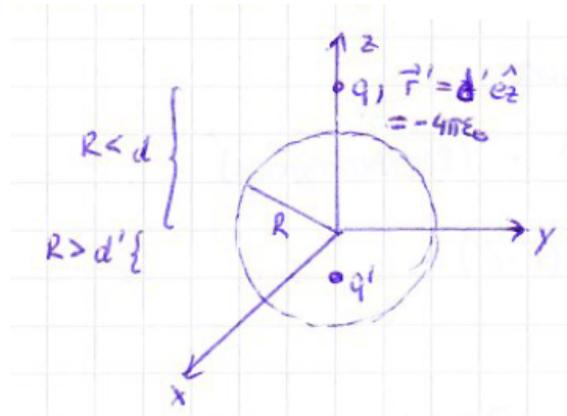
Diriclet Problem:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V G_D(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} \phi(\vec{r}') \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} dA'$$

Neumann Problem:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V G_N(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} \partial_n \phi(\vec{r}') G_N(\vec{r}, \vec{r}') dA' + \underbrace{\frac{1}{|\partial V|} \iint_{\partial V} \phi(\vec{r}') dA'}_{const.}$$

Beispiel: Diriclet Green'sche Funktion für eine metallische Hohlkugel (Methode der Spiegelladungen)



$$V = \mathbb{R}^3 \setminus U_R(0, 0, 0)$$

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{für } |\vec{r}| \rightarrow \infty \\ 0 & \forall |\vec{r}| = R \end{cases}$$

Ansatz: (mit $\Delta F = 0 \forall r \in V$)

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}''|} + F(\vec{r}, \vec{r}') \quad \phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}''|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_0|}$$

mit $\vec{r}'_0 = d' \hat{e}_z$ und $-R < d' < R$. Jetzt ist $\phi(\infty) = 0$ erfüllt. Wir betrachten die zweite Randbedingung um q und q' zu bestimmen:

$$\phi(|\vec{r}| = R) = 0 \rightarrow \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} = -\frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d')^2}}$$

Wir betrachten die folgenden zwei Punkte:

a) $x=0 \ y=0 \ z=+R$ und b) $x=0 \ y=0 \ z=-R$

$$\frac{q}{\sqrt{R^2 \pm 2Rd + d^2}} = -\frac{q'}{\sqrt{R^2 \pm 2Rd' + d'^2}}$$

$$\rightarrow \text{a) } \frac{q}{d - R} = -\frac{q'}{R - d'}$$

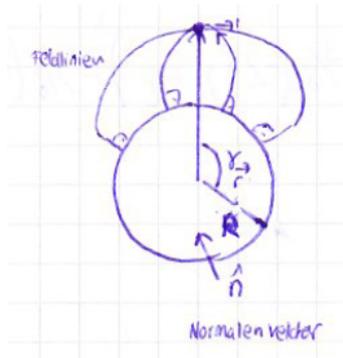
$$\rightarrow b) \frac{q}{d+R} = -\frac{q'}{R+d'}$$

$$\Rightarrow q' = -q \frac{R}{d} \text{ und } d' = -\frac{q'}{q} R = \frac{R^2}{d}$$

Das können wir jetzt oben einsetzen, um die Green'sche Funktion für dieses Problem zu bekommen. Wir eliminieren zusätzlich noch den Vorfaktor durch wählen von $q = 4\pi\epsilon_0$:

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{R}{d} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \frac{R^2}{d})^2}}$$

3.2.6 Induzierte Oberflächenladungsdichte σ



$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{d\phi}{d\hat{n}} \right|_{\vec{r}=\vec{r}_{\text{Metall}}}$$

($\hat{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi$)

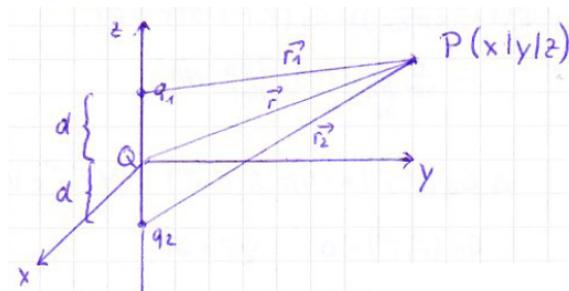
Für eine Hohlkugel:

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi R^2} \frac{R}{r} \frac{1 - \frac{r}{R}}{1 + \frac{R^2}{r^2} - 2\frac{R}{r} \cos(\gamma)}$$

Mit γ = Winkel zwischen \vec{r} und \vec{r}'

3.3 Multipolentwicklung

3.3.1 Einführung



Bedingung: $r \gg 2d$

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right) \\ |\vec{r}_1| &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2} \\ |\vec{r}_2| &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2} \\ |\vec{r}| &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ |\vec{r}_{1/2}| &= \sqrt{r^2 \mp \underbrace{2zd}_{=r \cos(\theta)} + d^2} = r \sqrt{1 \mp \underbrace{\frac{d}{r} \cos(\theta)}_{\ll 1} + \underbrace{\left(\frac{d}{r}\right)^2}_{\ll 1}}\end{aligned}$$

Wir machen eine Taylorentwicklung der Gestalt:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{135}{246}x^3 + \dots$$

Jetzt führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\xi := \cos(\theta) \quad \eta := \frac{d}{r}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow r_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi\eta + \eta^2}} \\ &= 1 - \frac{1}{2}(-2\xi\eta + \eta^2) + \frac{3}{8}(-2\xi\eta + \eta^2)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n P_n \xi\end{aligned}$$

Bei $P_n(\xi)$ handelt es sich um die so genannten Legendre Polynome:

$$\begin{aligned}P_n(\xi) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi^2 - 1)^n & n \geq 1 \\ P_0(\xi) &= 1 \\ P_1(\xi) &= \xi \\ P_2(\xi) &= \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{2} \\ P_3(\xi) &= \frac{5}{2}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi\end{aligned}$$

Mit $q_1 = q = \pm q_2$ folgt für $\phi(\vec{r})$

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi\eta + \eta^2}} \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \xi\eta + \eta^2}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{d}{r}\right)^n P_n(\cos(\theta)) \pm \left(\frac{-d}{r}\right)^n P_n(\cos(\theta)) \right)\end{aligned}$$

a) $q_1 = q = -q_2$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{r}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos(\theta))$$

b) $q_1 = q = q_2$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\cos(\theta))$$

Eigenschaften der Legendre Polynome:

- $P_n(x)$ ist ein Polynom des Grades n
- $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$
- Erfüllen die Legendre'sche DGL: $n(n+1)P_n(x) + \partial_x((1-x^2)\partial_x P_n(x)) = 0$
- $\int_{-1}^1 dx P_n(x) P_m(x) = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}$
- Sie sind vollständig, d.h.:

$\int_{-1}^1 f^2(x) dx < \infty \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$ Also kann jedes Potential ausgedrückt werden als:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_n \phi_n(\vec{r})$$

mit $\phi_n(\vec{r}) = \frac{Q_n}{r^{n+1}} P_n(\cos(\theta))$

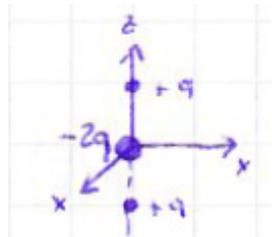
Q_n sind hier die so genannten Multipolmomente. Zum Beispiel:

Monopol: $\phi_0(\vec{r}) = \frac{Q_0}{r}$ in unserem Beispiel: $Q_0 = \begin{cases} 2q & q_1 = q_2 = q \\ 0 & q_1 = -q_2 = q \end{cases}$

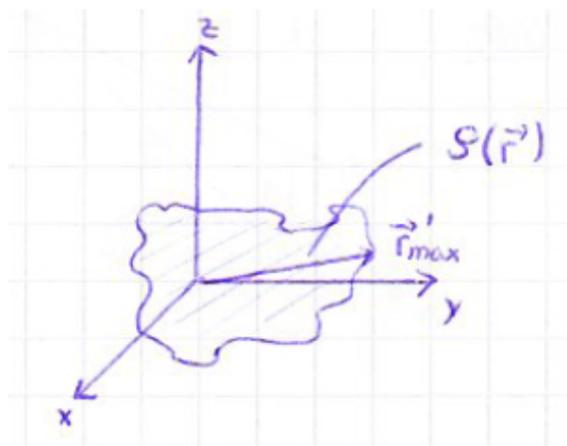
Dipol: $\phi_1(\vec{r}) = \frac{Q_1}{r^2} \cos(\theta)$ in unserem Beispiel: $Q_1 = \begin{cases} 0 & q_1 = q_2 = q \\ 2qd & q_1 = -q_2 = q \end{cases}$

Quadropol: $\phi_2(\vec{r}) = \frac{Q_2}{r^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2(\theta) - \frac{1}{2}\right)$

Beispiel für eine Ladungsverteilung die nur ein reines Quadropolmoment besitzt:



3.3.2 Multipolentwicklung für eine beliebige Ladungsverteilung



$$\begin{aligned} \phi_{\vec{r}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\vec{r}'} \\ &= r \sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{r'}{r}\right)^2}_{\ll 1} - 2 \underbrace{\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \frac{\vec{r}'}{r}}_{\hat{e}_r}} \\ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{r} \left\{ \underbrace{1}_{P_0} + \underbrace{\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^2}}_{P_1} + \underbrace{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \frac{3}{2}\frac{(\vec{r}\vec{r}')^2}{r^4}\right]}_{P_4} + \dots \right\} \\ \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \iiint_V \varrho(\vec{r}') dV' + \frac{q}{r^2} \iiint_V \varrho(\vec{r}') \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r} dV' + \dots \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q^{(0)}}{r} + \frac{\sum_{i=1}^3 Q_i^{(1)} x_i}{r^3} + \frac{1}{r^5} \frac{3}{2} \sum_{i,k} Q_{i,k}^{(2)} x_i x_k + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^{(0)} &= \iiint_V \varrho(\vec{r}') dV' \\ Q_i^{(1)} &= \iiint_V \varrho(\vec{r}') x'_i dV' \\ Q_{i,k}^{(2)} &= \iiint_V \varrho(\vec{r}') \left[x'_i x'_k - \frac{1}{3}(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) \delta_{ik} \right] dV' \end{aligned}$$

Für den Quadropoltensor $Q_{i,k}^{(2)}$ gilt:

- Symmetrisch: $Q_{ik} = Q_{ki}$
- Spurlos: $Tr\{Q_{iu}\} = 0$

→ 5 unabhängige Komponenten

3.3.3 Multipolentwicklung und Kugelflächenfunktionen

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_r}{r^{n+1}} P_n \cos(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_m q_{n,m} \phi_{n,m}(\vec{r})$$

Ansatz: $\phi_{n,m}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^{n+1}} \underbrace{Y_{n,m}(\theta, \phi)}_{\Delta\left(\frac{1}{r^{n+1}} Y_{n,m}\right) \stackrel{!}{=} 0}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_r \underbrace{\left(r^2 \partial_r \phi_{n,m} \right)}_{r^2(-n-1) \frac{1}{r^{n+2}}} + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \partial_\theta (\sin(\theta) \partial_\theta \phi_{n,m}) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \partial_\phi^2 \phi_{n,m} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \underbrace{(n+1)n \frac{1}{r^{n+1}}}_{(n+1)n \frac{1}{r^{n+1}}} & \\ \frac{1}{\sin(\theta)} \partial_\theta (\sin(\theta) \partial_\theta Y_{n,m}) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \partial_\phi^2 Y_{n,m} + n(n+1) Y_{n,m} &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Ansatz: $Y_{n,m} = T(\theta)F(\phi)$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\sin(\theta)}{T(\theta)} \partial_\theta(\sin(\theta))T(\theta) + n(n+1) \sin^2(\theta)}_{-Konstante} + \underbrace{\frac{1}{F(\phi)} \partial_\phi^2 F(\phi)}_{+Konstante} \stackrel{!}{=} 0$$

Ansatz: $F(\phi) = e^{im\phi}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $F(\phi) = F(\phi + 2\pi)$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{1}{F(\phi)} \partial_\phi^2 F(\phi) &= -m^2 \\ \rightarrow \sin(\theta) \partial_\theta(\sin(\theta) \partial_\theta T) + (n(n+1) \sin^2(\theta) - m^2)T &= 0 \end{aligned}$$

Für $m = 0$ ergibt sich jetzt: $T(\theta) = P_n(\cos(\theta))$

Für allgemeine m gilt:

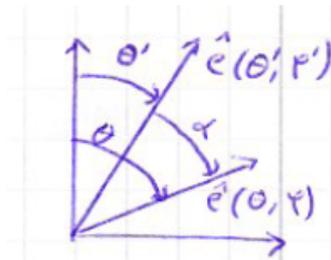
$$\begin{aligned} T(\theta) &= \sin^{|m|}(\theta) P_n^m(\cos(\theta)) \\ P_n^m(x) &= d_x^{|m|} P_n(x) \end{aligned}$$

Wobei P_n^m die so genannten assoziierten Legendre Polynome sind.

Kugelflächenfunktionen:

$$Y_{n,m}(\theta, \phi) = \begin{cases} (-1)^m : m \geq 0 \\ 1 : m < 0 \end{cases} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} \sin^{|m|}(\theta) P_n^{(|m|)}(\cos(\theta)) e^{im\phi}$$

Eigenschaften:



1.

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta Y_{n,m}^1 Y_{n',m'}^2 = \delta_{n,n'} \delta_{m,m'}$$

2.

$$P_n(\cos(\alpha)) = \frac{4\pi}{2^{n+1}} \sum_{m=-n}^n Y_{n,m}^1(\theta', \phi') Y_{n,m}^2(\theta, \phi)$$

3.

