

Theoretische Physik C

Gehört bei Prof. Dr. Klinkhamer

KIT - Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2011/12

Mitschriebe ausgearbeitet von

Philipp Basler, Nils Braun, Larissa Bauer

21. April 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Hilfsmittel	7
1.1	Diracsche δ -Funktion	7
1.2	Taylorentwicklung von Feldern	10
1.3	Flächenintegrale	11
1.4	Integralsätze von Gauß und Stokes	13
1.5	Zerlegung und Eindeutigkeitssatz	13
2	Elektrostatik	15
2.1	Die Leichte Version/ Coulombsches Gesetz	15
2.2	Die schwierige Version / Lösung der Poissongleichung	22
2.3	Methode der Bildladungen	25
2.4	Randprobleme (RP)	28
2.5	Multipolentwicklung	37
2.6	Elektrostatik der Dielektrika	39
3	Magnetostatik	43
3.1	Ampere	43
3.2	Differentialgleichungen der Magnetostatik	46
3.3	Magnetisches Moment	49
3.4	Makroskopische Gleichungen	51
4	Elektrodynamik	55
4.1	Stationäre Probleme	55

Überlick

- Felder und Maxwell-Gleichungen
- Strahlung
- Spezielle Relativitätstheorie

Kapitel 1

Mathematische Hilfsmittel

1.1 Diracsche δ -Funktion

1.1.1 Definition

Die Diracsche Deltafunktion δ ist definiert über die Eigenschaft, dass

$$\int_I \delta(x - x_0) \, dx = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_0 \in I \\ 0 & \text{falls } x_0 \notin I \end{cases}$$

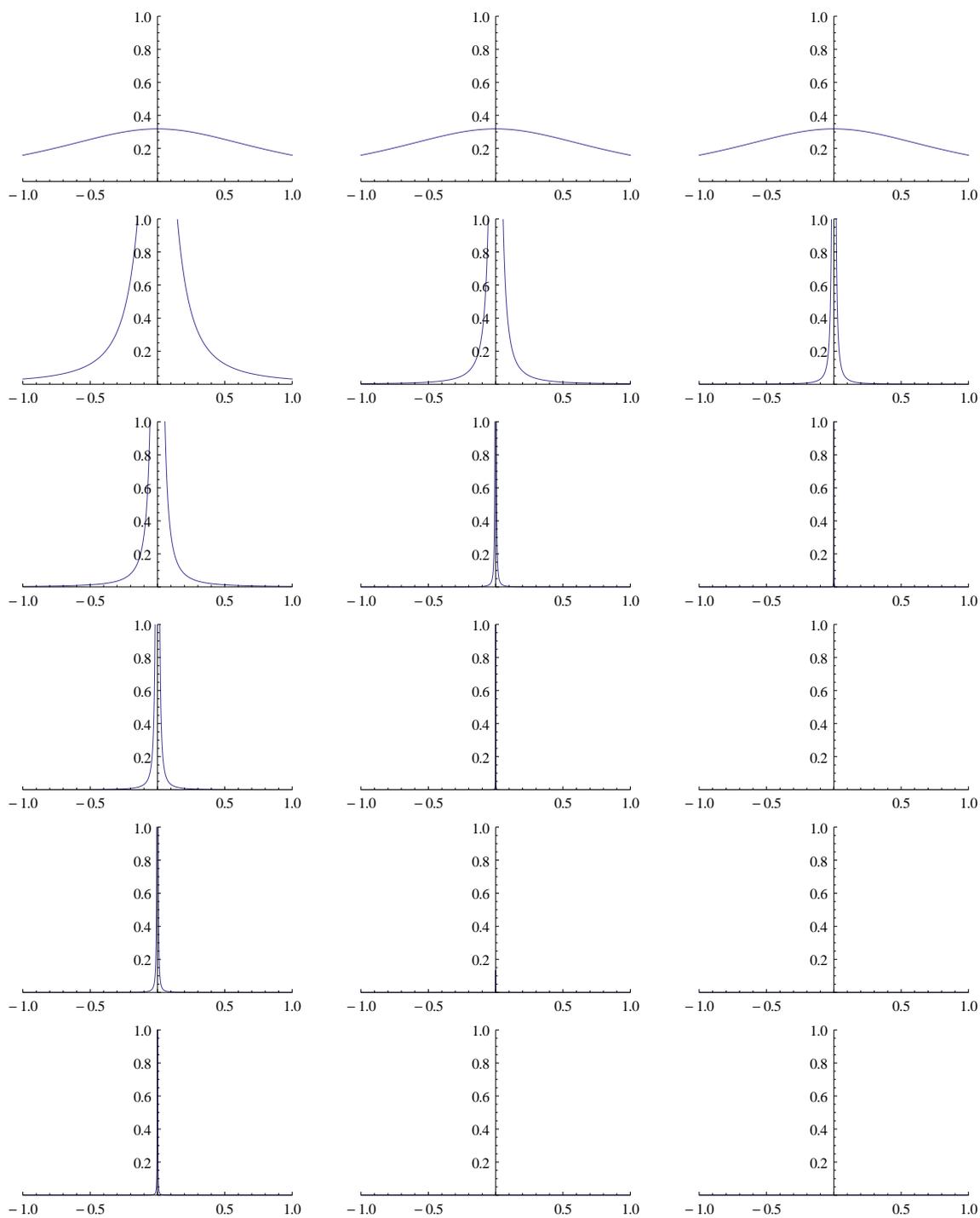
Mit dieser Eigenschaft lässt sich die Deltafunktion auch schreiben als

$$\delta(x - a) = \lim_{\eta \rightarrow 0} f_\eta(x)$$

Als Funktionsfolge wäre zum Beispiel die Folge

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{n^2 + (x - a)^2}$$

möglich. Auch andere Funktionsfolgen erfüllen die Eigenschaften der Deltafunktion.

Abbildung 1.1: Einige Funktionswerte der δ -Funktion für verschiedene Werte von n

1.1.2 Eigenschaften

(a) Das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx f(x) \delta(x - a) = \begin{cases} f(a) & \text{für } a \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{für } a \notin (\alpha, \beta) \end{cases}$$

(b) Setzt man stattdessen einen Funktionswert in die Deltafunktion ein, so erhält man

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$

wobei x_i die Nullstellen von $f(x)$ sind, in denen die Ableitung **nicht** verschwindet.

Beispiel Wir benutzen die eben besprochenen Eigenschaften

$$\begin{aligned} \int_{-2,5}^{2,5} dx \delta(x^3 - 3x^2 - 4x + 12) e^x &= \int_{-2,5}^{2,5} dx \delta((x-2)(x+2)(x-3)) e^x \\ &= \int_{-2,5}^{2,5} dx \left[\frac{\delta(x-2)}{|2x^2 - 6x - 4|_{x=2}} + \frac{\delta(x+2)}{|2x^2 - 6x - 4|_{x=-2}} + \frac{\delta(x-3)}{|2x^2 - 6x - 4|_{x=3}} \right] e^x \end{aligned}$$

Jetzt werden die Zahlenwerte eingesetzt

$$= \frac{1}{4} \int_{-2,5}^{2,5} dx \delta(x-2) e^x + \frac{1}{20} \int_{-2,5}^{2,5} dx \delta(x+2) e^x = \frac{e^2}{4} + \frac{e^{-2}}{20}$$

(c) Die nächste Eigenschaft bezieht sich auf die Ableitung

$$f(x) \delta'(x - a) = -f'(a) \delta(x - a)$$

Diese Eigenschaft lässt sich mit partieller Differentiation beweisen.

(d) Aus der Deltafunktion lässt sich noch eine weitere Funktion herleiten, die Heavisidsche Sprungfunktion Θ :

$$\Theta(x) = \int_{-\infty}^x dx' \delta(x') = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Beispiel Ein Integral mit der Thetafunktion wäre zum Beispiel

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \Theta(4 - x^2) e^{-x} = \int_{-2}^2 dx e^{-x} = 2 \sinh(2)$$

1.2 Taylorentwicklung von Feldern

1.2.1 Eindimensionale Taylorentwicklung

Die Taylorreihenentwicklung einer eindimensionalen Funktion f lautet

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n$$

1.2.2 Mehrdimensionale Taylorentwicklung

Hängt die Funktion ϕ von mehreren Variablen $\mathbf{x} = x_1, x_2, x_3$ ab, so ist die Taylorentwicklung

$$\phi(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_{j=1}^3 \Delta x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right]^n \phi(\mathbf{x}) = \exp(\Delta\mathbf{x} \cdot \nabla) \phi(\mathbf{x})$$

Beispiel Die Funktion $f(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2))$ wird um den Ursprung entwickelt.

$$f(\Delta x, \Delta y) = f(0, 0) + \sum_{j=1}^2 \Delta x_j \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_j} \right|_{x=0, y=0} + \dots$$

Berechnet man die einzelnen Ableitungskomponenten, so kommt man auf

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2 + \dots$$

Die genaue Rechnung sei hier dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

1.2.3 Skalar- und Vektorfelder

Skalarfelder Eine Funktion $f : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beschreibt ein Skalarfeld. Beispiele sind die Ladungsdichte oder das Temperaturfeld.