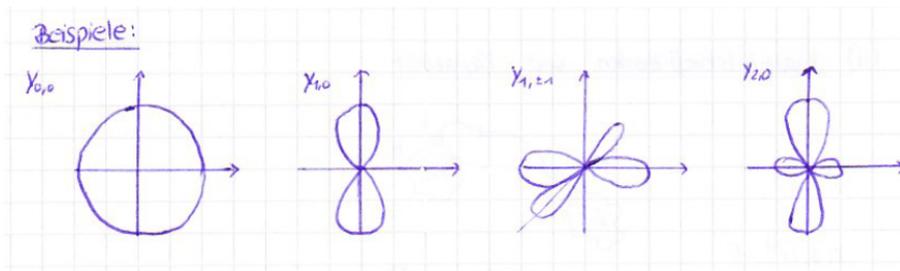
$$\begin{aligned} \underbrace{f(\theta, \phi)}_{\text{beliebige Funktion}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_{n,m} Y_{n,m}^2(\theta, \phi) \\ f_{n,m} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta Y_{n,m}^1(\theta, \phi) f(\theta, \phi) \end{aligned}$$

Anmerkung: (mit $\alpha =$ Winkel zwischen \vec{r} und \vec{r}')

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2 \frac{r-r'}{r^2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n \cos(\alpha)$$

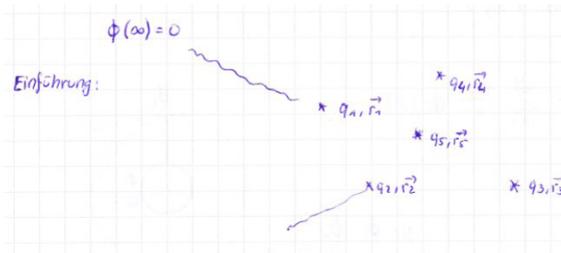
Für das Potential $\phi(\vec{r})$ gilt jetzt also:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{q_{n,m}}{r^{n+1}} Y_{n,m}(\theta, \phi) \\ q_{n,m} &= \frac{4\pi}{2n+1} \iiint_V \rho(\vec{r}') (r')^n Y_{n,m}^*(\theta', \phi') (r')^2 \sin(\theta') dr' d\theta' d\phi' \end{aligned}$$



3.4 Energie einer Ladungsverteilung und Arbeit W

3.4.1 Punktladungen

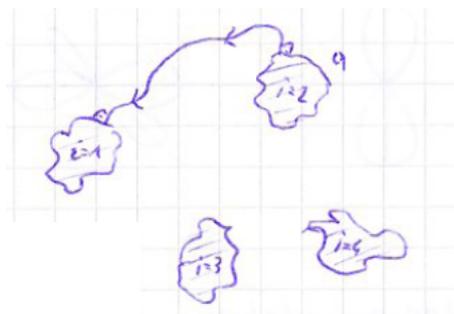


Ladung	von ∞ nach	Erforderliche Arbeit
q_1	\vec{r}_1	$W_1 = 0$
q_2	\vec{r}_2	$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{ \vec{r}_1 - \vec{r}_2 }$
q_3	\vec{r}_3	$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{ \vec{r}_1 - \vec{r}_3 } + \frac{q_2}{ \vec{r}_2 - \vec{r}_3 } \right) q_3$

Für q_N gilt:

$$W_{ges} = \sum_{m=2}^N \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_m q_n}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|} = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N}_{n \neq m} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_m q_n}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|}$$

3.4.2 Kapazitätskoeffizienten und Kapazität



Wir betrachten Systeme von Leitern

$$\Delta\phi(\vec{r}) = 0 \quad \forall \vec{r} \text{ zwischen den Leitern } i = 1, \dots, N$$

$$\text{auf dem Leiter } j \begin{cases} \phi_i(\vec{r}) = \gamma_{ij} = \text{const.} \\ -\epsilon \iint_{A_j} \vec{\nabla} \phi_i d\vec{A} = q \delta_{ij} \end{cases} \Rightarrow \phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{q} \phi_i(\vec{r})$$

Allgemeiner Fall: Ladung Q_j auf Leiter j

$$\forall r \text{ auf Leiter } j \begin{cases} \phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{q} \gamma_{ij} = \text{const} =: \phi_j \\ Q_j = -\epsilon_0 \iint_{A_j} \vec{\nabla} \phi d\vec{A} = -\epsilon \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{q} \iint_{A_j} \vec{\nabla} \phi_i d\vec{A} \end{cases}$$

→ Diriclet Problem, hat eindeutige Lösung ϕ
 → Q_i sind durch die Vorgabe der ϕ_j eindeutig festgelegt.

$$\Rightarrow Q_i = \sum_{j=1}^n \underbrace{\tilde{C}_{ij}}_{\text{Kapazitätskoeffizienten}} \phi_j$$

\tilde{C}_{ij} sind nur von der Geometrie abhängig.

Es gilt: $\tilde{C}_{ij} = \tilde{C}_{ji}$

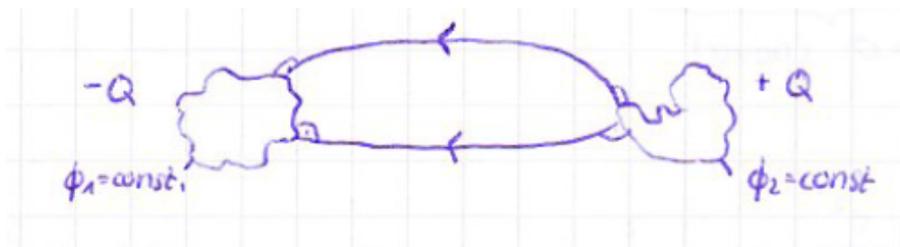
Für einen Leiter: $Q = \tilde{C} \phi$

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{C}_{ij} \phi_i \phi_j$$

3.4.3 Kondensator und Kapazität

Ein System zweier voneinander isolierter Leiter, die ungleichnamige Ladungen gleicher Menge tragen heißt Kondensator. Die Potentialdifferenz $U = \phi_2 - \phi_1$ zwischen dem Leiter positiver und negativer Ladung heißt Spannung.

$$U = \phi_2 - \phi_1 = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} \vec{\nabla} \phi d\vec{r} = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} dr \quad \left(\begin{array}{l} r_1 \text{ auf Leiter 1} \\ r_2 \text{ auf Leiter 2} \end{array} \right)$$



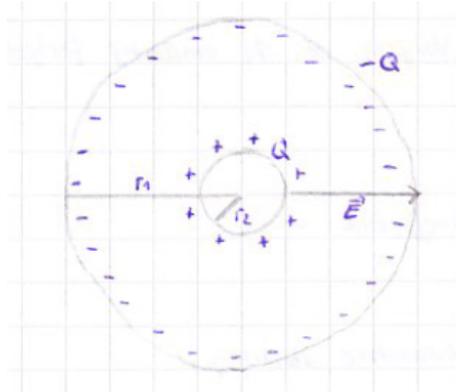
$$\begin{aligned} -Q &= \tilde{C}_{11} \phi_{11} + \tilde{C}_{12} \phi_1 \\ Q &= \tilde{C}_{21} \phi_{21} + \tilde{C}_{22} \phi_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi_1 = -\frac{\tilde{C}_{12} + \tilde{C}_{22}}{\tilde{C}_{11} \tilde{C}_{22} - \tilde{C}_{12}^2} Q \text{ und } \phi_2 = \frac{\tilde{C}_{11} + \tilde{C}_{12}}{\tilde{C}_{11} \tilde{C}_{22} - \tilde{C}_{12}^2} Q$$

$$\Rightarrow U = \frac{\tilde{C}_{11} + 2\tilde{C}_{12} + \tilde{C}_{22}}{\tilde{C}_{11} \tilde{C}_{22} - \tilde{C}_{12}^2} Q$$

$$C := \frac{Q}{U} = \frac{\tilde{C}_{11} \tilde{C}_{22} - \tilde{C}_{12}^2}{\tilde{C}_{11} + 2\tilde{C}_{12} + \tilde{C}_{22}}$$

Beispiel: Kugelkondensator



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{e}_r$$

$$U = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}$$

3.4.4 Energie Kontinuierlicher Ladungs bzw. Feldverteilungen

Punktladungen:

$$W = \sum_{m=1}^N \frac{1}{2} q_m \tilde{\phi}(\vec{r}_m) \qquad \tilde{\phi}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \iint_N \phi(\vec{r}) \underbrace{\rho(\vec{r})}_{-\epsilon_0 \Delta \phi} dV(*) \qquad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Nebenrechnung: $\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \phi) = \underbrace{\vec{\nabla} \phi}_{-\vec{E}} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \phi}_{-\vec{E}} + \phi \Delta \phi$

$$\phi \Delta \phi = \vec{\nabla}(\phi \vec{\nabla} \phi) - \vec{E}^2 = \vec{\nabla}(\phi \cdot (-\vec{E})) - \vec{E}^2$$

$$(*) \rightarrow W = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \underbrace{\iiint_V \vec{\nabla}(\phi \vec{E}) dV}_0 + \frac{1}{2} \epsilon_0 \underbrace{\iiint_V \vec{E}^2 dV}_{\text{divergiert}} \geq 0$$

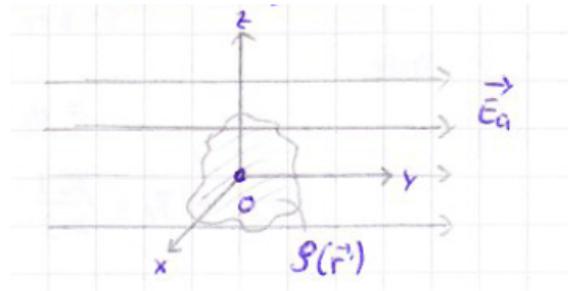
$$W_e \stackrel{!}{=} m_e c^2 \propto \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_e} = m_e c^2 \rightarrow r_e \approx \underbrace{2,8 \cdot 10^{-15} m}_{\text{klassischer Elektronenradius}}$$

Dadurch ergibt sich jetzt also:

Energiedichte: $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2$

Gesamtenergie: $W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_V \vec{E}^2 dV'$

Betrachte eine Ladungsverteilung im äußeren Feld $\vec{E}_a(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi_a(\vec{r})$



$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(\vec{r}') \phi(\vec{r}') dV'$
 Taylorentwicklung:

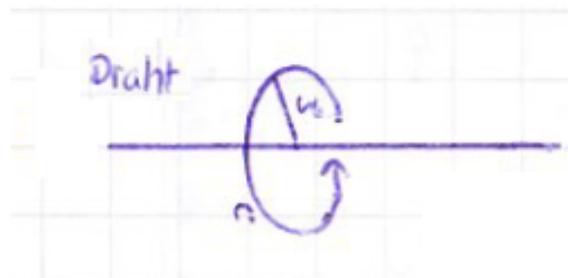
$$\begin{aligned} \phi_a(\vec{r}) &\approx \phi_a(0) \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} \phi_a \Big|_0 x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \partial_{x_i} \partial_{x_j} \phi_a \Big|_0 x_i x_j \\ \rightarrow W &\approx \frac{1}{2} \phi_a(0) \underbrace{\iiint_V \rho(\vec{r}') dV'}_{Q_0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} \phi_a \Big|_0 \underbrace{\iiint_V \rho(\vec{r}') x'_i dV'}_{Q_i} \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \partial_{x_i} \partial_{x_j} \phi_a \Big|_0 \underbrace{\iiint_V \rho(\vec{r}') x'_i x'_j dV'}_{Q_{ij}} \\ \rightarrow W &= \frac{1}{2} Q_0 \phi_a(0) - \frac{1}{2} \vec{E}_a(0) \vec{P} + \dots \\ \vec{F}(\vec{R}) &= -\vec{\nabla}_R W(\vec{R}) \end{aligned}$$

4 Magnetostatik

4.1 Das Vektorpotential

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Beispiel: Stromdurchflossener Leiter



$$\begin{aligned} \vec{j} &= I \delta(x) \delta(y) \hat{e}_z \\ \oint_C \vec{B} d\vec{r} &\stackrel{\vec{B}=B_\varphi \hat{e}_\varphi}{=} B_\varphi \underbrace{\oint_C d\vec{r}}_{2\pi\rho} = \mu_0 I \rightarrow B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \end{aligned}$$

Aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ folgt: Es gibt ein \vec{A} , genannt Vektorpotential, mit:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Diese Gleichung würde sich jetzt für $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ sehr vereinfachen. Wir versuchen also so eine Eichtransformation durchzuführen, dass dies grade der Fall ist. Da \vec{B} durch ein Kreuzprodukt gewonnen wird können wir zu \vec{A} den Gradienten einer beliebigen Funktion dazu addieren da die Rotation eines Gradienten immer null ist: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Lambda) = 0$

Eichtransformation: $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r})$ mit $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}'$

Annahme:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \neq 0$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' \stackrel{!}{=} 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \Delta \Lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \Delta \Lambda = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'$$

Dadurch vereinfacht sich die Magnetostatik effektiv auf die folgenden zwei Gleichungen:

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Jetzt lässt sich \vec{A} in Integraler Form darstellen:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Wenn man jetzt Rotation auf diese Gleichung anwendet findet man das Biot-Savart Gesetz:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{(\vec{r}' - \vec{r}) \times \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

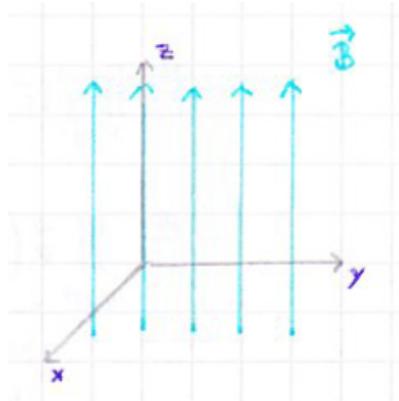
4.1.1 Magnetostatisches Analogon zum idealen Leiter der Elektrostatik

Supraleiter: $\hat{n} \cdot \vec{B} = 0$ und $\hat{n} \times \vec{B} = \vec{j}_{\text{Oberfl.}}$



4.2 Beispiele für Vektorpotentiale

4.2.1 homogenes Magnetfeld



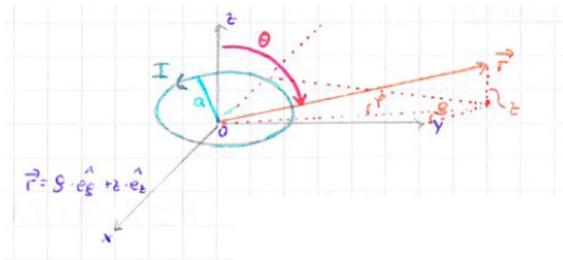
$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{A} = \begin{pmatrix} -By \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{\nabla}(-Bxy)$$

$$\text{c) } \vec{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}By \\ \frac{1}{2}Bx \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ By \\ 0 \end{pmatrix} \vec{\nabla}(-\frac{1}{2}Bxy)$$

4.2.2 Vektorpotential und Magnetfeld eines Kreisförmigen Linienstroms



$$\vec{j} = I \hat{e}_\varphi \delta(\rho - a) \delta(z)$$

Für das Vektorpotential ergibt sich jetzt also:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{I \hat{e}_\varphi' \delta(\rho' - a) \delta(z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Nützliche Identitäten für diese Rechnung:

$$\begin{aligned}
 \vec{A} &= A_\rho \hat{e}_\rho + A_\varphi \hat{e}_\varphi + A_z \hat{e}_z \\
 \hat{e}_\rho &= \cos(\varphi) \hat{e}_x + \sin(\varphi) \hat{e}_y \\
 \hat{e}_\varphi &= -\sin(\varphi) \hat{e}_x + \cos(\varphi) \hat{e}_y \\
 \hat{e}_z &= \hat{e}_z \\
 \hat{e}_\rho \hat{e}_{\rho'} &= \hat{e}_\varphi \hat{e}_{\varphi'} = \cos(\varphi - \varphi') = \cos(\varphi' - \varphi) \\
 \hat{e}_\rho \hat{e}_{\varphi'} &= \sin(\varphi - \varphi') \\
 |\rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z - a \hat{e}_{\rho'}| &= \sqrt{(\rho \hat{e}_\rho - a \hat{e}_{\rho'})^2 + 2z \hat{e}_z (\rho \hat{e}_\rho - a \hat{e}_{\rho'}) + z^2} \\
 &= \sqrt{\rho^2 + a^2 + 2\rho a \hat{e}_\rho \hat{e}_{\rho'} + z^2} \\
 &= \sqrt{\rho^2 + a^2 + 2\rho a \cos(\varphi - \varphi') + z^2} \\
 &= \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin(\theta) \cos(\varphi - \varphi')} \\
 \int_0^{2\pi} d\varphi' \cos(\varphi - \varphi') &\rightarrow 2 \int_0^\pi d\varphi' \cos(\varphi')
 \end{aligned}$$

Damit lässt sich das gesuchte Vektorpotential dann wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
 A_\rho = \hat{e}_\rho &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\hat{e}_\rho \hat{e}_{\rho'}}{|\rho \hat{e}_\rho - z \hat{e}_z - \rho' + \hat{e}_{\varphi'}|} \\
 A_\rho &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sqrt{z^2 + \rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \varphi')}} = 0 \quad (2\pi \text{ periodisch}) \\
 A_\varphi &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\cos(\varphi - \varphi')}{\sqrt{z^2 + \rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \varphi')}} \\
 A_\varphi &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\pi d\varphi' \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt{z^2 + \rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \varphi')}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Definition: } \alpha := \frac{\varphi'}{2} \rightarrow \cos(\varphi') = \cos(2\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1$$

$$\begin{aligned}
 0 < \alpha < 2\pi \quad k^2 &:= \frac{4ar \sin(\theta)}{r^2 + a^2 + 2ar \sin(\theta)} \\
 &\rightarrow r^2 + a^2 - 2ar \sin(\theta) \cos(\varphi') = (r^2 + a^2 + 2ar \sin(\theta))(1 - k^2 \cos^2(\alpha)) \\
 &\rightarrow A_\varphi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \sin(\theta)}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \frac{2 \cos^2(\alpha) - 1}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2(\alpha)}}
 \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt nur den Integralausdruck und führen die folgende Substitution durch:

$$\omega := (a - \frac{\pi}{2}) \rightarrow \cos(\alpha) = -\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\sin(\omega)$$

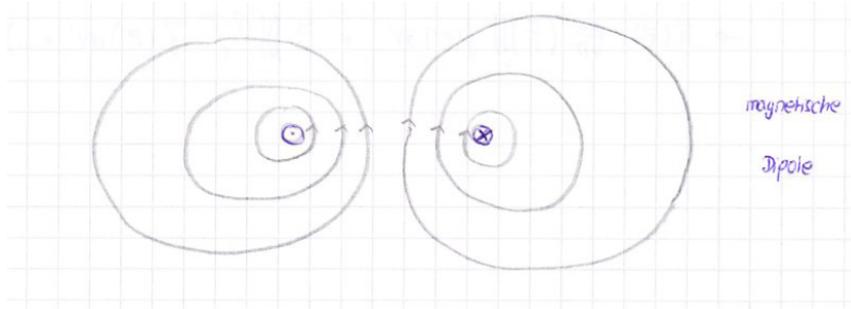
$$\begin{aligned}
 &\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\omega \frac{2 \sin^2(\omega) - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\omega)}} \\
 &= \frac{2 - k^2}{k^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\omega \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\omega)}} - \frac{2}{k^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\omega \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\omega)}
 \end{aligned}$$

Dadurch ergeben sich jetzt die , analytisch nicht lösbaren, vollständigen elliptischen Integrale:

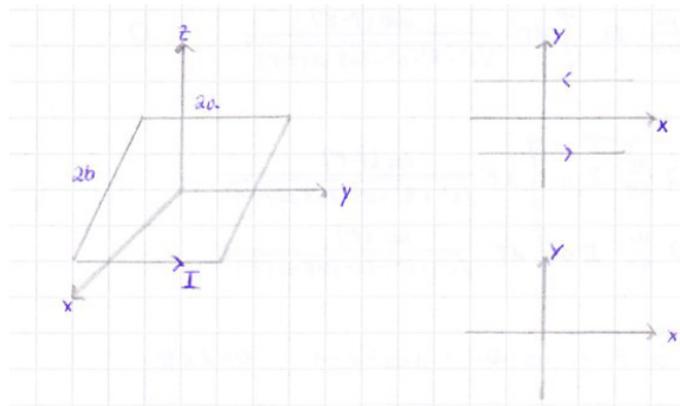
$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\omega)}} d\omega$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\omega)} d\omega$$

$$\Rightarrow \vec{A} = A_\varphi \hat{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I a}{k^2 2\pi \sqrt{\arcsin(\theta)}} [(2 - k^2)K(k) - 2kE(k)]$$



4.2.3 Rechteckige Leiterschleife



Analogon: Magnetisches Dipolmoment: $m = -2a \cdot 2b \cdot I$

$$\Delta A_z = 0 \rightarrow A_z = 0$$

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4aby}{r^3}$$

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4abx}{r^3}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Das Vektorpotential entspricht näherungsweise einem magnetischen Dipol mit dem Dipolmoment:

$$\vec{m} = 4 \underbrace{a \cdot b}_{\text{Fläche}} I \hat{e}_z$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

Verallgemeinerung:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) dV \stackrel{\text{Schleife}}{=} \frac{1}{2} I \int_C \vec{r} \times d\vec{r}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5} \right)$$

4.3 Multipolentwicklung des Magnetfelds

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^2} + \left[\frac{3}{2} \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^4} - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right] + \dots \right]$$

$$\rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\underbrace{\frac{1}{r} \iiint_V \vec{j}(\vec{r}') dV'}_{\stackrel{!}{=0}} + \frac{1}{r^2} \iiint_V \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r} \vec{j}(\vec{r}') dV' + \dots \right)$$

a) Integrationsgebiet V kann so gewählt werden, dass $\vec{j} = 0$ auf ∂V , das nennt man dann eine geschlossene Stromverteilung

b) $\vec{\nabla}' \cdot (x_i \vec{j}(\vec{r}')) = \vec{j}_i(\vec{r}') + x_i \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}')$

Mit dem Satz von Gauß folgt:

$$\iiint_V \vec{\nabla}' \cdot (x_i \vec{j}(\vec{r}')) dV' = \oint_{\partial V} x_i \vec{j}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = 0$$

$$0 = \underbrace{\iiint_V \vec{j}_i(\vec{r}') dV'}_{=0(\text{Monopoltheorem})} + \underbrace{\iiint_V x_i \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') dV'}_{=0(\text{Kontinuitätsgleichung})}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} + \dots$$

c)

$$\iiint_V \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r} \vec{j}(\vec{r}') dV' = \iiint_V (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) \times \frac{\vec{r}}{r} dV' + \iiint_V \frac{\vec{r}\vec{j}(\vec{r}')}{r} \cdot \vec{r} dV'$$

Verwende $a = b = \frac{1}{2}(a + b)$

$$\Rightarrow \iiint_V \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r} \vec{j}(\vec{r}') dV' = \frac{1}{2} \underbrace{\iiint_V dV' \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r} \vec{j}(\vec{r}') + \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}') \right) \vec{r}}_{\stackrel{!}{=0}} + \frac{1}{2} \iiint_V dV' (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) \times \frac{\vec{r}}{r}$$

Beachte: $\vec{\nabla}' \cdot (x'_i x'_k \vec{j}(\vec{r}')) = x'_i j'_k(\vec{r}') + x'_k j'_i(\vec{r}') + x'_i x'_k \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}')$

Zusammenfassung des Ergebnisses:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5} \right) \quad \vec{m} = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) dV$$

Dieses Ergebnis ist konsistent mit dem von der rechteckigen Leiterschleife.

4.3.1 Kraftwirkung und Drehimpuls

Erinnerung an die Elektrostatik: Kraft und Energie

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}_{\vec{R}} W = Q^{(0)} \vec{E}(\vec{R}) + \vec{\nabla}_{\vec{R}} (\vec{P} \cdot \vec{E}(\vec{R}) + \dots)$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \varrho(\vec{r}') \phi(\vec{r}') dV' = Q^{(0)} \phi(\vec{R}) + \sum_i P_i \frac{\partial \phi(\vec{R})}{\partial x_i}$$

Magnetostatik: Kraftwirkung auf eine Stromverteilung im äußeren Feld:

$$\vec{F}(\vec{R}) = \dots = \vec{\nabla}_{\vec{R}} (\vec{m} \cdot B_a(\vec{R}))$$

Zusammenhang zwischen dem Magnetischen Moment einer Stromverteilung und dem Gesamtdrehimpuls ihrer Ladungsträger:

Bewegte Punktladungen:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$$m = \frac{1}{2} \sum_i q_i \iiint_V \vec{r}' \times \vec{v}_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) dV'$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \frac{q_i}{m_i} \vec{r}_i \times \underbrace{\vec{v}_i \cdot m_i}_{=\vec{p}_i}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \frac{q_i}{m_i} \vec{L}_i$$

Wenn jetzt zusätzlich noch $\frac{q_1}{m_1} = \frac{q_2}{m_2} = \dots = \frac{q}{m_q}$ für alle Ladungen, dann:

$$\vec{m} = \frac{q}{2m_q} \cdot \vec{L} \qquad \vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$

4.4 Energie einer Stromverteilung

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_{V=\mathbb{R}^3} \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) dV = \iiint_{V=\mathbb{R}^3} \underbrace{\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}}_{\text{Energiedichte des magnetischen Feldes}} dV$$

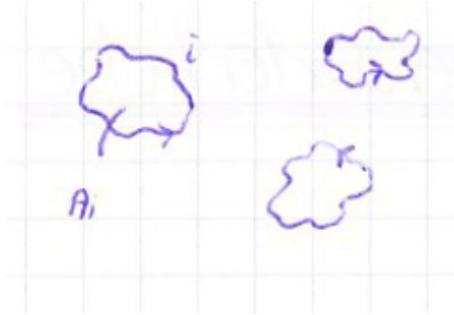
$$= \frac{1}{2} \iiint_{V=\mathbb{R}^3} \vec{j} \cdot \vec{A} dV = \frac{\mu_0}{8\pi} \iiint_{V=\mathbb{R}^3} \left[\iiint_{V=\mathbb{R}^3} \frac{\vec{j}(\vec{r}) \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right] dV$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{V=\mathbb{R}^3} \vec{A}(\vec{r}') \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) dV + \frac{1}{2} \iiint_{V=\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A}(\vec{r}) \times \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}) \right) dV \quad (1)$$

Das Integral (1) wird null, da gilt $\vec{A} \times \vec{B} \propto \frac{1}{r^3}$. Mann kann es jetzt mit dem Satz von Gauß in ein Flächenintegral umwandeln kann, dadurch steigt die Ordnung auf $\frac{1}{r}$, die im Unendlichen gegen Null konvergiert.