Vektorfeld Eine Funktion $g : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ beschreibt ein Vektorfeld. Beispiele sind die Stromverteilung oder eine Geschwindigkeitsverteilung.

Auf diesen Feldern kann man verschiedene Operationen durchführen

(a) Skalarprodukt

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

(b) Vektorprodukt

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_k = \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{kij} x_i y_j$$

1.3 Flächenintegrale

Wir betrachten eine Fläche

$$F = \{\mathbf{r}(u, v) \mid u, v \in D\} \subset \mathbb{R}^3$$

Beispiele

(a) Ebene durch

$$\mathbf{x}_1 = (0, 1, 0) \quad \mathbf{x}_2 = (1, 1, 1) \quad \mathbf{x}_3 = (1, 2, 3)$$

Die Ebene wäre dann definiert durch

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) Die Kugel um den Ursprung mit Radius R ist

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = R \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

1.3.1 Integration über Flächen

(a) Wir benutzen das orientierte Flächenelement mit

$$d\mathbf{f} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) dv du = df \hat{n}$$

Beispiel Das Flächenelement der Einheitskugel ist (mit \mathbf{r} wie oben)

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = R \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = R \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

und somit

$$d\mathbf{f} = R^2 \sin(\theta) \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} d\theta d\phi$$

(b) Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche S :

$$\phi_S[\mathbf{E}] = \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f}$$

(c) Zirkulation eines Vektorfeldes durch den geschlossenen und doppelpunktfreien Wegzug C :

$$Z_C[\mathbf{E}] = \oint_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$$

1.3.2 Gradient, Divergenz und Rotation

Diese Operationen kommen aus der Vektoranalysis

- Gradient $\nabla \phi$. Hier wird ein Skalarfeld auf ein Vektorfeld abgebildet.
- Divergenz $\nabla \cdot \phi$. Hier wird ein Vektorfeld auf ein Skalarfeld abgebildet.
- Rotation $\nabla \times \phi$. Hier wird ein Vektorfeld auf ein Vektorfeld abgebildet.

1.4 Integralsätze von Gauß und Stokes

1.4.1 Gauß

$$\int \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) dV = \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f}$$

Anwendung:

- Sei \vec{j} = Stromdichte und ρ die Ladungsdichte. Der Strom durch Oberfläche $\partial V \iff$ negative Änderung der Gesamtladung.

$$\oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{f} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV$$

Dies mit dem Integralsatz von Gauß ergibt

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} dV = 0$$

Da das Integral für alle Volumina verschwinden muss, so muss der Integrand verschwinden. Dies ergibt die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

- 1. Greensche Identität

$$\int_V (\varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_{\partial V} \varphi \nabla \psi \cdot d\vec{f}$$

(Ableitung über Gauß mit $\vec{E} = \varphi \nabla \psi$)

1.5 Zerlegung und Eindeutigkeitssatz

Jedes Vektorfeld $\vec{E}(\vec{x})$ ist eindeutig durch sein Quellenfeld $\operatorname{div} \vec{E}$ und Wirbelfeld $\operatorname{rot} \vec{E}$ bestimmt. (Die Crux der Maxwell-Gleichungen)

Kapitel 2

Elektrostatik

2.1 Die Leichte Version/ Coulombsches Gesetz

Die *gesamte* Elektrostatik beruht auf dem Coulombschen Gesetz (1785)

Definition : Coulombsches Gesetz zwischen zwei Körper

Die Kraft zwischen zwei kleinen geladenen Körpern, die sich relativ zueinander in ruhe befinden ist

$$\vec{F}_1 = kq_1q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

Wobei k vom Einheitensystem abhängt:

- Gauß-cgs $k = 1$, Ladungseinheit $[q] = esE$
- MKSA/SI $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1 \cdot 10^{-7} c^2$ Wobei $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$

Wir (Theoretiker) wählen das Gauß-cgs Systems (Gauß, centimeter, gramm, sekunde): Die E und B-Felder haben dann die gleichen dimensionen und c wird ein manifest sein.

2.1.1 Gauß-cgs System Einheitentabelle

TODO	TODO
------	------

Die Gesamtkraft ergibt sich aus der Vektorsumme der einzelnen Coulombschen Zweikörperkräfte. Somit gilt für ein beliebiges Teilchen i :

Definition : Coulombsches Gesetz im Mehrteilchensystem

$$\vec{F}_i(\vec{x}_i) = q_i \sum_{j \neq i} q_j \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^3}$$

2.1.2 Das elektrische Feld (Mathematisches Konzept)

Definition

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{\vec{F}(\vec{x})}{q}$$

Bemerkung: Dieser Grenzwert existiert nicht wirklich, da es durch die Natur eine Minimalladung gibt.

Das elektrische Feld am Punkt \vec{x} , welches von einer Punktladung am Ort \vec{x}_1 erzeugt wird

$$\vec{E}(\vec{x}) = q_1 \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3}$$

Lineare Superposition

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N q_j \frac{\vec{x} - \vec{x}_j}{|\vec{x} - \vec{x}_j|^3}$$

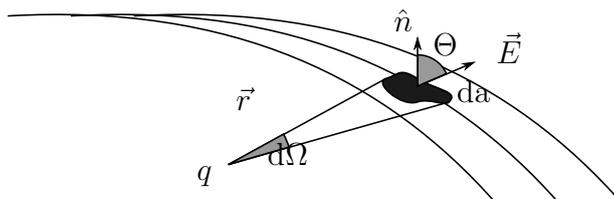
Also insgesamt

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int \varrho(\vec{x}_0) \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3} dV$$

Punktladung am Ort \vec{x}_i

$$\varrho(\vec{x}) = q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

Sei nun Punktladung q und geschlossene Fläche S

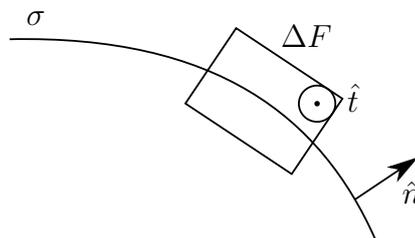
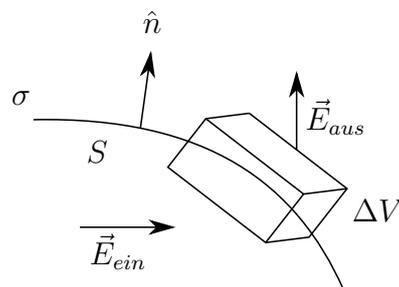


$$\vec{E} \cdot \vec{n} da = q \frac{\cos \theta}{r^2} da = q d\Omega$$

Wobei $d\Omega$ der räumliche Winkel ist. Damit

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \begin{cases} 4\pi q & q \in V(S) \\ 0 & q \notin V(S) \end{cases}$$

Skizzen dazu :



Verallgemeinert ergibt es das Gaußsche Gesetz

2.1.3 Definition : Gaußsches Gesetz

$$\oint_{\partial V} \vec{E}(\vec{x}) \cdot \hat{n} dA = 4\pi \int_V \rho(\vec{x}) dV$$

Dies trifft nur zu, falls das System mit

- $\frac{1}{d^2}$
- Zentral

- Linear

geht.

Mit dem Gaußschen Integralsatz erhält man aus dieser Gleichung

$$\int_V dV (\operatorname{div} \vec{E} - 4\pi\rho) = 0$$

Daraus folgt aber auch, dass der Integrand 0 sein muss, also

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = 4\pi\rho(\vec{x}) \quad (2.1)$$

für alle Punkte \vec{x} . Mit diesem Wissen können wir jetzt auch das \vec{E} -Feld beschreiben mit:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \int d^3x' \rho(\vec{x}') \left(-\nabla_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = -\nabla_x \left(\int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

Da also E ein Gradientenfeld ist, muss auch gelten

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{x}) = 0 \quad (2.2)$$

Aus dieser Rotationsgleichung sind wir motiviert, statt das Vektorfeld \vec{E} , lieber ein Skalarpotentialfeld zu betrachten, da dies einfacher ist:

$$\vec{E}(\vec{x}) \equiv -\nabla\phi(\vec{x}) \quad (2')$$

Wir gehen also von 3 Freiheitsgraden auf einen über. Mit den Gleichungen (2.1) und der neuen Gleichung 2' kommen wir zur berühmten Poisson-Gleichung

$$\nabla^2\phi(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x}) \quad (1')$$

2.1.4 Energie und Arbeit

Die beim Transport der Ladung aufzubringende Arbeit ist (wenn die Strecke von A nach B im elektrischen Feld \vec{E} führt)

$$W = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

wenn \vec{F} die Kraft ist. Diese ist gegeben durch das Elektrische Feld, also ist das

$$= -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_A^B d\phi = q(\phi(B) - \phi(A))$$

Die Kraft ist also konservativ.

Das $q\phi$ ist also die potentielle Energie der Probeladung q im elektrostatischen Feld \vec{E} . Aus dieser sehr lokal begrenzten Definition können wir die Gesamtenergie des Systems berechnen. Sei q_i eine Punktladung und das Potential im Unendlichen 0. Wir bringen diese Punktladung aus dem Unendlichen an den Punkt \vec{x}_i . Dann hat q_i die potentielle Energie

$$W_i = q_i \phi(\vec{x}_i)$$

Betrachtet man nun $n - 1$ Ladungen, so erzeugen diese ein ϕ mit

$$\phi(\vec{x}_i) = \sum_{j=1, i \neq j}^{n-1} \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}$$

Also ist die potentielle Energie von q_i gegeben durch

$$W_i = q_i \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}$$

Die Gesamtenergie des Systems ist dann die Summe über die Einzelladungen der q_i , also

$$W = \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} = \frac{1}{2} \sum'_{i,j} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}$$

Das \sum' ist die Summe ohne $i = j$. Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung ist dies

$$W = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}) \rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x})$$

Mit der Poisson-Gleichung wird dies zu

$$= -\frac{1}{8\pi} \int d^3x \phi(\vec{x}) (\nabla^2 \phi(\vec{x}))$$

Dies können wir mit partieller Integration umschreiben mit

$$= \frac{1}{8\pi} \int d^3x (\nabla\phi(\vec{x}))^2 = \int d^3x \frac{|\vec{E}(\vec{x})|^2}{8\pi}$$

Bemerkung Über das Vorzeichen der Summenbeschreibung von W lässt sich nichts aussagen. Diese Beschreibung über das Integral ist aber immer positiv! Somit können die beiden Beschreibungen nicht äquivalent sein. Dieser Unterschied kommt von der fehlenden Selbstenergie in der ersten im Gegensatz zur zweiten Beschreibung. Für die meisten Anwendungen ist dies jedoch kein Problem.

Plattenkondensator (idealisiert)

Wir betrachten einen Plattenkondensator mit Abstand d in z -Richtung, dessen Quadrat viel kleiner als die Fläche F der Platten ist. Die Ladung auf der oberen Platte sei $-Q$, auf der unteren damit Q . Die Ladungsdichte ist

$$\sigma(0) = \frac{Q}{F} = -\sigma(d)$$

Aus symmetrischen Gründen muss natürlich das \vec{E} -Feld parallel zur z -Richtung sein.

(a) An der $z = 0$ -Platte.

Dort ist das \vec{E} -Feld gegeben durch

$$\vec{E}_+(\vec{x}) = E_+(|z|) \operatorname{sgn}(z) \hat{e}_z$$

Ein sogenanntes Gaußsches Kästchen (also ein Integrationsgebiet) erfülle die Volumengleichung

$$\Delta V = \Delta z \cdot \Delta F$$

mit Grundfläche F , Seite z und Volumen V . Somit ist dort

$$\vec{E}_+ \cdot d\vec{f} = 2E_+(z = \Delta Z/2) \Delta F = 4\pi \rho \Delta V = 4\pi \sigma \Delta F$$

Das Feld insgesamt ist also

$$\vec{E}_+(x, y, z) = 2\pi\sigma \operatorname{sgn}(z) \hat{e}_z$$

und zeigt nur in z -Richtung.

(b) Für die andere $z = d$ -Platte ist die Argumentation analog mit

$$\vec{E}(x, y, z) = -2\pi\sigma \operatorname{sgn}(z - d)\hat{e}_z$$

Für den gesamten Kondensator erhält man

$$\vec{E}_{\text{Kondensator}} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \begin{cases} 4\pi\sigma\hat{e}_z & z \in (0, d) \\ 0 & z \notin (0, d) \end{cases}$$

Wir definieren die beiden Begriffe

$$\text{Spannung } U \equiv \phi(0) - \phi(d) = 4\pi\sigma d = 4\pi\frac{Q}{F}d$$

$$\text{Kapazität } C \equiv \frac{Q}{U} = \frac{F}{4\pi d}$$

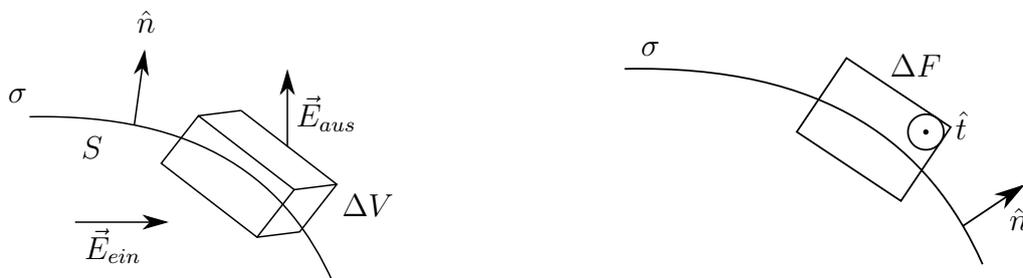
$$\text{Energie } W = \int d^3x \frac{E^2}{8\pi} = \frac{1}{2}CU^2$$

Feldverhalten an Grenzflächen

Gaußkästchen Wieder betrachten wir ein Gaußkästchen (Rechnung hier nicht aufgeführt) und finden

$$\hat{n}(\vec{E}_{\text{aus}} - \vec{E}_{\text{ein}}) = 4\pi\sigma$$

also dass die Normalkomponente von \vec{E} diskontinuierlich ist.



Stokessche Fläche ΔF Sei \hat{t} die Flächennormale von ΔF . Nun benutzen wir den Stokesschen Integralsatz und die Bedingung $\text{rot } \vec{E} = 0$ und erhalten diesmal

$$(\hat{t} \times \hat{n}) \cdot (\vec{E}_{\text{aus}} - \vec{E}_{\text{ein}}) = 0$$

also dass die Tangentialkomponente von \vec{E} erhalten ist.

2.2 Die schwierige Version / Lösung der Poissongleichung

Kurze Wiederholung:

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad \nabla^2\phi = -4\pi\rho$$

Mit lokalisierten Ladungsverteilungen ohne Randflächen ist die allgemeine Lösung der Poissongleichung 1':

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|}$$

Um die Lösung nachzuprüfen, benötigen wir

$$\nabla_x^2 |\vec{x} - \vec{x}'|^{-1} = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Um dies zu verstehen, wechseln wir in Kugelkoordinaten. Dort lautet der Laplaceoperator (für $r \neq 0$):

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + O\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right) \implies \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-1) = 0$$

2.2.1 Probleme mit Randbedingungen

Aus der ersten Greenschen Identität folgt die zweite.

Definition 2. Greensche Identität

$$\int_V d^3x (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) = \oint_{\partial V} \left(\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) df$$

Satz Greenscher Satz

Mit $\varphi = \Phi$ eine Lösung der Poissongleichung und

$$\psi = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{R}$$

Damit ergibt sich

$$\int d^3x' \left(-4\Phi(x')\delta(x - x') + \frac{4\pi}{|x - x'|} \varrho(x') \right) = \oint \dots$$

Somit

$$\Phi(\vec{x}) = \int_V d^3x' \frac{\varrho(x')}{R} + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{R} \right) df$$

Dieser Greensche Satz ist die Lösung für Cauchysche Randbedingungen (bedeutet $\Phi|_{\partial V}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{\partial V}$ beliebig). Dies wäre aber eine Überbestimmung des Problems.

Erklärung:

Eindeutigkeit der Poissonschen Lösung

Eindeutigkeit der Lösung der Poissonschen Gleichung innerhalb eines Volumen V , dessen geschlossene Begrenzungsfläche $S = \partial V$ der Dirichletschen oder Neumannschen Randbedingungen unterliegt.

- Dirichlet : $\Phi|_S$ (ein System von Leitern)
- Neumann : $\frac{\partial \Phi}{\partial n}|_S$ ($\vec{E} \cdot \hat{n}$ aus Flächenladungsdichte)

Beweis

Zwei Lösungen Φ_1, Φ_2 und $U = \Phi_1 - \Phi_2$. Innerhalb von V gilt $\nabla^2 U = 0$ und auf S ist $U = 0$ oder $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$

1. Greensche Identität \implies

$$\int_V d^3x \left[\underbrace{U \nabla^2 U}_{=0} + (\nabla U)^2 \right] = \oint_{S=\partial V} dA \underbrace{U \frac{\partial U}{\partial n}}_{=0}$$

Somit

$$\int_V d^3x (\nabla U)^2 = 0 \implies \nabla U = 0$$

Somit folgt

$$\Phi_1 = \Phi_2 + C$$

$\psi = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ ist eine Greensche Funktion. Sie ist eine Lösung von

$$\nabla_{(x)}^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Allgemein

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + F(\vec{x}, \vec{x}')$$

und

$$\nabla_{(x)}^2 F(\vec{x}, \vec{x}') = 0$$

2. Greensche Identität mit $\varphi = \Phi, \psi = G$

$$\Phi(\vec{x}) = \int_V d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') \varrho(\vec{x}') + \frac{1}{4\pi} \oint_S dA' \left[G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} \Phi(\vec{x}') \right]$$

Für Dirichletsche Randbedingungen mit

- $G_D(x, x') = 0 \quad x' \in S, x \in V$
- $G_D(x, x') = G_D(x', x)$

Also

$$\Phi(x) = \int_V d^3x' G_D(x, x') \varrho(x') - \frac{1}{4\pi} \oint_S dA' \frac{\partial G_D(x, x')}{\partial n'} \Phi(x')$$

Nun für Neumannsche Randbedingungen

- nicht einfach $\frac{\partial G_N}{\partial n'}|_S = 0$ weil Gaußscher Integralsatz für $\nabla^2 G = -4\pi\delta$ ergibt

$$\oint_S dA \frac{\partial G}{\partial n} = -4\pi$$

Die einfachste erlaubte Randbedingung auf G_N ist

$$\frac{\partial G_N(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n} = -\frac{4\pi}{F_S} \quad \vec{x}' \in S, F_S = \text{Gesamter Flächeninhalt}$$

$$\Phi(\vec{x}) = \langle \Phi \rangle_S + \int_V d^3x' G_N(\vec{x}, \vec{x}') + \frac{1}{4\pi} \oint_S dA' G_n(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'}$$

F ist Lösung der Laplacegleichung innerhalb von V und stellt somit das Potential eines Ladungssystem außerhalb von V da.