Mit $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b})$ folgt:

$$\Rightarrow W_M = \frac{1}{2} \iiint_{V=\mathbb{R}^3} \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})) dV = \iiint_{V=\mathbb{R}^3} \frac{\vec{B}^2(\vec{r})}{2\mu_0} dV$$



$$L_i := \iint_{A_i} \gamma \vec{j}(\vec{r}) dA_i$$

Wir definieren jetzt die Einheitsstromdichte $\vec{i}_k(\vec{r}) = \frac{\vec{j}_k(\vec{r})}{I_k}$
 (beachte $L = \text{Induktivität} \neq \text{Drehimpuls}$)

$$\vec{i}_k(\vec{r}) = \frac{\vec{j}_k(\vec{r})}{I_k}$$

$$W_n = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k$$

Induktivität $\rightarrow L_{ik} = L_{ki} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_i} \iiint_{V_k} \frac{i_i(\vec{r}_i) \cdot i_k(\vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV_i dV_k$

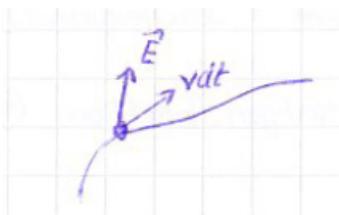
L_{ii} ist der so genannte Selbstinduktionskoeffizient
 L_{ik} mit $i \neq k$ Koeffizienten der Wechselseitigen Induktion (Gegeninduktivitäten)

5 Zeitlich veränderliche Felder

5.1 Zustände, Observablen und Dynamik des Elektrischen Feldes Teil 2 Energie, Impuls und deren Ströme

Energie und Energiestrom des EM-Feldes

Plausibilitätsüberlegung:



$$dW = \underbrace{q\vec{E}}_{\vec{F}} d\vec{r} \frac{dt}{dt} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}') \rightarrow \frac{dW}{dt} = q\vec{E}\vec{v} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\rightarrow \frac{dW}{dt} = \iiint_V \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) dV$$

Mit

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \partial_t \vec{E}$$

erhält man also

$$\iiint_V \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(\nabla \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E}(\partial_t \vec{E}) dV$$

Weiterhin gilt

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B}(\nabla \times \vec{E}) + \vec{E}(\nabla \times \vec{B})$$

Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \iiint_V \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \underbrace{(\nabla \times \vec{E})}_{=-\partial_t \vec{B}} - \epsilon_0 \underbrace{\vec{E} \partial_t \vec{E}}_{\frac{1}{2} \partial_t (\vec{E}^2)} - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) dV \\ &= - \iiint_V \partial_t \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) dV \end{aligned}$$

Das Magnetische Feld leistet keine Arbeit

$$W = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \vec{v} dt = q(\vec{E} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{B}}_{=0}) \vec{v} dt$$

$$\rightarrow \partial_t w(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$$

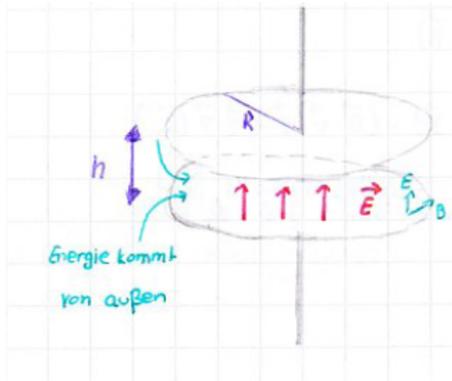
mit der Energiedichte

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

und der Energiestromdichte (Poynting-Vektor)

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

Beispiel: Energiestrom beim langsamen Aufladen eines Plattenkondensators



$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 \rightarrow U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 \pi R^2 \cdot h$$

$$\frac{dU}{dt} = \epsilon_0 \vec{E}(t) \partial_t \vec{E}(t) \pi R^2 h$$

Der Energiestrom durch die Mantelfläche ist gegeben durch $|\vec{S}| \cdot 2\pi R \cdot h$ Für das Magnetfeld gilt:

$$\oint_C \frac{1}{\mu_0} \vec{B} d\vec{r} = \partial_t \epsilon_0 \iint_{A(C)} \vec{E} d\vec{A}$$

mit

$$\iint_A \nabla \times \vec{B} d\vec{A} = \iint_A (\mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}) d\vec{A}$$

wobei $\vec{j} d\vec{A} \approx 0$ gilt, da sich der Kondensator langsam aufladen soll.

$$\xrightarrow{\text{Satz von Stokes}} \iint_{A(C)} \nabla \times \vec{B} d\vec{A} = \oint_C \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \iint \vec{E} d\vec{A}$$

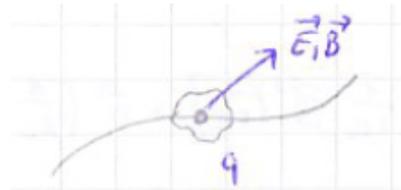
$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_0} |\vec{B}| 2\pi R = \epsilon_0 |\partial_t \vec{E}| \pi R^2$$

$$\rightarrow |S| = \frac{1}{\mu_0} |\vec{E}| |\vec{B}| = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}| |\partial_t \vec{E}| R$$

Somit wird der Energiestrom

$$|\vec{S}| \cdot 2\pi R \cdot h = \pi R^2 h \epsilon_0 |\vec{E}| |\partial_t \vec{E}|$$

Impuls und Impulsstrom des EM-Feldes



Allgemein gilt für den mechanischen Impuls

$$\frac{d}{dt} \vec{P}_{mech} = F(\vec{t}) = \iiint_V \vec{f}(t) dV$$

In der Elektrodynamik ist \vec{f} dann die Lorentzkraftdichte

$$\rho(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \qquad \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \partial_t \vec{E}$$

$$\vec{B} \times \partial_t \vec{E} = -\partial(\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times \partial_t \underbrace{\vec{B}}_{(-\nabla \times \vec{E})}$$

Nun wird eine Null addiert: $\vec{B}(\nabla \cdot \vec{B}) \frac{1}{\mu_0}$. Hiermit ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{P}_{mech} + \iiint \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) dV \right)$$

$$= \iiint \left[\epsilon_0 \vec{E} (\nabla \cdot \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} (\nabla \cdot \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \right] dV$$

Nun benötigen wir folgende Nebenrechnung:

$$\frac{1}{2} \nabla (\vec{B})^2 = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})$$

$$\rightarrow \vec{B} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) = \vec{B} (\nabla \cdot \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \frac{1}{2} \nabla (\vec{B}^2) =: \nabla (\vec{B} : \vec{B} - \frac{1}{2} \vec{B}^2) \mathcal{K}$$

Hierbei ist $(\vec{B} : \vec{B})_{ik} = B_i B_k$ das dyadische Produkt.

Wir definieren

$$\nabla T|_k = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}$$

Hierbei ist T der Maxwell'sche Spannungstensor. Dieser hat folgende Eigenschaften:

$$T = \epsilon_0 \vec{E} : \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} : \vec{B} - \frac{1}{2} (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2) \cdot \mathcal{K}$$

$$T_{ik} = \epsilon_0 E_i E_k + \frac{1}{\mu_0} B_i B_k - w(\vec{r}, t) \delta_{ik}$$

Setzt man diese Definition und die Nebenrechnung in den Obigen Ausdruck ein, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[P_{mech}^{\vec{r}} + \iiint_V \vec{p}(\vec{r}, t) dV \right] = \iiint_V \nabla \cdot T dV = \oint_{A(V)} T d\vec{A}$$

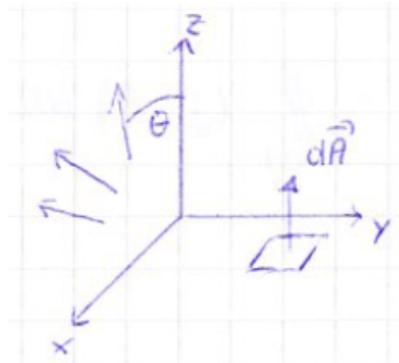
Mit der Impulsdichte

$$\vec{p}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \left[\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] = \frac{1}{c^2} \vec{S}(\vec{r}, t)$$

somit ergibt sich für die Lorentzkraftdichte

$$-\vec{f} = \partial_t \vec{p}(\vec{r}, t) + \nabla \cdot (-T) = -(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})$$

5.1.1 Beispiel 1: Elektrostatisches Feld mit Feldlinien parallel zur x-z-Ebene



$$\vec{E} = |\vec{E}(\vec{r})| \begin{pmatrix} \sin(\theta(\vec{r})) \\ 0 \\ \cos(\theta(\vec{r})) \end{pmatrix}$$

Der Maxwell'sche Spannungstensor ist hier also

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\epsilon_0(E_x^2 - E_z^2) & 0 & \epsilon_0 E_x E_z \\ 0 & -\frac{1}{2}(E_x^2 + E_z^2) & 0 \\ \epsilon_0 E_x E_z & 0 & \frac{1}{2}\epsilon_0(E_z^2 - E_x^2) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} |\vec{E}(\vec{r}, t)| \begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & 0 & \sin(2\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(2\theta) & 0 & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

Hiermit wird die Kraft auf $d\vec{A}$:

$$d\vec{F} = (T \hat{n}) dA \quad \hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow d\vec{F} = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}^2| \begin{pmatrix} \sin(2\theta) \\ 0 \\ \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

Spezialfälle:

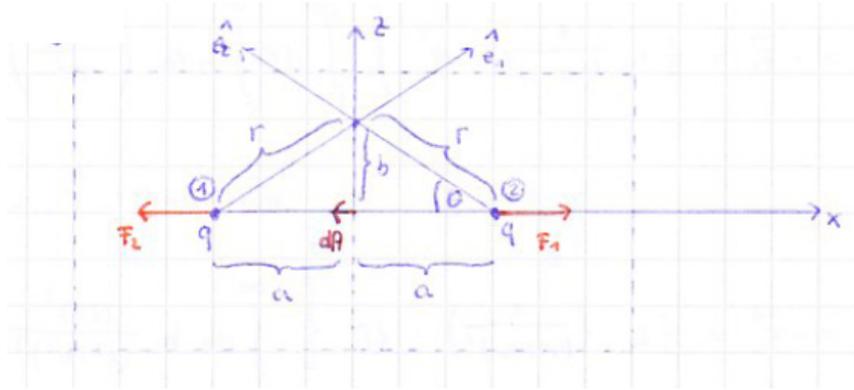
•

$$\theta = 0 \quad d\vec{F} = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}^2| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dA$$

•

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad d\vec{F} = -\frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}^2| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dA$$

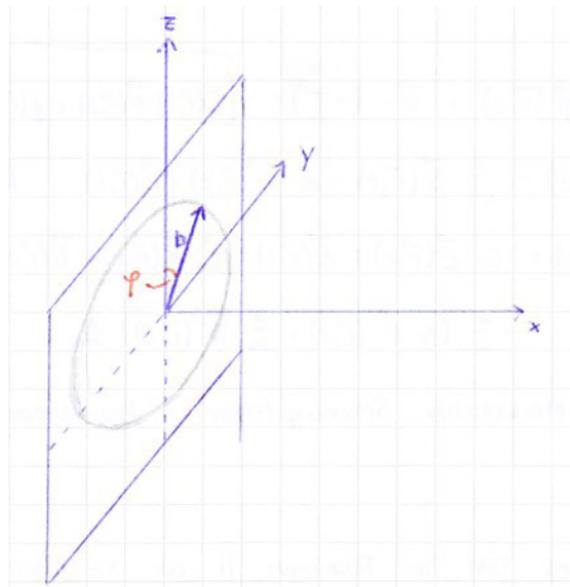
5.1.2 Beispiel 2: 2 Punktladungen



Wir befinden uns in der y-z-Ebene. Es gelten:

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{P}_{mech} + \iiint_V \vec{p}(\vec{r}, t) dV \right) = \oiint_{A(V)} (T \hat{n}) dA$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \underbrace{(\hat{e}_1 + \hat{e}_2)}_{2 \sin \theta \cdot \hat{e}_z} \quad \text{auf der z-Achse}$$



Weiterhin erhält man

$$(T \cdot \hat{n}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}(0, y, z)|^2 \hat{e}_x$$

mit

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_y^2 + E_z^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\epsilon_0(E_y^2 - E_z^2) & \epsilon_0 E_y E_z \\ 0 & \epsilon_0 E_y E_z & \frac{1}{2}(E_z^2 - E_y^2) \end{pmatrix} \hat{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hiermit erhalten wir \vec{F}_2 :

$$\vec{F}_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dy dz \left(-\frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 \right) \right) \hat{e}_x = -\vec{F}_1$$

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty b db \left(\frac{2 \sin \theta}{r^2} \right)^2 \right] \hat{e}_x$$

Wir verwenden $\sin \theta = \frac{b}{r}$ und $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, und erhalten

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} 2\pi \underbrace{\left[\int_0^\infty db \cdot b \frac{(2b)^2}{a^2 + b^2} \right]}_{\frac{4}{2a^2}} \hat{e}_x$$

5.2 Die Ausbreitung Elektromagnetischer Wellen im Vakuum

Im Vakuum gilt $\rho = 0$; $\vec{j} = \vec{0}$. Damit lassen sich die Maxwellgleichungen schreiben als

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E}$$

Wendet man nun ein zweites Mal die Rotation an, ergibt sich

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\partial_t (\nabla \times \vec{B}) = -\partial_t (\mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E})$$

Man erhält

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 \vec{E} = 0 \qquad \Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 \vec{B}$$

Dies sind Wellengleichungen. Wellengleichungen haben allgemein die Form

$$\Delta \Psi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Psi(\vec{r}, t) = 0$$

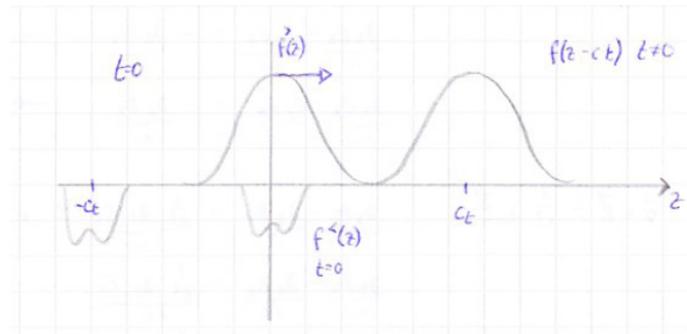
In der Elektrodynamik ist $\Psi \in B_x, B_y, B_z, E_x, E_y, E_z$. In einer Raumdimension entspricht dies:

$$\Delta \Psi(z, t) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Psi(z, t) = 0$$

Die allgemeine Lösung einer Wellengleichung ist gegeben durch

$$\Psi(z, t) = f^<(z - ct) + f^>(z + ct) = 0$$

Hierbei ist $f^{>/<}(x)$ eine zweifach differenzierbare Funktion.



c ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von $f(z \pm ct)$. " $>$ " entspricht einer Ausbreitung nach links, einer Ausbreitung nach rechts. Eine Spezielle Funktion für $\Psi(z, t) = f^<(z - ct)$ ist $\cos(kz - \omega t)$. Hierbei ist $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$. Es ist

$$\cos(kz - \omega t) = \text{Re} \left[e^{i(kz - \omega t)} \right]$$

Diese Funktion beschreibt eine monochromatische (zeitharmonische) Welle

$$\Psi(z, t) = \text{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{i(kz - \omega t)} \right]_{k = \frac{\omega}{c}}$$

Mit der Inversen Fourier-Transformation erhält man A(k) als

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \Psi(z, t = 0) e^{-ikz}$$



Für eine Ausbreitung in x-Richtung erhält man:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x - ct) \qquad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(x - ct)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \partial_x E_x(x - ct) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow E_x(x - ct) = \text{const.} = E_x^0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \partial_x B_x(x - ct) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow B_x(x - ct) = \text{const.} = B_x^0$$

Nun verwenden wir die anderen beiden Maxwellgleichungen:

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

- $\partial_y E_z - \partial_z E_y = -\partial_t B_x = 0$ (stimmt, da $\partial_t B_x = \partial_x \text{const.} = 0$)
- $\underbrace{\partial_z E_x}_{=0} - \underbrace{\partial_x E_z}_{\neq 0} = \underbrace{-\partial_t B_y}_{\neq 0} \rightarrow \partial_x E_z = -\partial_t B_y$
- $\partial_x E_y - \underbrace{\partial_y E_x}_{=0} = -\partial_t B_z \rightarrow \partial_x E_y = -\partial_t B_z$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$$

- $\underbrace{\partial_y B_z}_{=0} - \underbrace{\partial_z B_y}_{=0} = \frac{1}{c^2} \underbrace{\partial_t E_x}_{=0}$
- $\underbrace{\partial_z B_x}_{=0} - \underbrace{\partial_x B_z}_{\neq 0} = \frac{1}{c^2} \partial_t E_y \rightarrow \partial_x B_z = -\frac{1}{c^2} \partial_t E_y$
- $\partial_x B_y - \underbrace{\partial_y B_x}_{=0} = \frac{1}{c^2} \partial_t E_z \rightarrow \partial_x B_y = \frac{1}{c^2} \partial_t E_z$

Hiermit erhält man für die x-Komponenten

$$E_x(\vec{r}, t) = \text{const.} := 0 \qquad B_x(\vec{r}, t) = \text{const.} := 0$$

Für die y- und z-Komponenten

$$\partial_x E_z = \partial_t B_y \rightarrow E'_z(\xi) \stackrel{!}{=} -c \cdot B'_y(\xi)$$

$$\partial_x E_y = \partial_t B_z \rightarrow E'_y(\xi) \stackrel{!}{=} c \cdot B'_z(\xi)$$

$$\partial_x B_z = -\frac{1}{c^2} \partial_t E_y \rightarrow B'_z(\xi) = \frac{1}{c} E'_y(\xi)$$

$$\partial_x B_y = \frac{1}{c^2} \partial_t E_z \rightarrow B'_y(\xi) = -\frac{1}{c} E'_z(\xi)$$

mit $\xi = x - ct$ Es gibt 2 transversale Polarisationen:

•

$$B_y(x - ct) = -\frac{1}{c} E_z(x - ct)$$

•

$$B_z(x - ct) = \frac{1}{c} E_y(x - ct)$$

Betrachtet man nun eine Welle, die sich in positive x-Richtung ausbreitet und für die $\vec{E} \parallel y$ -Achse ist $\Rightarrow E_x = E_z = B_x = B_y = 0$

$$E_y(\vec{r}, t) = f(x - ct) = E_0 \cos(kx - \omega t) = \text{Re} \left[e^{i(kx - \omega t)} \right] \quad E_0 \in \mathbb{R}$$

$$B_z(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} f(x - ct) \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t) \quad k = \frac{\omega}{c}$$

Energiedichte

$$w(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

zeitlicher Mittelwert:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt w(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

Energiestromdichte

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos^2(kx - \omega t) \hat{e}_x = c\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \hat{e}_x$$

zeitlicher Mittelwert:

$$\langle \vec{S} \rangle = c \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \right) \hat{e}_x$$

Impulsdichte:

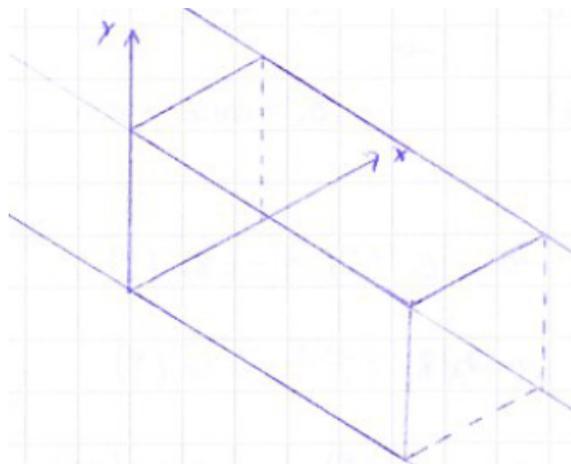
$$\vec{p}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \frac{1}{c} w(\vec{r}, t) \hat{e}_x$$

Die relativistische Energie ist gegeben durch.

$$E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (cp)^2}$$

Damit diese zu den obigen Gleichungen passt muss $m_0 c^2 = 0$ gelten

5.3 Wellen in Hohlleitern



\vec{E} und \vec{B} seien Lösungen der Wellengleichung.
 $\vec{E}_{\text{tangential}} = \vec{B}_{\text{normal}} = \vec{0}$ auf Mantelflächen.
 Für jede Feldkomponente gilt der Ansatz

$$\Psi(\vec{r}, t) = \tilde{\Psi}(x, y) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\rightarrow \Delta \Psi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Psi(\vec{r}, t) = 0$$

Wir machen den Separationsansatz $\tilde{\Psi} = f(x)g(y)$ und erhalten

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) \tilde{\Psi} + \left(\frac{\omega}{c} - k\right)^2 \tilde{\Psi} = 0$$

$$\underbrace{\frac{f''(x)}{f(x)}}_{:=-\varkappa^2} + \underbrace{\frac{g''(y)}{g(y)}}_{:=-\theta^2} + \left(\frac{\omega}{c} - k\right)^2 = 0$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Relation $k = \frac{\omega}{c}$. Diese ist die Dispersionsrelation im Vakuum.
 Hier haben wir eine Dispersionsrelation $\omega(k)$ mit zugehörigen Modenprofil.
 Wir haben die folgenden Randbedingungen (wegen Metallflächen)

$$E_{\text{tangential}} = B_{\text{normal}} = 0 \quad \text{auf den Randflächen}$$

Jede der Komponenten von \vec{E} und \vec{B} hat die Form: $\Psi(\vec{r}, t) = \tilde{\Psi}(x, y) e^{i(kz - \omega t)}$

$$\rightarrow \Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Psi = 0$$

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) \tilde{\Psi}(x, y) + \left(\frac{\omega}{c} - k\right)^2 \tilde{\Psi}(x, y) = 0 \quad \text{im Folgenden: } \tilde{\Psi} := \Psi$$

Hier machen wir wieder den Separationsansatz: $\Psi(x, y) = f(x)g(y)$ und erhalten

$$\underbrace{\frac{f''(x)}{f(x)}}_{-\varkappa^2} + \underbrace{\frac{g''(y)}{g(y)}}_{-\theta^2} + \left(\frac{\omega}{c} - k\right)^2 = 0 \quad \forall x, y$$

Hierbei sind $\frac{f''}{f}$ und $\frac{g''}{g}$ jeweils konstant.

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\varkappa^2 f(x) & g''(y) &= -\theta^2 g(y) \\ f(x) &= \alpha_1 \sin(\varkappa x) + \alpha_2 \cos(\varkappa x) & g(y) &= \alpha_3 \sin(\theta y) + \alpha_4 \cos(\theta y) \\ \Rightarrow \frac{\omega}{c} &= \sqrt{k^2 + \theta^2 + \varkappa^2} \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Komponenten von E:

$$\begin{aligned} E_x(\vec{r}, t) &= (\alpha_1 \sin(\varkappa x) \alpha_2 \cos(\varkappa x)) (\alpha_3 \sin(\theta y) + \alpha_4 \sin(\theta y)) e^{i(kz - \omega t)} \\ E_y(\vec{r}, t) &= (\beta_1 \sin(\varkappa x) \beta_2 \cos(\varkappa x)) (\beta_3 \sin(\theta y) + \beta_4 \sin(\theta y)) e^{i(kz - \omega t)} \\ E_z(\vec{r}, t) &= (\gamma_1 \sin(\varkappa x) \gamma_2 \cos(\varkappa x)) (\gamma_3 \sin(\theta y) + \gamma_4 \sin(\theta y)) e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Randbedingungen

$$\begin{aligned} x = 0, y \text{ beliebig} & \Rightarrow E_y \stackrel{!}{=} 0; E_z \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0 \\ x = a, y \text{ beliebig} & \Rightarrow E_y \stackrel{!}{=} 0; E_z \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \sin(\varkappa a) = 0 \rightarrow \varkappa = \varkappa_n = \frac{n\pi}{a} \\ y = 0, x \text{ beliebig} & \Rightarrow E_x \stackrel{!}{=} 0; E_z \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \alpha_4 = 0; \gamma_4 = 0 \\ y = b, x \text{ beliebig} & \Rightarrow E_x \stackrel{!}{=} 0; E_z \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \sin(\theta b) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \theta = \theta_m = \frac{m\pi}{b} \end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Maxwell-Gleichungen.

$\nabla \cdot \vec{E} \stackrel{!}{=} 0$ bedeutet mit den obigen Relationen

$$\begin{aligned} & \varkappa (\alpha_1 \cos(\varkappa x) - \alpha_2 \sin(\varkappa x)) e^{i(kz-\omega t)} \\ & + \beta_1 \sin(\varkappa x) \cdot \theta (\beta_3 \cos(\theta y)) e^{i(kz-\omega t)} \\ & + \gamma_1 \sin(\varkappa x) \gamma_3 \sin(\theta y) \cdot ik e^{i(kz-\omega t)} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Nun sortieren wir die Gleichung nach den Vorfaktoren von $\sin(\varkappa x) \sin(\theta y)$ oder den cos-Termen. Diese Vorfaktoren müssen unabhängig voneinander 0 werden. Wir erhalten also

$$-\varkappa \alpha_2 \alpha_3 - \theta \beta_1 \beta_4 + ik \gamma_1 \gamma_3 = 0 \qquad \alpha_1 = 1 \beta_3 = 0$$

Ein analoges Vorgehen für die drei übrigen Maxwell-Gleichungen ($\nabla \cdot \vec{B} = 0$; $\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$; $\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$) führt auf folgendes Ergebnis:

- $$E_x(\vec{r}, t) = \alpha \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) e^{i(kz-\omega t)}$$
- $$B_x(\vec{r}, t) = \frac{\alpha'}{c} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i(kz-\omega t)}$$
- $$E_y(\vec{r}, t) = \beta \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i(kz-\omega t)}$$
- $$B_y(\vec{r}, t) = \frac{\beta'}{c} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i(kz-\omega t)}$$
- $$E_z(\vec{r}, t) = \gamma \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i(kz-\omega t)}$$
- $$B_z(\vec{r}, t) = \frac{\gamma'}{c} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i(kz-\omega t)}$$

Hierbei sind die Faktoren gegeben durch

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{n\pi}{a} k \delta - \frac{m\pi}{b} \frac{\omega}{c} \delta' & \alpha' &= \frac{m\pi}{b} \frac{\omega}{c} \delta - \frac{n\pi}{a} k \delta' \\ \beta &= \frac{m\pi}{b} k \delta - \frac{n\pi}{a} \delta' & \beta' &= \frac{n\pi}{a} \frac{\omega}{c} \delta - \frac{m\pi}{b} k \delta' \\ \gamma &= i \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \delta & \gamma' &= i \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \delta' \end{aligned}$$

Hierbei sind δ und δ' freie Konstanten (hier können Anfangsbedingungen eingesetzt werden). Es gilt:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \qquad n, m = 0, 1$$

Achtung: $n=m=0$ ist nicht erlaubt!

Spezialfälle

- TE-Welle (Transversal-Elektrisch): $\delta = 0, \delta' \neq 0$

$$\rightarrow E_z = 0 \quad B_z \neq 0$$

- TM-Welle (Transversal-Magnetisch): $\delta \neq 0, \delta' = 0$

$$\rightarrow E_z \neq 0 \quad B_z = 0$$

Es gibt eine Grenzfrequenz für die Wellenausbreitung:

$$\omega \geq \omega_{gr} = c \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$$

Für Frequenzen $\omega \leq \omega_{gr}$ gibt es exponentiellen Abfall.