2.3 Methode der Bildladungen

Gegeben $\rho(\vec{r}), \vec{r} \in V$ und Randbedingungen $S = \partial V$

Gesucht Poissonlösung $\Phi(\vec{r}), \vec{r} \in V$

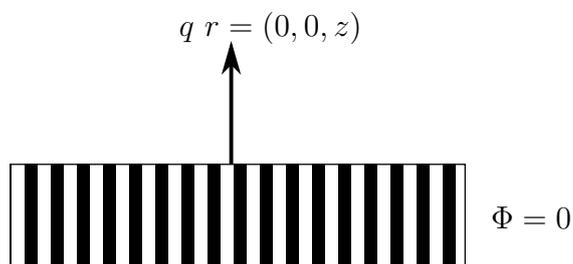
Löse zuerst das Problem mit :

Gegeben $\rho(\vec{r})$ mit fiktiver Bildladung *ohne* Randbedingungen.

Gesucht Lösung der Poissongleichung $\Phi|_S$ oder $\frac{\partial \Phi}{\partial n}|_S$

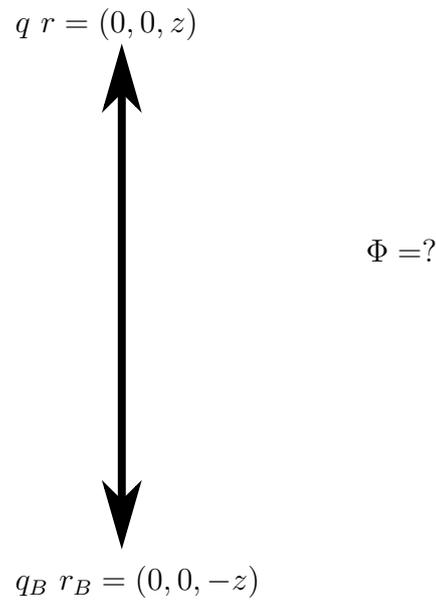
Beispiel

Punktladung über geerdete Metallplatte $\implies \Phi|_S = 0$



Sei $V = \{\vec{r} | z > 0\}$, $\Phi(x, y, 0) = 0$.

Gesucht ist die Lösung.



Für das Alternative Problem gilt

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{q_B}{|\vec{r} - \vec{r}'_B|}$$

$$\Phi(x, y, z) = 0 \implies q_B = -q \quad \vec{r}'_B = -\vec{r}'$$

Damit folgt für das Originalproblem

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{q}{|\vec{r} + \vec{r}'|}$$

Bemerke

$$\Delta_{(\vec{r})} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r} + \vec{r}') = 0 \quad \vec{r} \in V$$

Beispiel Greensche Funktion

Gegeben

$$\rho(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \in V \quad V = \{(x, y, z) | z > 0\}$$

Dirichlet-Randbedingung

$$\Phi|_{\partial V} = 0$$

Gesuchte Funktion ist dann

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + f_D(\vec{r}, \vec{r}')$$

$$(1) \Delta_r f_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \forall \vec{r} \in V$$

$$(2) G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \forall \vec{r} \in \partial V$$

$$(3) G_D \text{ symmetrisch}$$

Ansatz

$$f_D = -\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_B|}$$

mit

$$\vec{r}'_B = (x', y', -z') \text{ für } \vec{r}' = (x', y', z')$$

Somit

$$G_D(x, y, z, x', y', z') = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-\frac{1}{2}} - [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2]^{-\frac{1}{2}}$$

$$(1) \text{ Passt}$$

$$(2) \text{ Passt}$$

$$(3) \text{ Passt}$$

Lösung ist also

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \int_V d^3r' \rho(x') \cdot G_D(\vec{r}, \vec{r}') + \oint_{\partial V} 0 \\ &= \int_V d^3r' \rho(r') \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_B|} \right] \end{aligned}$$

2.4 Randprobleme (RP)

2.4.1 RP1: Entwicklung nach orthogonalen Funktionen

Quadratintegrale Funktion $U_n(\xi) \in \mathbb{C}, \xi \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften

Orthogonal

$$\int_a^b d\xi U_n^* U_m(\xi) = \delta_{mn}$$

Vollständig

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(\xi') U_n(\xi) = \delta(\xi - \xi')$$

Wobei * für komplex konjugiert steht.

Eine beliebige Funktion $f(\xi)$ lässt sich entwickeln mit

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(\xi) \quad a_n \in \mathbb{C}$$

Für die Koeffizienten ergibt sich

$$a_n = \int_a^b d\xi U_n^*(\xi) f(\xi)$$

Beispiel: Fourierreihen mit $x \in (-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$

$$\{U_n(x)\} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi m x}{a}\right), \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) \right), m \in \mathbb{N} \right\}$$

Der diskrete Index n kann auch kontinuierlich werden, schreibe als k . Damit ergibt sich das Fourierintegral

$$\{U_k(x)\} = \left\{ \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}$$

Diese Funktionen sind orthogonal und vollständig.

Definition*Fouriertransformation*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{ikx}$$

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x)$$

2.4.2 RP2 Trennung der Variablen

Laplacegleichung mit kartesischen Koordinaten (iPDE)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi = 0$$

Durch Umformen werden aus einer iPDE drei oDE.

Produktansatz :

$$\phi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

Mit diesem Ansatz findet man

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \frac{1}{X} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \frac{1}{Y} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \frac{1}{Z} = 0$$

Die Behauptung ist, dass dann alle Summenterme konstant sind (also keine Abhängigkeit mehr von x , y und z besitzen). Man setzt dann

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \frac{1}{X} = -\alpha^2 \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \frac{1}{Y} = -\beta^2 \quad \text{mit } \alpha^2, \beta^2 \geq 0$$

Dann gilt

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \frac{1}{Z} = \alpha^2 + \beta^2$$

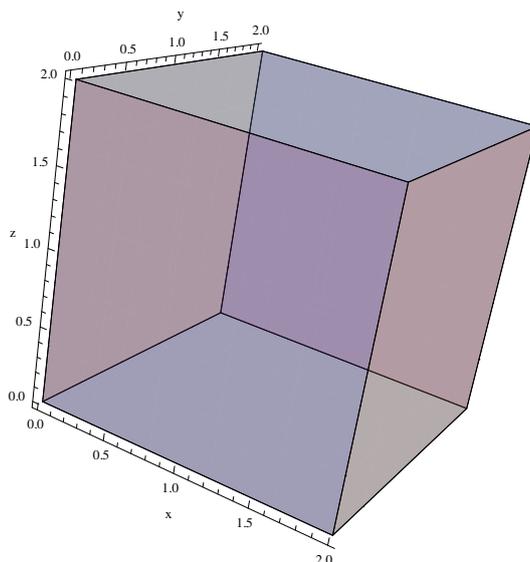
Die Lösung ist dann

$$\Phi(x, y, z) = e^{\pm i\alpha x} e^{\pm i\beta y} e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z}$$

Beispiel Der Quader mit einem Volumen $a \cdot b \cdot c$. Für 5 Seitenflächen setzen wir $\Phi = 0$. Nur für die obere Fläche gilt

$$\Phi(x, y, z) = V(x, y)$$

mit einer beliebigen Funktion V .



Setze

$$\Phi = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} z) \quad \alpha_n = n\pi/a, \beta_m = m\pi/b, \gamma_{nm} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$

Dann sind die Randbedingungen an den 5 trivialen Seiten erfüllt. Betrachte jetzt die letzte Randbedingung

$$V(x, y) = \sum_{n,m}^{\infty} A_{nm} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} c)$$

Dies ist eine doppelte Fourierreihe, also auch invertierbar für die einzelnen Koeffizienten A_{nm} (siehe oben):

$$A_{nm} = \frac{4}{ab \sinh(\gamma_{nm} c)} \int_0^a \int_0^b dx dy V(x, y) \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y)$$

Allgemein ist das Problem, dass jede Seite durch eine allgemeine Funktion V_i gegeben ist. Die Lösung ist dann eine Linearkombination der Lösungen für die einzelnen Seiten.