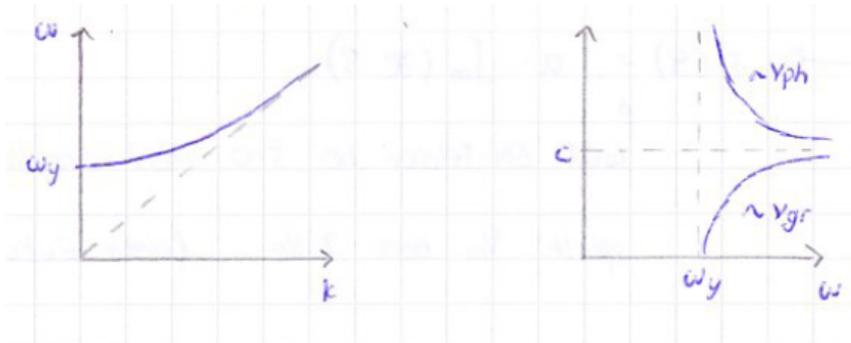
Beispiel: $a \geq b \Rightarrow$ Dann hat die TE-Welle mit $n=1, m=0$ die kleinste Grenzfrequenz. Wir erhalten die folgende Dispersionsrelation:

$$\frac{\omega}{c} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \Leftrightarrow k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}$$

Die zugehörige Phasengeschwindigkeit und die Gruppengeschwindigkeit ist

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} v_{gr} = \partial_k \omega = c \cdot \frac{c}{\omega} \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

$$\rightarrow v_{gr} \cdot v_{ph} = c^2$$



Außerdem erhält man die Energietransportgeschwindigkeit:

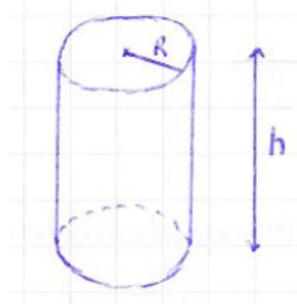
$$v_E = \frac{\langle \vec{S} \rangle}{\langle w_E \rangle}$$

Hierbei ist $\langle \vec{S} \rangle$ das zeitliche und räumliche Mittel der Energiestromdichte und $\langle w_E \rangle$ das zeitliche und räumliche Mittel der Energiedichte.

Alle diese drei Geschwindigkeiten (v_{gr}, v_{ph}, v_E) sind keine "physikalischen" Geschwindigkeiten, d.h. sie können größer als c sein ohne die Relativitätstheorie zu verletzen. Die Physikalische Geschwindigkeit bei der Wellenausbreitung ist die Frontgeschwindigkeit. Setzt man in diese Relationen nun ein, dass für Energie und Impuls eines Photons $E = \hbar\omega$ und $p = \hbar \cdot k$ gelten so erhält man

$$E(p) = \sqrt{c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2} \Leftrightarrow m_0 = \frac{\pi \hbar}{ca}$$

5.4 Resonatoren



$$\Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \psi = 0$$

$$\psi(\rho, \varphi, z, t) = \Psi(\rho, \varphi, z) \cdot e^{-i\omega t}$$

$$\Delta \Psi(\rho, \varphi, z) + \frac{\omega^2}{c^2} \Psi(\rho, \varphi, z) = 0$$

Seperationsansatz: $\Psi = F(\rho)g(\varphi)h(z)$

$$\rightarrow \Psi(\rho, \varphi, z) = F(\rho)e^{im\varphi}e^{ikz}$$

Ausführlicher:

$$\Delta \Psi + \frac{\omega^2}{c^2} \Psi = 0 \qquad \Delta \Psi = \frac{1}{\rho} (\partial_\rho(\rho \partial_\rho \Psi)) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi^2 \Psi + \partial_z^2 \Psi + \frac{\omega^2}{c^2} \Psi = 0$$

$$\frac{1}{\rho} (\partial_\rho(\rho \partial_\rho \Psi)) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi^2 \Psi + \partial_z^2 \Psi + \frac{\omega^2}{c^2} \Psi = 0$$

Seperationsansatz: $\Psi = F(\rho)g(\varphi)h(z)$

$$= \underbrace{\frac{1}{\rho} (\partial_\rho(\rho \partial_\rho \Psi))}_F + \underbrace{\frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi^2 g}_{=const.} + \underbrace{\frac{\partial_z^2 h}{h}}_{=const.} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

Wir wählen jetzt g und h als normierte periodische Funktionen: $g = e^{im\varphi}$; $h = e^{ikz}$ dadurch ergeben sich:

$$\frac{\partial_\varphi^2 g}{g} = -m^2 \qquad \frac{\partial_z^2 h}{h} = -k^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho \partial_\rho F) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) F = 0$$

$$\rightarrow F''(\rho) + \frac{1}{\rho} F'(\rho) + \frac{\chi^2 \rho^2 - m^2}{\rho^2} F(\rho) = 0 \qquad \chi^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$$

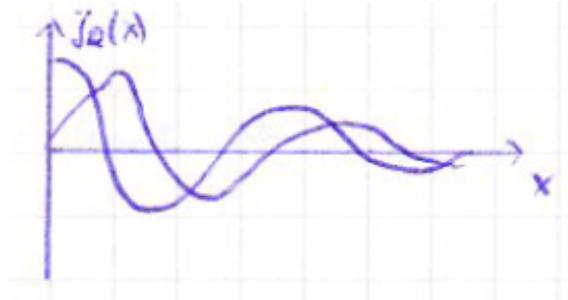
5.4.1 Mathematischer Exkurs: Bessel'sche DGL

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + \frac{x^2 - \alpha^2}{x^2} y(x) = 0$$

Diese DGL besitzt Lösungen der Form:

$$y(x) = a \underbrace{J_\alpha(x)}_{\text{Bessel Fkt}} + b \underbrace{Y_\alpha(x)}_{\text{Neumann Fkt}}$$

$$\begin{aligned}
 J_\alpha(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \alpha + 1)} \left(\frac{1}{2}x\right)^{2k+\alpha} \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\tau \cos(\alpha\tau - x \sin(\tau)) - \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty d\tau e^{-x \sinh(\tau - \alpha\tau)} \\
 &\stackrel{\alpha \in \mathbb{N}_0}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\tau \cos(m\tau x \sin(\tau))
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 x \rightarrow 0 & \quad J_m(x) \approx \frac{x^m}{2^m m!} \quad m \geq 0 \\
 x \rightarrow \infty & \quad J_m(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)
 \end{aligned}$$

Diese Funktionen besitzen abzählbar unendlich viele aber nicht äquidistante Nullstellen
 Rekursion:

$$\begin{aligned}
 J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) &= \frac{2m}{x} J_m(x) \\
 d_x J_m(x) &= -\frac{m}{x} J_m(x) + J_{m-1}(x) \\
 J_{-m}(x) &= J_m(x) \cdot (-1)^m
 \end{aligned}$$

Neumann:

$$\begin{aligned}
 Y_\alpha(x) &= \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)} \\
 Y_m(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow m} Y_\alpha(x) \\
 x \rightarrow 0 : Y_0(x) &\approx \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{x}{2}\right) \\
 Y_m(x) &\approx -\frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m} \quad m \geq 1 \in \mathbb{N} \\
 \Rightarrow F(\rho) &= a J_m(\kappa\rho)
 \end{aligned}$$

Weil EM Felder bei $g = 0$ nicht singular sind spielt $Y_m(\kappa\rho)$ keine Rolle.
 Die anderen zwei Indizes werden durch Randbedingungen gegeben.

5.4.2 Beschränkungen auf einen Schwingungstyp (=Mode)

$$E_\rho = 0; E_\varphi = 0; E_z \neq 0 = \gamma J_m(\kappa_m \rho) e^{im\varphi} e^{ikz} e^{-i\omega t}$$

(Aus Dgl folgt: $F(\rho) = aJ_m(\kappa\rho) \leftrightarrow$ für jedes m kann κ einen anderen Wert haben.)

Randbedingungen: $E_{tan} = 0$ auf Metallflächen.

Boden: $z = 0$, Deckel: $z = h \} E_\rho \stackrel{!}{=} 0, E_\varphi \stackrel{!}{=} 0$

Mantelfläche, $\rho = R \rightarrow E_\varphi \stackrel{!}{=} 0, E_z \stackrel{!}{=} 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow J_m(\kappa_m R) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Rightarrow \kappa_m^{(n)} = \frac{x_m^{(n)}}{R} \\ &\Rightarrow \kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \end{aligned}$$

$x_m^{(n)}$ ist die n -te Nullstelle von J_m . Wir betrachten die Maxwell-Gleichungen um die elektromagnetischen Felder weiter einzuschränken:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 &\rightarrow \partial_z E_z = ikE_z = 0 \rightarrow k = 0 \rightarrow \kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} &\rightarrow \underbrace{\partial_t B_\rho}_{-i\omega B_\rho} = \frac{1}{\rho} \partial_\varphi E_z \rightarrow B_\rho = \gamma \frac{m}{\omega \rho} J_m(\kappa_m \rho) e^{im\varphi} e^{-i\omega t} \\ \underbrace{\partial_t B_\varphi}_{-i\omega B_\varphi} = \partial_\rho E_z &\rightarrow B_\varphi = \gamma Im(\kappa_m^{(n)} \rho) \kappa_m^{(n)} e^{im\varphi} \cdot \frac{-1}{i\omega} e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Damit sind auch $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E}$ und $vec \nabla \cdot \vec{B} = 0$ erfüllt.

Ergebnis:

$$\begin{aligned} E_\rho = 0 & \quad B_\rho = \gamma \frac{m}{\omega \rho} J_m(\kappa_m \rho) e^{im\varphi} e^{-i\omega t} \\ E_\varphi = 0 & \quad B_\varphi = -\gamma \frac{\kappa_m^{(n)}}{i\omega} \left[J_{m-1}(\kappa_m^{(n)} \rho) - \frac{m}{\kappa_m^{(n)} \rho} J_m(\kappa_m^{(n)} \rho) \right] e^{im\varphi} e^{-i\omega t} \\ E_z = \gamma J_m(\kappa_m \rho) e^{im\varphi} e^{-i\omega t} & \quad B_z = 0 \end{aligned}$$

Mit $\omega = \omega_{m,n} = c \frac{x_m^{(n)}}{R}$ und $m \in \mathbb{N}_0; n \in \mathbb{N}$. Der dritte Index wird durch die Bedingungen $k = 0$ gegeben.

Allgemein gilt nun:

$$\omega_{m,n,l} = c \sqrt{\left(\frac{l\pi}{h}\right)^2 + \left(\frac{x_m^{(n)}}{R}\right)^2} \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

5.5 Zustände, Observablen und Dynamik des EM-Feldes III Skalar und Vektorpotential bewegter Ladungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho(r,t)}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}(t) + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \hookrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} &\Rightarrow \vec{\nabla} \times \underbrace{(\vec{E} + \partial_t \vec{A})}_{-\vec{\nabla} \phi} = 0 \\ &\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \partial_t \vec{A} = \vec{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\Delta\phi - \partial_t(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) &= \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \\ \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} - \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t\phi)}_{\stackrel{!}{=}0} &= -\mu_0\vec{j}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Eichtransformationen lassen \vec{E} und \vec{B} unverändert.

$$\begin{aligned} \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}, t) \\ \phi &\rightarrow \phi' = \phi - \partial_t\Lambda(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden jetzt für die sogenannte Lorenz Eichung entkoppelt:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t\phi &= 0 \\ \Rightarrow \Delta\Lambda - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\Lambda &= 0 \end{aligned}$$

	Felder \vec{E}, \vec{B}	Potentiale ϕ, \vec{A}
Zustand $t = t_0$	$\vec{E}(\vec{r}, t_0), \vec{B}(\vec{r}, t_0)$	$\phi(\vec{r}, t_0), \vec{A}(\vec{r}, t_0)$ und $\partial_t\vec{A}(\vec{r}, t)$ bei $t = t_0$
Observable	$O = O(\vec{E}, \vec{B})$	$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t\vec{A}$
Eichtransformationen		$\phi \rightarrow \phi - \partial_t\Lambda$ $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}, t)$
Spezielle Eichungen		Lorenz Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t\phi = 0$ $\Delta\Lambda - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\Lambda$ Coulomb Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ $\Delta\Lambda$
Dynamik	$\partial_t\vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\partial_t\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$ $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\vec{j}_T = \vec{j} - \epsilon_0\vec{\nabla}(\partial_t\phi)$

5.5.1 Lösungen der inhomogenen Wellengleichung

Wir lösen jetzt die Wellengleichung für Zeitlich veränderliche Felder, diese hängen von der so genannten retardierten Zeit ab. Das heisst, das Feld an einem gewissen Ort zu einer gewissen Zeit hängt von dem Feld zu einer vorhergegangenen Zeit ab, da sich die Information nur mit endlicher Geschwindigkeit durch den Raum bewegt.

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V dV' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{1}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{2}$$

Beweis: Aus der Elektrostatik ist bekannt: $\vec{\Delta}\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta\left(\frac{f(r)}{r}\right) &= \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\frac{f(r)}{r}\right) \\ &= \frac{1}{r^2}\partial_r(r\partial_rf - f(r)) \\ &= \frac{1}{r}(\partial_r^2f) \\ \Rightarrow \Delta\left(\frac{f(r)}{r}\right) &= \frac{1}{r}(\partial_r^2f) - 4\pi f(0)\delta(\vec{r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{\vec{r}}\phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \Delta_{\vec{r}'} \left(\frac{\varrho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) dV' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V dV' \Delta_{\vec{R}} \left(\frac{\varrho(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} \right) \\
\Delta\phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V dV' \left(\underbrace{\frac{1}{R} \partial_R^2 \varrho(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}_{(-\frac{1}{c^2})^2 \partial_t'^2 \varrho(\vec{r}, t)} - 4\pi\varrho(\vec{r}', t)\delta(\vec{R}) \right) \quad (*) \\
-\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V dV' \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{c^2} \right) \underbrace{\partial_t^2 \varrho(\vec{r}, t - \frac{R}{c})}_{\partial_t'^2 \varrho(\vec{r}, t)} \quad (**)
\end{aligned}$$

Addieren jetzt wir jetzt die Gleichungen (*) und (**) so erhalten wir die bekannte Wellengleichung:

$$\Delta\phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi(\vec{r}, t) = \frac{\varrho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}$$

\Rightarrow (1) ist eine Lösung der Wellengleichung.

5.5.2 Beispiel Geladenes, punktförmiges Teilchen mit beliebiger Geschwindigkeit

Das Teilchen bewege sich auf der Bahn: $\vec{R}_0(t)$

Die Ladungsdichte einer Punktladung besteht aus ihrer Ladung sowie der Deltafunktion die ihren Ort angibt:

$$\varrho(\vec{r}, t) = q\delta(\vec{r} - \vec{R}_0(t))$$

Für das Potential folgt jetzt mit Gleichung (1):

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V dV' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\varrho(\vec{r}', t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \delta\left(t' - \left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}_0(t')|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r}-\vec{R}_0(t')|}{c}\right)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Green'sche Funktion der Wellengleichung:

$$G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Um die Potentialgleichung jetzt aufzulösen führen wir die folgende Substitution durch:

$$u(t') = t' - t + \frac{|\vec{r}-\vec{R}_0(t')|}{c}$$

Und benutzen die Identität: $\delta(f(t)) = \frac{1}{|\partial_t f|_{t=t_0}} \delta(t' - f_0)$

Für Integrationselement du folgt dann:

$$\frac{du}{dt'} = 1 - \frac{1}{c} \frac{(\vec{r} - \vec{R}_0(t)) \cdot d\vec{R}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{R}_0(t)| dt'}$$

Damit lässt sich das Integral lösen und wir kommen auf die Gleichung für ϕ :

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}_0(t)| - \frac{\vec{v}(t')}{c}(\vec{r} - \vec{R}_0(t))}$$

Mit den Bezeichnungen:

$$\vec{v}(t') = \frac{d\vec{R}_0(t')}{dt'} \quad t' = t - \underbrace{\frac{|\vec{r} - \vec{R}_0(t)|}{c}}_{f_0} \quad (3)$$

Für den Ladungsstrom ergibt sich:

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{r}, t) &= q \frac{d\vec{R}_0(t)}{dt} \delta(\vec{r} - \vec{R}_0(t)) \\ \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}(t')}{|\vec{r} - \vec{R}_0(t')| - \frac{\vec{v}(t')}{c}(\vec{r} - \vec{R}_0(t'))} \end{aligned}$$

Dies sind jetzt die so genannten Lienard-Wiechert-Potentiale

5.5.3 Beispiel: Gleichförmig bewegte Punktladung:

Bestimmung der Bahnkurve und retardierten Zeit Gegeben: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Mit Gleichung (3) lässt sich jetzt die Retardierte Zeit t' bestimmen.

$$\begin{aligned} t' &= t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{v}t'| \\ (t' - t) &= \frac{1}{c^2} (\vec{r} - \vec{v}t')^2 && t' < t \\ t'^2 \left(x^2 - \frac{v^2}{c^2} \right) - 2t' \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) - \left(\frac{r^2}{c^2} - t^2 \right) &= 0 \\ \Rightarrow t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{1 - \beta^2} \pm \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2} \sqrt{\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

Anmerkung: Nur die Lösung mit Minus ist Physikalisch Sinnvoll, da sich die retardierte Zeit auf einen vergangenen Zeitpunkt beziehen muss.

Finden der Potentiale Wir bestimmen jetzt die benötigten Terme für die Lienard - Wiechert Potentiale

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{(\vec{r} - \vec{v}t')}{c}}_{c(t-t')} - \underbrace{\frac{\vec{v}}{c}(\vec{r} - \vec{v}t')}_{\frac{v}{c}(x-vt')} &= c \left[\left(t - \frac{vx}{c^2} \right) - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) t' \right] \\ &= \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)^2 + y^2 + z^2} && \text{für } v < c \\ \Rightarrow \phi(\vec{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)^2 + y^2 + z^2}} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= q\mu_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{v\hat{e}_x}{\sqrt{\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

Bestimmung der Felder Wir benutzen jetzt die bekannte Relation $\vec{E} = -\vec{\nabla} - \partial_t \vec{A}$ um das \vec{E} Feld zu bestimmen. Dies führt auf:

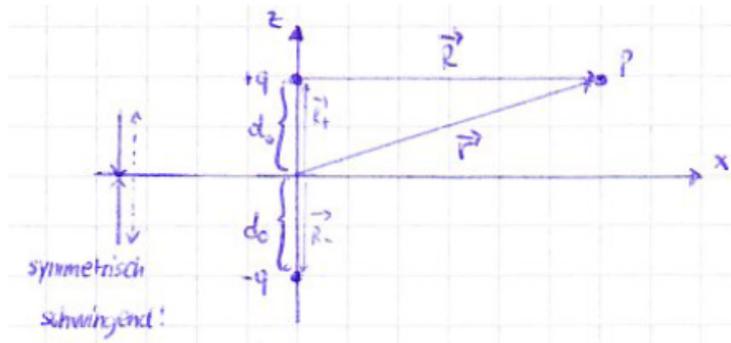
$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{x-vt}{\left[\left(\frac{x-vt}{1-\beta^2}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{y}{\left[\left(\frac{x-vt}{1-\beta^2}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{z}{\left[\left(\frac{x-vt}{1-\beta^2}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Jetzt kann man noch \vec{B} mittels $\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}$ oder $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ herleiten. Dies wird hier aber nicht explizit durchgeführt.

5.5.4 Beispiel: Hetz'scher Dipol



$$P(t) = p(t)\hat{e}_z$$

$$p(t) = qd_0 \sin(\omega t) - q(-d_0) \sin(\omega t)$$

$$= 2qd_0 \sin(\omega t)$$

Annahme:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \gg d_0 \iff \frac{v}{c} \ll 1$$

$$v = \underbrace{\frac{\omega d_0}{2\pi}}_{\text{Geschwindigkeit der Ladung}}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{(+q)\vec{v}'_+(t'_+)}{|\vec{r} - \vec{R}_+(t'_+)| - \frac{\vec{v}'_+(t'_+)}{c}(\vec{r} - \vec{R}_+(t'_+))} + \frac{(-q)\vec{v}'_-(t'_-)}{|\vec{r} - \vec{R}_-(t'_-)| - \frac{\vec{v}'_-(t'_-)}{c}(\vec{r} - \vec{R}_-(t'_-))} \right\}$$

$$\vec{v}'_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v'_+ \end{pmatrix} \quad v'_+ = \partial_{t'_+} z_+(t'_+) = \partial_{t'_+} (d_0 \sin(\omega t))$$

$$\vec{v}'_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v'_- \end{pmatrix} \quad v'_- = \partial_{t'_-} z_-(t'_-) = \partial_{t'_-} (-d_0 \sin(\omega t))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Annahme } t'_\pm &\approx t'_-, \underbrace{|\vec{r} - \vec{R}_\pm|}_{\approx |\vec{r}|} - \underbrace{\frac{\vec{v}_\pm}{c}(\vec{r} - \vec{R}_\pm)}_{\rightarrow 0 \text{ da } v \ll c} \\ |v'_+| &= |v'_-| \\ t_\pm &= t - \frac{|\vec{r} - \vec{R}_\pm(t'_\pm)|}{c} & \Rightarrow t'_\pm = t' = t - \frac{r}{c} \\ \Rightarrow \vec{A} &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial_t \left(\vec{P}(t - \frac{r}{c}) \right)}{r} \end{aligned}$$

Wir überprüfen jetzt die Gültigkeit der Lorentzgleichung: $\partial_t \phi = -c^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

$$\begin{aligned} \partial_t \phi &= -c^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \approx -\frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial_t \vec{P}(t - \frac{r}{c})}{r} \right) \\ \phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{P}(t - \frac{r}{c}) \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{P}'(t - \frac{r}{c})}{cr^2} \right\} \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \phi \\ &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{3(\vec{P} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{P}}{r^5} + \frac{3(\vec{P}' \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{P}'}{cr^4} + \frac{3(\vec{P}'' \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{P}''}{c^2 r^3} \right\} \\ \vec{B}' &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\vec{P}'' \times \vec{r}}{cr^2} + \frac{\vec{P}' \times \vec{r}}{r^3} \right\} \end{aligned}$$

6 Kovariante Formulierung der E-Dynamik

6.1 Der Raum-Zeit Begriff und die Lorentz-Trafo

Bezugssystem \checkmark

Inertialsystem \checkmark

Relativitätsprinzip $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$
 $(\vec{r}, t) \quad (\vec{r}', t')$

System K System K'

Wdh.: Kovariante Formulierung der E-Dynamik

Lorentz-Trafo

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\beta := \frac{v}{c} \quad \beta = \frac{|\vec{v}|}{c} \text{ oder } \pm$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{L_x}} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Allgemein:

$$0 \quad 0 \quad 0$$

$$\underline{L} = \quad D$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_1\gamma & -\beta_2\gamma & -\beta_3\gamma \\ -\beta_x\gamma & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_x^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_y\gamma & (\gamma - 1)\frac{\beta_y\beta_x}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_y^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_z\gamma & (\gamma - 1)\frac{\beta_z\beta_x}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_z\beta_y}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_z^2}{\beta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad \beta = \frac{|\vec{v}|}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$(\) = \underline{\underline{L}} = L'_\mu$$

zwei Ereignisse: "1", "2"

$$\text{in K: } S_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

$$\text{in K': } S'_{12}{}^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2$$

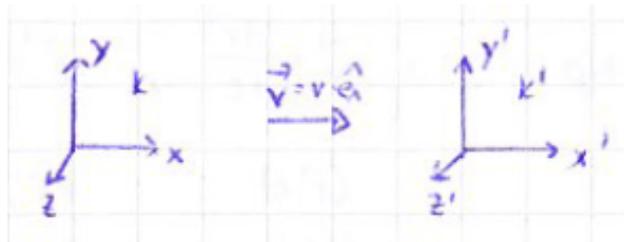
$$S_{12}^2 = S'_{12}{}^2$$

↔ 4-er Abstand der Ereignisse "1" und "2"

Zeitartige Abstände: $S_{12}^2 > 0$

Raumartige Abstände: $S'_{12}{}^2 < 0$

6.2 Vierervektoren, Vierertensoren und Vektoroperationen



Def. Ein Satz von 4 physikalischen Größen, die unter einer Lorentz-Trafo wie (ct, \vec{r}) transformieren, heißt 4-Vektor.

$$a^\mu := (a^0, \vec{a}) = \underbrace{(a^0, a^1, a^2, a^3)}_{=\vec{a}}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

$$(a^0)' = \gamma(a^0 - \beta a^1)$$

$$(a^1)' = \gamma(a^1 - \beta a^0)$$

$$(a^2)' = a^2$$

$$(a^3)' = a^3$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\text{Bsp.: } x^\mu = (ct, \vec{r}) = \underbrace{(x^0)}_{ct}, \underbrace{(x^1)}_x, \underbrace{(x^2)}_y, \underbrace{(x^3)}_z$$

Skalarprodukt: $a \cdot b = a^0 b^0 - \vec{a} \vec{b}$ mit a, b als 4-Vektoren

$$\begin{aligned} \Rightarrow a \cdot b &= a' \cdot b' \\ a \cdot a &= \underbrace{(a^0)^2 - \vec{a}^2}_{>0, <0, =0} \\ a \cdot b &= \sum_{\mu}^3 a^{\mu} \underbrace{\left(\sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} b^{\nu} \right)}_{=b_{\mu}} \\ &= \sum_{\mu=0}^3 a^{\mu} b_{\mu} = a^{\mu} b_{\mu} \end{aligned} \quad g_{\mu\nu} \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a^{\mu} &= (a^0, \vec{a}) && \text{Kovariante 4er - Vektor} \\ a_{\mu} &= (a^0, -\vec{a}) && \text{Kontravariante 4 - Vektor} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a \cdot b &= \sum_{\mu=0}^3 a^{\mu} b_{\mu} = a^{\mu} b_{\mu} \\ &\uparrow \text{Einstein'sche Summenkonvention} \end{aligned}$$

Bsp.:

$$\begin{aligned} a_{\mu} &= g_{\mu\nu} a^{\nu} \\ a^{\mu} &= g^{\mu\nu} a_{\nu} \end{aligned} \quad g^{\mu\nu} = (g^{-1})_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \rightarrow \text{in SRT}$$

$$\rightarrow x^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

$$\begin{aligned} \partial x' f(x, y, z, t) & && x = x(x', y', z', t) \\ &= (\partial_x f) \frac{\partial x}{\partial x'} + (\delta_{ct} f) \frac{\partial(ct)}{\partial x'} && y = y(\dots) \\ &= \gamma(\partial_x + \beta \partial_{ct}) f && z = \dots \\ \uparrow \text{LT entlang der x-Achse} & && t = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial'_x &= \gamma(\partial_x + \beta \partial_{ct}) \\ \partial_{ct'} &= \gamma(\partial_{ct} + \beta \partial_x) \\ \Rightarrow \partial_{\mu} &:= (\frac{1}{c} \partial_t, \vec{\nabla}), \quad \partial^{\mu} := (\frac{1}{c} \partial_t, -\vec{\nabla}) \\ \partial_{\mu} \partial^{\mu} &= \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 \end{aligned}$$