2.4.3 RP3 Laplacegleichung in Kugelkoordinaten

$$\Delta\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

Trennung der Variablen von

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi)$$

Zwei Konstanten $-m^2$ und $l(l+1)$ mit

$$\frac{1}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2} = -m^2 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial P}{\partial\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] P = 0 \quad (2.5)$$

Lösung von 2.3 ist

$$Q(\varphi) = \exp(\pm im\varphi)$$

mit der Eindeutigkeit folgt

$$m \in \mathbb{Z}$$

Lösung von 2.4 gibt

$$U(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l}$$

Wobei l zunächst noch unbestimmt, später keine Divergenz bei $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ bringt
 $l \in \mathbb{N}_0$

Substituiere mit $x = \cos\theta$, $P = P(x)$, $x \in [-1, 1]$. Damit

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0$$

Falls $m = 0$, so ist dies die gewöhnliche Legendresche Differentialgleichung. Für $m \neq 0$ ist es die zugeordnete Legendre Differentialgleichung.

Die Lösung der gewöhnlichen Legendresche Differentialgleichung sind die Legendre Poly-

normiert (normiert bei $x = 1$ auf Eins).

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad l \in \mathbb{N}_0$$

z.B.:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= x \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \end{aligned}$$

Diese Polynome sind alle zueinander orthogonal, d.h.

$$\int_{-1}^1 dx P_l(x) P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

Sie sind sogar auch vollständig, d.h:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(x) P_l(x') = \delta(x - x')$$

Beispiel Sei f eine Funktion auf dem Intervall $(-1, 1)$. Dann lässt sich f entwickeln über die Legendre-Polynome:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x)$$

mit den Koeffizienten

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx$$

Betrachten wir zum Beispiel die Thetafunktion Θ . Diese lässt sich entwickeln mit den Legendrepolyomen

$$\Theta(x) = \frac{3}{2} P_1 - \frac{7}{8} P_3 + \frac{11}{16} P_5 + \dots$$

2.4.4 RP4: mit azimuthaler Symmetrie

Azimuthale Symmetrie bedeutet, dass die Lösung Φ nur noch von r und θ abhängt. Dann kann man schreiben

$$\Phi(r, \theta) = \sum_l (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta)$$

1. Beispiel Gegeben ist auf der Oberfläche $r = a$ das Potential $\Phi = V(\theta)$. Gesucht ist das Potential innerhalb dieser Kugel. Es existieren also keine Ladungen im Inneren. Damit muss $B_l = 0$ gelten. Die Randbedingung eingesetzt ergibt

$$\sum_l A_l a^l P_l(\cos \theta) = V(\theta)$$

Mit der Entwicklung von oben erhalten wir

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta V(\theta) P_l(\cos \theta)$$

Wähle zum Beispiel

$$V(\theta) = \begin{cases} +U & \text{für } \theta \in (0, \pi/2) \\ -U & \text{für } \theta \in (\pi/2, \pi) \end{cases}$$

$$\Phi = U \left(\frac{3}{2} \frac{2}{a} P_1(\cos \theta) - \frac{7}{8} \left(\frac{2}{a} \right)^3 P_3(\cos \theta) + \frac{11}{16} \left(\frac{2}{a} \right)^5 P_5(\cos \theta) + \dots \right)$$

2. Beispiel Punktladung q an der Stelle \mathbf{x}' . Wir wissen schon

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_l \left(\frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \right) P_l(\cos \gamma)$$

wo γ der Winkel zwischen \mathbf{x} und \mathbf{x}' ist und

$$r_{> / <} = \max / \min(|\mathbf{x}|, |\mathbf{x}'|)$$

Die Klammer wird also für $r < r'$ zu

$$\frac{r^l}{r'^{l+1}}$$

und für $r > r'$ zu

$$\frac{r'^l}{r^{l+1}}$$

2.4.5 RP5: Kugelflächenfunktionen

Für $m \neq 0$ findet man die so genannten zugeordneten Funktionen

$$P_l^m(x) = \begin{cases} (-1)^m (1-x^2)^{(m/2)} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) & \text{für } 0 < m < l \\ (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m & \text{für } m < 0 \end{cases}$$

Auch sie sind orthogonal:

$$\int_{-1}^1 P_{l'}^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'}$$

Dann definieren wir die Kugelflächenfunktionen als

$$y_{l,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

und

$$y_{l,-m} = (-1)^m y_{l,m}^*$$

für negative m . Sie sind orthogonal mit

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta y_{l',m'}^*(\theta, \phi) y_{l,m}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

und vollständig

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l y_{l,m}^*(\theta', \phi') y_{l,m}(\theta, \phi) = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta')$$

Additionstheorem Betrachten wir zwei Punkte \mathbf{x} und \mathbf{x}' mit dem Winkel γ dazwischen, so können wir schreiben

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l y_{l,m}^*(\theta', \phi') y_{l,m}(\theta, \phi)$$

2.4.6 Entwicklung Greenscher Funktionen in Kugelkoordinaten

Zuerst ohne Randflächen

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \right] y_{l,m}^*(\theta', \phi') y_{l,m}(\theta, \phi)$$

mit den bekannten Definitionen

$$r_{<} = \min(r, r') \quad r_{>} = \max(r, r')$$

Der Vorteil ist jetzt, dass die beiden Koordinaten r, ϕ, θ und r', θ', ϕ' komplett getrennt sind.

Außenraumproblem $r > a$ (Dirichletproblem auf $r = a$)

$$G_a(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^{l+1} \right] y_{l,m}^*(\theta', \phi') y_{l,m}(\theta, \phi)$$

Die Klammer ist

$$\left[\frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^{l+1} \right] = \begin{cases} \frac{1}{r^{l+1}} \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) & \text{für } r < r' \\ \frac{1}{r^{l+1}} \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) & \text{für } r' < r \end{cases}$$

mit $G_a(a, r') = G_a(r, a) = 0$ Der Unterschied zwischen den beiden Fällen entsteht, weil einmal in der Kugel und einmal außerhalb der Kugel (beidesmal ohne Ladung!) betrachtet wird.

2.4.7 Entwicklung Greenscher Funktionen nach Eigenfunktionen

Elliptische Differentialgleichung:

$$\nabla^2 \psi(x) + [f(x) + \lambda] \psi(x) = 0$$

Man findet zwar immer eine Lösung, aber nur für ein paar bestimmte Werte von λ gibt es Lösungen, die stetig und endlich sind

$$\lambda = \lambda_n$$

Diese Werte nennen wir **Eigenwerte**. Die dazu gehörenden Lösungen ψ_n nennen wir **Eigenfunktionen**. Diese Lösungen sind sogar orthogonal

$$\int_V dV \psi_m^*(x) \psi_n(x) = \delta_{nm}$$

und wir nehmen auch an, sie sind vollständig (für alle unsere Operatoren ist dies so, aber eigentlich nicht für alle möglichen Operatoren!).

Gesucht ist G mit

$$\nabla_{(x)}^2 G(x, x') + [f(x) + \lambda] G(x, x') = -4\pi \delta(x - x')$$

Entwicklung

$$G(x, x') = \sum_m a_m(x') \psi_m(x)$$

Dies ergibt

$$\sum_n a_m(x') (\lambda - \lambda_n) \psi_n(x) = -4\pi \delta(x - x')$$

Mit der Orthogonalität folgt

$$a_m(x') = 4\pi \frac{\psi_m^*(x')}{\lambda_m - \lambda}$$

Damit folgt für die Greensche Funktion

$$G(x, x') = 4\pi \sum_n \frac{\psi_n^*(x') \psi_n(x)}{\lambda_n - \lambda}$$

Beispiel

$$f = 0 \quad \lambda = |\vec{k}|^2$$

Dies führt über die Elliptische Differentialgleichung zu einer Wellengleichung

$$\nabla^2 \psi_k(\vec{x}) + |\vec{k}|^2 \psi_k(\vec{x}) = 0$$

Mit kontinuierlichen Eigenwerten $|\vec{k}|^2$ und den Eigenfunktionen

$$\psi_k = \frac{1}{(2\pi)^3 |\vec{k}|} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x})$$

Normierung :

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \psi_{k'}^*(x) \psi_k(x) = \delta(k - k')$$

Greensche Funktion für Laplace Gleichung

$$G(x, x') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3k \frac{\exp(ik(x - x'))}{|\vec{k}|^2}$$

2.5 Multipolentwicklung

Eine lokalisierte Ladungsverteilung $\rho(x')$ mit $\rho(x') = 0 \iff |x'| > R$.

Betrachte das Potential für $|x| > R$ in Kugelkoordinaten, wobei y_{lm} Kugelflächenfunktionen bezeichnen.

$$\phi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}$$

Coulomb:

$$\phi(x) = \int d^3x' \frac{\rho(x')}{|x - x'|}$$

Mit Randbedingung $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi(x) = 0$ und entwickle $\frac{1}{|x-x'|}$ nach 2.4.6

$$\phi(x) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left[\int d^3x' r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \rho(x') \right] \frac{y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}$$

\implies

$$q_{lm} = \int d^3x' r'^l y_{lm}^*(\theta', \varphi') \rho(r', \theta', \varphi')$$

Dies sind die Multipolmomente. Die Multipolmomente sind abhängig vom Volumen und

vom Koordinatenursprung.

$$\begin{aligned}
 Q &= \int d^3 x' \rho(x') \\
 P_i &= \int d^3 x' x'_i \rho(x') \\
 \tilde{Q} &= \int d^3 x' (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(x') \\
 q_{00} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} Q \\
 q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int d^3 x' (x' - iy') \rho(x') = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (P_x - iP_y) \\
 q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} P_z \\
 q_{20} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \tilde{Q}_{zz}
 \end{aligned}$$

Zur Erinnerung in Kugelkoordinaten :

$$\nabla \vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \frac{1}{r} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Daraus folgt

$$E_r = \frac{4\pi(l+1)}{2l+1} q_{lm} \frac{y_{lm}(\theta, \varphi)}{2^{l+2}}$$

Z.b. Monopol: $(E_r, E_\theta, E_\varphi) = (\frac{Q}{r^2}, 0, 0)$ Dipol längs der z -Achse ($l = 1, m = 0$). Damit gibt sich das Elektrische Feld als

$$\vec{E} = \frac{P}{r^2} (2 \cos \theta, \sin \theta, 0)$$

Zusammenhang zwischen den sphärischen Multipolmomenten q_{lm} und den kartesischen Q

	q_{lm}	$Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_l} = \int d^3x' x'_{\alpha_1} \cdots x'_{\alpha_l} \rho(x')$
	$2l + 1$ Koeffizienten	$\frac{(l+1)(l+2)}{2}$ Koeffizienten
l	Anzahl der Koeffizienten	Anzahl der Koeffizienten
0	1	1
1	3	3
2	5	5 + 1
3	7	10
Ordnung	$O(l)$	$O(l^2)$

Betrachte lokalisierte Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ und ein äußeres Feld $\phi(\vec{x})$

Annahme :

$$\frac{|\nabla\phi|}{|\phi|} \ll \frac{1}{D}$$

$$W = \int d^3x \rho(x) \Phi(x)$$

Taylor von $\phi(x)$:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(0) + \vec{x} \cdot \nabla\phi(0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_j x_i \frac{\partial^2 \phi(0)}{\partial x_j \partial x_i} \\ &= \phi(0) - \vec{x} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{2} x_i x_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) \\ &= \phi(0) - \vec{x} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) \end{aligned}$$

Somit

$$W = q\phi(0) - \vec{p} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} \tilde{Q}_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0)$$

2.6 Elektrostatik der Dielektrika

Zusammenfassung Maxwellgleichungen im Vakuum (auch mikroskopisch)

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

Wenn die Zahl der Punktladungen nur Ordnung 1 hat, dann kann man die Lösung numerisch oder analytisch finden. Bei der Ordnung 10^{23} Punktladungen ist eine Mittelung

nötig!

Aus der mikroskopischen Maxwellgleichung folgt im letzten Fall auch die makroskopische:

$$\nabla \times \vec{E}_{\text{mik}} = 0 \implies \nabla \times \vec{E}_{\text{mak}} = 0 \implies \vec{E}_{\text{makro}} = -\nabla \phi_{\text{makro}}$$

Betrachten wir ein Molekül einmal ohne äußeres und einmal mit äußerem Feld:

Wir bezeichnen die Dipolmomente und Ladungen mit \vec{p}_i, e_i von Molekül Typ i . Die Dichte der Ladung nennen wir N_i . Jetzt mitteln wir $\langle \cdot \rangle$ wir über ein kleines Volumen um \vec{x} . Die makroskopische Ladungsdichte ist dann

$$\rho(\vec{x}) = \sum_i N_i \langle e_i \rangle + \rho_{\text{frei}}$$

Die makroskopische Polarisationsdichte ist dann

$$P(\vec{x}) = \sum_i N_i \langle p_i \rangle$$

Beispiel Betrachte ein Volumen ΔV und $\vec{x} \notin \Delta V$ aber die Ladungen $\vec{x}' \in \Delta V$. Außerdem $\sqrt[3]{\Delta V} \ll |\vec{x} - \vec{x}'|$ (Vergleich der Größenverhältnisse). Der Beitrag am Potential $\Delta\phi$ (kein Laplaceoperator!) dieses Volumens ΔV ist

$$\Delta\phi(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x}')\Delta V}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{\vec{P}(\vec{x}')\Delta V(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} + \dots$$

Wir machen daraus statt einer Summe einfach ein Integral und erhalten:

$$\phi_{\text{makro}}(\vec{x}) = \int dx^3 \left[\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{P}(\vec{x}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \right] + \dots$$

Nun integrieren wir partiell:

$$= \int dx^3 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \left[\rho(\vec{x}') - \nabla' \cdot \vec{P}(\vec{x}') \right] + \dots$$

Das sieht doch schon aus wie das Potential einer effektiven Ladung von

$$\rho(\vec{x}') - \nabla' \cdot \vec{P}(\vec{x}')$$

Ändern wir also die Maxwell'schen Gleichungen für das makroskopische Feld in

$$\operatorname{div} \vec{E}_{\text{makro}} = 4\pi [\rho - \nabla \cdot \vec{P}] \quad \operatorname{rot} \vec{E}_{\text{makro}} = 0$$

Setze jetzt noch $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ und man erhält

$$\nabla \vec{D}(\vec{x}) = 4\pi\rho(\vec{x})$$

Wir nennen dann ρ die Überschussladungsdichte und \vec{D} die dielektrische Verschiebung. $\nabla \vec{P}$ können wir jetzt auch als von der Polarisation erzeugte Ladungsdichte betrachten. Sie wird durch die Änderung der Ladung durch die Polarisation in einem bestimmten Volumen erzeugt, welche dadurch größer oder kleiner werden kann.

2.6.1 Allgemeine Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

Aber wie hängen jetzt \vec{D} und \vec{E} miteinander zusammen? Gesucht ist also $\vec{D} = \vec{D}[\vec{E}]$. In Wahrheit ist dies jedoch sehr kompliziert und abhängig von vielen verschiedenen Faktoren (z.B. von allen Teilchen des Volumens).

Als einfachste Annahmen machen wir (damit wir das überhaupt ausrechnen können!):

- (1) Das Medium ist linear ($|\vec{P}| \propto |\vec{E}|$, in erster Näherung ist dies meistens ok aber eigentlich falsch)
- (2) Das Medium ist isotrop ($\vec{P} \parallel \vec{E}$)

Also kann man schreiben

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E}$$

mit der elektrischen Suszeptibilitätskonstante χ_e . Dann ist

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e$$

mit der Dielektrizitätskonstante ε

- (3) Das Medium ist homogen. Dann ist ε wirklich konstant (sonst nicht!).
In diesem Fall lässt sich für die erste Maxwell'sche Gleichung schreiben

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Der letzte Faktor ist also die um einen Faktor abgeschirmte Ladungsdichte (jetzt wieder analog zur Gleichung im Vakuum).

2.6.2 Verhalten an Grenzflächen

Wieder betrachtet man Stokische-Linien und Gaußsche-Kästchen und erhält die Bedingungen

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_{21} = 4\pi\rho$$

also eine Diskontinuität in der Normalrichtung und

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n}_{21} = 0$$

eine Stetigkeit in der Orthogonalrichtung.

2.6.3 Energie im dielektrischen Medium

$$\delta W = \int dx^3 \delta\rho\phi \quad \nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \quad \delta\rho = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \vec{D}$$

also finden wir

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int dx^3 \phi \nabla \cdot \delta\vec{D} = \frac{1}{4\pi} \int dx^3 \vec{E} \cdot \delta\vec{D}$$

Also insgesamt

$$W = \frac{1}{4\pi} \int dx^3 \int_0^{\vec{D}(\vec{x})} \vec{E} \cdot \delta\vec{D}$$

Nun ist aber \vec{D} eigentlich eine Funktion, deshalb schreiben wir mit der Parametrisierung von \vec{D} durch τ :

$$W = \frac{1}{4\pi} \int dx^3 \int_0^1 d\tau \vec{E}[\vec{D}(x, \tau)] \cdot \frac{\partial \vec{D}(x, \tau)}{\partial \tau}$$

In einem linearen Medium mit $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ findet man

$$W = \frac{1}{8\pi} \int dx^3 \vec{E} \cdot \vec{D}$$

Kapitel 3

Magnetostatik

3.1 Ampere

3.1.1 Definitionen

Unterschied zur Elektrostatik jetzt: Es gibt bei der Magnetostatik keine freien magnetischen Ladungen (es gibt keine magnetischen Monopole).

Definition

Wir definieren also

- *Magnetische Dipol (Moment \vec{m})*
- *Magnetische Flussdichte / Induktion $\vec{B}(\vec{x})$*

Das ergibt das mechanische Drehmoment

$$\vec{N} \propto \vec{m} \times \vec{B}$$

In der E-Statik gab es eine Kraft

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

was viel einfacher ist (z.B. kein Kreuzprodukt).

Oersted (1819): Zusammenhang zwischen elektrischen Strömen und magnetische Felder.