Wdh.:

$$a^{\mu} = (\overbrace{a^0}^{\text{zeitartig}}, \underbrace{a^1, a^2, a^3}_{\vec{a} \rightarrow \text{raumartig}})$$

polarer Vektor \rightarrow $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ \leftarrow axialer Vektor

$$\begin{aligned} a^{\mu} &\text{ kovarianter Vektor} \\ a_{\mu} &\text{ kovarianter Vektor} \\ a_{\mu} &= (a^0, -a^1, -a^2, -a^3) \end{aligned}$$

$$a_\mu = \underbrace{g_{\mu\nu} a^\nu}_{\sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} a^\nu} \qquad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \qquad g^{\mu\nu} = (g^{-1})_{\mu\nu}$$

= g in der SRT
 ≠ g in der ART

$$(x') = L_\mu^\nu x^\nu$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \left(\frac{1}{c} \partial_t, \vec{\nabla}\right) && \text{kontravariante Ableitung} \\ \partial^\mu &= \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\vec{\nabla}\right) && \text{kovariante Ableitung} \end{aligned}$$

$$a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{=a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3} \quad \text{invariant unter LT}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \underbrace{\vec{\nabla}^2}_{=\Delta} = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta = \square$$

6.3 Die Feldgleichung

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} && \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} && \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{\nabla} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi &= 0 && \Delta \phi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{Lorentzgleichung} &&& \Delta \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} - \frac{1}{\epsilon_0 c} \dot{\vec{j}} \end{aligned}$$

- Ladungserhaltung:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= 0 \\ \rightarrow \partial_{(ct)} c \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= 0 \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_{ct} \\ \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}}_{\partial_\mu} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c \rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}}_{j^\mu} = 0 \end{aligned}$$

$$j^\mu := (c \rho, \vec{j})$$

- Lorenz- Eichung

$$\vec{\nabla} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi = 0 \quad \rightarrow \vec{\nabla} \cdot (c\vec{A}) + \partial_{ct} \phi = 0$$

$$\begin{pmatrix} \partial_{ct} \\ \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi \\ cA_x \\ cA_y \\ cA_z \end{pmatrix} = 0$$

$$A^\mu := (\phi, c\vec{A})$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \text{Lorenz - Eichung}$$

- Wellengleichung

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\nu$$

$$\partial_\mu A^\mu = c$$

- $\vec{E} \vec{B}$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}$$

↑ Feldstärketensor

$$\begin{aligned} F^{12} &= \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 \\ &= -\partial_x(cA_y) - (-\partial_y(cA_x)) \\ &= -c(\partial_x A_y - \partial_y A_x) \\ &= -cB_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^{01} &= \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 \\ &= \frac{1}{c} \partial_t(cA_x) - (-\partial_x)\phi \\ &= \partial_t A_x + \partial_x \phi \\ &= -E_x \end{aligned}$$

- Inhomogene Maxwell- Gleichung

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\nu$$

- Homogene Maxwell- Gleichung

$$\text{Dualer Feldstärke- Tensor} \quad \bar{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

$$\partial_\mu \bar{F}^{\mu\nu} = 0$$

$$\epsilon^{0123} = 1$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \mu\nu\rho\sigma \text{ gerade Permutation } 0, 1, 2, 3 \\ -1 & \mu\nu\rho\sigma \text{ ungerade Perm} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{F}^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & -cB_x & -cB_y & -cB_z \\ cB_x & 0 & E_x & -E_y \\ cB_y & -E_z & 0 & E_x \\ cB_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \\
 F_{\rho\sigma} &= g_{\rho\mu} \underbrace{g_{\sigma\nu}}_{g_{\nu\sigma}} F^{\mu\nu} \\
 &= \left[\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \right]_{\rho\sigma} \\
 &\quad \quad \quad \hookrightarrow g_{\rho\mu} \quad \quad \quad g_{\nu\sigma} = g_{\sigma\nu} \leftarrow \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix} \\
 \overline{F}^{01} &= \frac{1}{2} \underbrace{\epsilon^{0123}}_1 \underbrace{F_{23}}_{-cB_x} + \frac{1}{2} \underbrace{\epsilon^{0132}}_{-1} \underbrace{F_{32}}_{cB} = -cB_x
 \end{aligned}$$

Vierervektoren:

$$\begin{aligned}
 A^\mu &= (\phi, c\vec{A}) j^\mu = (c\rho, \vec{j}) \\
 \text{Ladungserhaltung} &\Rightarrow \partial_\mu j^\nu = 0 \\
 \text{Lorentzgleichung} &\Rightarrow \partial_\mu A^\nu = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\partial_{m\mu} \partial^\mu}_{= \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta} A^\mu &= \frac{1}{\epsilon_0 \cdot c} j^\nu
 \end{aligned}$$

Der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ ist definiert als

$$F = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_x \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten den Dualen Feldstärketensor $\overline{F}^{\mu\nu}$ als

$$\overline{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

Die kovariante Darstellung der Maxwellgleichungen sieht dann folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{c} j^\nu && \text{Inhomogene Maxwellgleichungen} \\
 \partial_\mu \overline{F}^{\mu\nu} &= 0 && \text{Homogene Gleichungen}
 \end{aligned}$$

Die physikalischen Größen, die ihre Eigenschaften unter Lorentz-Transformation nicht ändern, nennt man Invarianten. Die Invarianten des EM-Feldes sind:

•

$$\begin{aligned}
 F^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} &= 2(\vec{E}^2 - \frac{\vec{B}^2}{c^2}) \\
 \vec{E} &= \sum_n a_n \phi_n(\vec{r} - \vec{R}_n, t) \\
 S(q) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\mathbb{R}} dV \mathcal{L}(A^\mu, \partial_\nu A^\mu) && \text{analog Hamiltonsches Prinzip}
 \end{aligned}$$

Hierbei gilt die Einsteinsche Summenkonvention: Über doppelte Indices wird summiert. \mathcal{L} ist die Lagrangedichte.

In der Relativistik findet man folgende Schreibweise:

$$S = \iiint dx^\mu \mathcal{L}(A^\mu, \partial_\nu A^\mu)$$

mit

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + A_\nu j^\nu$$

als Lagrangedichte.

•

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} = \vec{E} \vec{B}$$

Wenn wir die Existenz magnetischer Ladung annehmen erhalten wir folgenden Ausdruck für die Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = q_e \vec{E} + q_e \vec{e} \times B + q_m \vec{B} + q_m \vec{v} \times \vec{E}$$

Dies ist ein Problem, da \vec{F} und \vec{E} Polare Vektoren sind, \vec{B} aber ein axialer Vektor. Unter Transformation würde der Term $q_m \vec{B}$ also zu Problemen führen.

→ Die magnetische Ladung müsste ein Pseudoskalar sein (d.h. bei Spiegelung am Koordinatenursprung müsste q_m sein Vrzeichen wechseln)

Lorentz-Kraft in kovariner Formulierung

Wir betrachten eine Punktladung q mit der Ruhemasse m_0 . Ihr Ruhesystem sei K' .

Die Eigenzeit ist gegeben durch

$$\underbrace{d\tau}_{\text{Laborsystem}} = \frac{\overbrace{dt'}^{\text{Ruhesystem}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

In K' gelte:

$$\underbrace{m_0 \partial_{t'} \vec{v}'}_{= \partial_{t'} \vec{p}} = q \vec{E}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Vierergeschwindigkeit des Teilchens:

$$\underbrace{u'^\alpha}_{\text{in } K'} = (c, \vec{0})$$

(Der Nullvektor deswegen weil wir das Ruhesystem des Teilchens betrachten.)

Im allgemeinen System:

$$u^\alpha = \gamma(c, \vec{v})$$

$$\rightarrow u^\alpha u_\alpha = \gamma^2(c^2 - v^2) = \frac{c^2 - v^2}{1 - \beta^2} = c^2$$

rechte Seite:

$$(0, q\vec{E}) = \frac{q}{c} F'^{\mu\nu} c = \frac{q}{c} F'^{\alpha\beta} u_\beta$$

linke Seite:

$$\partial_{t'} u'^\alpha = \left(0, \frac{\partial \vec{v}}{\partial t'} \right)$$

Nebenrechnung:

$$\frac{q}{c} F'^{\alpha\beta} u'_\beta = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_x & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_x \\ E_y & cB_z & 0 & -B_y \\ E_z & -cB_x & cB_y & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{q}{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ qE_x \\ qE_y \\ qE_z \end{pmatrix}$$

$$m_0 \partial_t u^\alpha = \frac{q}{c} F^{\alpha\beta} u_\beta$$

$$\mu = 0 \qquad \partial_t \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = q \vec{E} \vec{v}$$

$$\mu = 1, 2, 3 \qquad \partial_t \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Diese Formulierung ist Kovariant!

$$\xrightarrow{\text{Entwickeln}} \partial_t m_0 \vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

7 Materie im Elektromagnetischen-Feld

Zuvor haben wir nur die Mikroskopischen Maxwell-Gleichungen betrachtet. Diese sind im allgemeinen auch in der Materie gültig, aber in vielen Fällen genügt es über viele Atome zu mitteln. So erhält man die Maxwellgleichungen. Das räumliche Mittel der Felder erhält man durch

$$\vec{E}_{atomar} \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{V_0} = \iiint_{V_0} dV' \vec{E}_{atomar}(\vec{r}')$$

$$\vec{B}_{atomar} \rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{V_0} = \iiint_{V_0} dV' \vec{B}_{atomar}(\vec{r}')$$

Außerdem teilen wir die Ladungsdichte ϱ und die Stromdichte \vec{j} auf in externe Anteile und Anteile der Materie.

$$\varrho = \varrho_{ext} + \varrho_{mat} \qquad \vec{j} = \vec{j}_{ext} + \vec{j}_{mat}$$

Die Materie-Anteile werden nun wie oben gemittelt und willkürlich aufgeteilt.

$$\langle \varrho_{mat} \rangle = \varrho_{frei} + \varrho_{pol} \qquad \langle \vec{j}_{mat} \rangle = \vec{j}_{frei} + \vec{j}_{mag}$$

Hierbei bezeichnet $\varrho_{pol} = -\nabla \cdot \vec{P}$ die Polarisationsladung und \vec{j}_{mag} den Magnetisierungsstrom. Wir erwarten, dass die materiellen, sowie die freien Ladungen und Ströme der Kontinuitätsgleichung genügen.

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho_{frei} + \nabla \cdot \vec{j}_{frei} &= 0 & \partial_t \varrho_{pol} + \nabla \cdot \vec{j}_{mag} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \rightarrow \vec{j} &= \partial_t \vec{P} + \vec{j}'_{mag} & & \vec{j}' \end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir die Makroskopischen Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \text{vec}H &= \vec{j}_{ext} + \vec{j}_{frei} + \partial_t \vec{D} & \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \varrho_{ext} + \varrho_{frei} \end{aligned}$$

Hierbei gilt

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Aufteilung $q_{mat} = q_{frei} + q_{pol}$, etc. vollkommen willkürlich gemacht wurde. Die erlaubten Eichungen sind:

$$\begin{aligned} \vec{P} \rightarrow \vec{P}' &= \vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{N} & \implies \vec{D} \rightarrow \vec{D}' &= \vec{D} + \vec{\nabla} \times \vec{N} \\ \vec{M} \rightarrow \vec{M}' &= \vec{M} - \partial_t \vec{N} & \implies \vec{H} \rightarrow \vec{H}' &= \vec{H} + \partial_t \vec{N} \end{aligned}$$

Häufig schreibt man

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \epsilon_0 \chi_e \vec{E} & \vec{M} &= \mu_0 \chi_m \vec{H} \\ \implies \vec{D} &= \epsilon_0 \underbrace{(1 + \chi_e)}_{\epsilon} \vec{E} & \vec{B} &= \mu_0 \underbrace{(1 + \chi_m)}_{\mu} \vec{H} \end{aligned}$$

Ein einfaches Modell ist das "Drude-Modell" freier Elektronen:

$$m(d_t^2 + \frac{1}{\tau} d_t) \vec{r} = -e \vec{E}(t)$$

Dieses Problem kann man auf zwei Arten betrachten: Entweder man betrachtet die Polarisation und erhält eine elektrische Suszeptibilität χ_e , oder man betrachtet die freien Ströme und erhält die elektrische Leitfähigkeit σ .

$\begin{aligned} \vec{P} &= -ne\vec{r} \\ \rightarrow (d_t^2 + \frac{1}{\tau} d_t) \vec{P} &= \frac{ne^2}{m} \vec{E} \\ \rightarrow \vec{P}(\omega) &= \epsilon_0 \chi_e(\omega) \vec{E}(\omega) \\ \Rightarrow \chi_e(\omega) &= \frac{\frac{ne^2}{m_0 \epsilon_0}}{\omega(\omega + \frac{1}{\tau})} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \vec{j}_{frei} &= 0 \\ \rightarrow \vec{j}_{frei} &= -ne \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \rightarrow (\partial_t + \frac{1}{\tau}) \vec{j}_{frei} &= \frac{ne^2}{m} \vec{E}(t) \\ \vec{P} &= \vec{0} \\ \rightarrow \vec{j}_{frei}(\omega) &= \sigma(\omega) \vec{E}(\omega) \\ \Rightarrow \sigma(\omega) &= \frac{1}{(\frac{1}{\tau} - i\omega)} \frac{ne^2}{m} \end{aligned}$
--	--

Beide Ansätze sind richtig, da die Einteilung in Polarisation und Magnetisierungsströme willkürlich war. Hieraus ergibt sich der Zusammenhang zwischen Leitfähigkeit und Suszeptibilität:

$$\Rightarrow \chi_e = i \frac{\sigma(\omega)}{\epsilon_0 \omega}$$