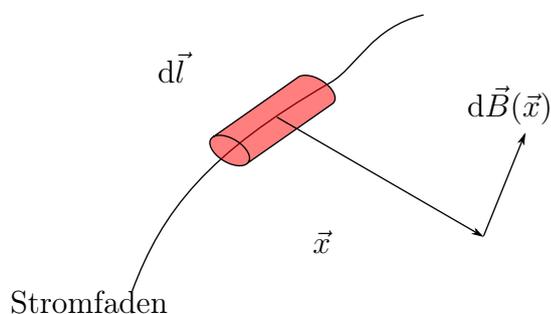
Die Ladungserhaltung liefert uns

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

mit der Ladungsdichte ρ [$esEcm^{-3}$] und der Stromdichte \vec{j} [$esEs^{-1}cm^{-2}$]. In der Magnetostatik sind die Ströme quellfrei (= stationär), also

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Ampere (1820-1825): Er betrachtete nur Stromfäden (unendlich dünn, keine Masse usw.) durch den ein Strom von I fließt. Darauf betrachten wir ein Stück $d\vec{l}$, das ein magnetisches Feld $d\vec{B}$ am Punkt \vec{x} erzeugt.



Satz Amperescher Satz

Das vom Stromelement $I d\vec{l}$ induzierte Element $d\vec{B}$ der magnetischen Induktion ist gegeben durch

$$d\vec{B} = \left[\frac{1}{c} \right]_{cgs-S} I \frac{d\vec{l} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

Betrachten wir damit ein Teilchen mit Ladung q und unveränderter Geschwindigkeit v ($\frac{dv}{dt} \approx 0$) (nicht relativistisch!), so erhalten wir

$$I d\vec{l} = q \vec{v}$$

und

$$\vec{B}(\vec{x}) = q \frac{\vec{v} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

und wir erkennen die Bedeutung vom Faktor $1/c$.

Bemerkungen

- (1) Auf der linken Seite dieser Gleichung wird mit emE gemessen, auf der rechten Seite mit esE . Diese Verknüpfung zwischen den beiden Einheiten durch die Lichtgeschwindigkeit wurde erst durch Weber und Kohlrausch (1850).
- (2) \vec{E} und \vec{B} ergeben später den elektromagnetischen Feldtensor $F_{\mu\nu}$.

Satz Biot-Savartsches Gesetz

Ein unendlich langer gerader Stromfaden I (schließt im Unendlichen) erzeugt ein azimuthales \vec{B} -Feld. Mit der Gleichung findet man

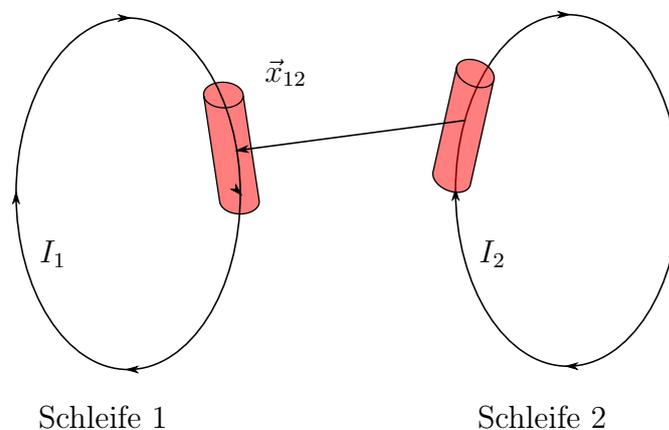
$$|\vec{B}(R)| = \frac{IR}{c} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{l} (R^2 + l^2)^{-(3/2)} = \frac{2I}{R}$$

TODO: Bild**Definition Kraft**

Die auf ein Stromelement $I d\vec{l}$ wirkende Kraft bei Anwesenheit einer magnetische Induktion \vec{B}_2 ist

$$d\vec{F} = \frac{I}{c} d\vec{l} \times \vec{B}_2$$

Beispiel: Für zwei Stromfäden I_1 und I_2 erhalten wir



$$\vec{F}_1 = \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{S_1} \oint_{S_2} \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{x}_{12})}{|\vec{x}_{12}|^3}$$

Mit

$$\frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{x}_{12})}{|\vec{x}_{12}|^3} = -(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \frac{\vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3} + d\vec{l}_2 \underbrace{\left(\frac{d\vec{l}_1 \cdot \vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3} \right)}_{\text{fällt bei Integration weg}}$$

erhält man das Ampersche Gesetz

Satz Ampersches Gesetz

$$\vec{F}_1 = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{S_1} \oint_{S_2} (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \frac{\vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3}$$

Die Antisymmetrie liefert Actio = -Reactio.

Ausgedehnte Stromverteilungen

Mit der Stromdichte $\vec{j}(\vec{x})$ und dem äußeren magnetischen Feld $\vec{B}(\vec{x})$ findet man die Kraft

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int d\vec{x}^3 \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})$$

und den Gesamtdrehmoment

$$\vec{N} = \frac{1}{c} \int d\vec{x}^3 \vec{x} \times (\vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}))$$

3.2 Differentialgleichungen der Magnetostatik

Ampere liefert und, dass

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d\vec{x}^3 \vec{j}(\vec{x}) \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \frac{1}{c} \nabla \times \int d\vec{x}^3 \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Also insgesamt

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \nabla \times \nabla \times \int d^3\tilde{x} \frac{\vec{j}(\tilde{x})}{|\vec{x} - \tilde{x}|}$$

Verwende

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v} \\ \nabla_{(x)} \left(\vec{j}(\tilde{x}) f(x) \right) &= \vec{j} \cdot \nabla f \end{aligned}$$

Also folgt

$$c \nabla \times \vec{B}(\vec{x}) = \nabla \int d^3\tilde{x} \vec{j}(\tilde{x}) \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{x} - \tilde{x}|} - \int d^3\tilde{x} \vec{j}(\tilde{x}) \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{x} - \tilde{x}|} \right)$$

Verwende $\nabla_{(x)} \frac{1}{|\vec{x} - \tilde{x}|} = -\nabla_{(\tilde{x})} \frac{1}{|\vec{x} - \tilde{x}|}$ und $\nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{x} - \tilde{x}|} \right) = -4\pi \delta(\vec{x} - \tilde{x})$ Somit

$$\begin{aligned} c \nabla \times \vec{B} &= -\nabla \int d^3\tilde{x} \vec{j}(\tilde{x}) \cdot \nabla_{(\tilde{x})} \frac{1}{|\vec{x} - \tilde{x}|} + 4\pi \vec{j}(\vec{x}) \\ &= \nabla \int d^3\tilde{x} \underbrace{\nabla_{(x)} \cdot \vec{j}(\tilde{x})}_{=0} \frac{1}{|\vec{x} - \tilde{x}|} + 4\pi \vec{j}(\vec{x}) \end{aligned}$$

Es folgt also

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x})$$

Integralsatz:

$$\int_S da \left(\nabla \times \vec{B} \right) \cdot \vec{n} = \frac{4\pi}{c} \int_S da \vec{j} \cdot \vec{n}$$

Mit Stokes folgt

Definition Amperesches Durchflutungsgesetz

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I_S$$

Wobei I_S der Gesamtstrom durch die Fläche S ist.

Definition Maxwellgleichungen der Magnetostatik

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.2)$$

Lösung von 3.2 ergibt ein Vektorpotential

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Eichtransformation $\vec{A} \rightarrow \vec{\tilde{A}} = \vec{A} + \nabla\alpha$ wobei α eine beliebige Skalarfunktion ist. Da $\nabla \times (\nabla \cdot \vec{\psi}) = 0$ folgt $\vec{B} \rightarrow \vec{\tilde{B}} = \vec{B}$

Freiheit in Bestimmung von \vec{A}

Aus 3.1 folgt

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (3.3)$$

Mit Coulombeichung (siehe später) findet man ein \vec{A} mit $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

Mit der Coulombeichung wird 3.3 zu

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (3.4)$$

mit 3-fach (jede Komponente) Poisson-Gleichung anwenden ergibt sich

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3\vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.5)$$

Lösung muss die Coulombeichung erfüllen. Betrachte gleichung 3.4 $\nabla \cdot \vec{A} = 0 = \nabla \cdot \vec{j}$

3.3 Magnetisches Moment

Lemma Lokalisiertes, quellenfreies $\vec{j}(\vec{x})$ und beliebige Skalarfunktion $f(x'), g(x')$:

$$\int d^3x' [f\vec{j} \cdot \vec{\nabla}'g + g\vec{j} \cdot \vec{\nabla}'f] = 0$$

Beweis erfolgt über partielle Integration.

Beispiel:

$$f = 1, g = x'_i \implies \int d^3x' \vec{j}_i(x') = 0 \quad (\text{L1})$$

$$f = x'_i, g = x'_j \implies \int d^3x' [x'_i \vec{j}_i + x'_j \vec{j}_i] = 0 \quad (\text{L2})$$

Stromdichte auf einem kleinem Raumgebiet beschränkt

Taylor

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{|\vec{x}|^3} + \dots$$

Einsetzen in 3.5 ergibt

$$A_i(\vec{x}) = \frac{1}{c|\vec{x}|} \underbrace{\int d^3x' j_i(\vec{x}')}_{=0 \text{ nach L1}} + \underbrace{\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \int d^3x' j_i(\vec{x}') \vec{x}'}_{*} + \dots$$

Mit

$$* \propto x_k \int d^3x' x'_k j_i(x') \stackrel{L2}{=} -\frac{1}{2} \left[x \times \int (\vec{x}' \times \vec{j}(x')) d^3x' \right]_i$$

Somit

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3} + o(|\vec{x}|^{-3})$$

Das Magnetische Moment ergibt sich als

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int d^3x' \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}')$$

Damit ergibt sich

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{3\hat{x}(\hat{x} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{x}|^3} + o(|x|^{-4})$$

Dies ist das magnetische Dipolfeld.

Geladene Teilchen vom Typ i : $\vec{j}(\vec{x}) = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{x} - \vec{x}')$ Damit

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum_i q_i \vec{x} \times \vec{v}_i$$

Zur Erinnerung : Drehimpuls $\vec{L}_i = M_i \vec{x}_i \times \vec{v}_i$ Somit folgt klassisch

$$\vec{m} = \sum_i \frac{q}{2cM_i} \vec{L}_i$$

Spezialfall:

$$\forall i : \frac{q_i}{M_i} = \frac{e}{M} \implies \vec{m} = \frac{e}{2Mc} \vec{L}$$

Relativistische Quantenmechanik: Elektron hat Spin \vec{S} (Eigenwerte $\frac{\hbar}{2}$)

$$\vec{m}_e = g \frac{e}{2M_e c} \vec{S}$$

g -Faktor

$$g = 2(1 + O(\alpha))$$

Wobei die 2 von Dirac kommt.

3.3.1 Kraft und Drehmoment auf eine lokalisierte Stromverteilung im äußeren Magnetfeld \vec{B}

Schon früher haben wir gefunden

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int d\mathbf{x}^3 \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})$$

Jetzt benutzen wir die Taylorentwicklung der k -Komponente des \vec{B} -Feldes:

$$B_k(\vec{x}) = \vec{B}_k(0) + \vec{x} \cdot \nabla \vec{B}_k(0) + \dots$$

Also

$$F_i = \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \left[B_k(0) \int d\mathbf{x}^3 j_j(x_s) + \int d\mathbf{x}^3 j_j(x_s) \vec{x} \cdot \nabla B_k(0) + \dots \right]$$

$$= \varepsilon_{ijk}(\vec{m} \times \nabla)_j B_k(0) + \dots$$

mit den vorherigen Lemmatas. Insgesamt also

$$\vec{F} = (\vec{m} \times \nabla) \times \vec{B} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) - \underbrace{\vec{m}(\nabla \cdot \vec{B})}_{=0} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

$\vec{m} \cdot \vec{B}$ kann man sich als eine Art Potential denken. Damit lassen sich magnetische Spiegel bauen (z.B. in Fusionsreaktoren oder vielleicht auch bei kosmischen Strahlen). Dabei wird das Magnetfeld so angelegt, dass ein Potentialtrichter erzeugt wird, über den das Teilchen nicht mehr springen kann und dann zurück geht.

TODO: *Bild*

3.4 Makroskopische Gleichungen

Dies funktioniert sehr analog zur Diskussion der Dielektrika. Mit sehr vielen Stromfäden ($N = O(10^{23})$) kann das Problem nicht mehr analytisch gelöst werden. Außerdem haben die einzelnen Teilchen auch schon eigene magnetische Momente. Dies macht wieder eine Mittelung notwendig. Da das mikroskopische Feld quellenfrei ist, muss auch das makroskopische das erfüllen, also

$$\nabla \cdot \vec{B}_{\text{mikro}} = 0 \implies \nabla \cdot \vec{B}_{\text{makro}} = 0$$

Aus Übersichtlichkeit schreiben wir

$$\vec{B}_{\text{makro}} = \vec{B}$$

in diesem Kapitel. Also lässt sich \vec{B} wieder schreiben als

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Wir führen die Magnetisierung ein

$$\vec{M}(\vec{x}) = \sum_i N_i \langle \vec{m}_i \rangle x$$

mit N_i der mittleren Anzahl der Moleküle des Typs i , die in einem Volumen enthalten sind. $\langle \vec{m}_i \rangle$ ist der mittlere molekulare magnetische Moment eines kleinen Volumens um

den Punkt \vec{x} . Dann ist

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{1}{c} d(\mathbf{x}')^3 \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + c \frac{\vec{M}(\vec{x}') x(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} + \dots \\ &= \frac{1}{c} d(\mathbf{x}')^3 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \left[\vec{j}(\vec{x}') + c \nabla' \times \vec{M}(\vec{x}') \right]\end{aligned}$$

Die Klammer ist wieder eine Art effektive Stromdichte. Es ist dann

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + 4\pi \nabla \times \vec{M} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Achtung: Diese Gleichungen sind nur Näherungen (Taylorentwicklung usw.)

Ähnlich zur Elektrostatik definieren wir zu B der magnetischen Induktion das magnetische Feld

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}$$

und können damit schreiben

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Wider fehlt eine Verknüpfungsgleichung zwischen \vec{H} und \vec{B} , also $\vec{H}[\vec{B}]$. Im allgemeinen Fall ist dieses Funktional sehr kompliziert. In einem isotropen, homogenen und linearen Medium (wie in der Elektrostatik) können wir die magnetische Suszeptibilität χ_{mag} definieren, mit

$$\vec{M} = \chi_{\text{mag}} \vec{H}$$

Daraus ergibt sich die relative Permeabilität $\mu = 1 + 4\pi \chi_{\text{mag}}$:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Nur in diesem Fall handelt es sich um Konstanten. Je nach der Permeabilitätszahl unterscheidet man drei verschiedene Arten vom magnetischen Stoffen:

Diamagnetismus Diamagnete enthalten keine permanenten magnetischen Dipole. Es gibt nur reine induzierte Effekte. Somit kann dieser Magnetismus in allen Stoffen

auftreten. Im Falle des Diamagnetismus ist

$$\chi_{\text{mag}} < 0$$

damit der Effekt dem induzierten Effekt entgegenwirkt. Grob gesagt ist dann χ_{mag} konstant und sehr klein (typisch -10^{-5})

Supraleiter In einem Supraleiter ist das resultierende Feld $\vec{B} = 0$. Es entstehen immer Ströme im Material, die gerade das äußere Feld aufheben. Es ist dann

$$\chi_{\text{mag}} = -\frac{1}{4\pi}$$

Es handelt sich also um einen perfekten Leiter und einen perfekten Diamagneten.

Paramagnetismus Der Stoff enthält permanente Dipole, die durch das äußere Feld ausgerichtet werden und das innere Feld verändern. Dann ist

$$\chi_{\text{mag}} > 0$$

Bei steigender Temperatur wird diese Ausrichtung immer schwieriger, deshalb ist die Suszeptibilität von der Temperatur abhängig.

Kollektiver Magnetismus Auch hier gibt es permanente Dipole, die sich (unter einer gewissen Temperatur T^*) spontan im Feld parallel ausrichten (Weißsche Bezirke). Auch ohne Feld bleiben die Dipole dann ausgerichtet.

- (1) Ferromagnetismus: Die Sprungtemperatur ist dann die Curietemperatur. Bei $T = 0$ sind die Dipole alle perfekt parallel ausgerichtet.
- (2) Ferrimagnetismus: In diesen Materialien gibt es verschiedene Dipoltypen mit verschiedenem \vec{M} und bei $T = 0$ können die beiden Dipoltypen verschieden ausgerichtet sein (z.B. antiparallel).
- (3) Antiferromagnetismus: Dort ist gerade für zwei Dipoltypen $\vec{M}_1 = -\vec{M}_2$ und bei Temperatur $T = 0$ ist die insgesamt Ausrichtung Null, da die beiden Dipoltypen sich gerade aufheben.

3.4.1 Trennflächen zwischen Materialien

TODO: *Bild*

Die Grenzbetrachtung liefert

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = 0 \quad (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \hat{n} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Kapitel 4

Elektrodynamik

4.1 Stationäre Probleme

Wir haben betrachtet

$$\rho(\vec{x}) \rightarrow \vec{E}(\vec{x})$$

wobei das \vec{E} -Feld nur ein mathematisches Konzept war, das wir nicht messen können (nur die Kraft auf eine Probeladung). Außerdem

$$\vec{j}(\vec{x}) \rightarrow \vec{B}(\vec{x})$$

Wir konnten dann Punktladungen und Stromfäden definieren mit

$$\rho = \sum_i q_i \delta(x - x_i) \quad \vec{j} = \sum_i q \vec{v}_i \delta(x - x_i)$$

Faraday Experiment (1831): Von den vielen Experimenten werden jetzt drei wichtige ausgewählt:

TODO: Bild

Durch An- und Ausschalten der ersten Schleife wird in der zweiten Schleife ein Strom induziert.

TODO: Bild

Durch Bewegen der Schleife wird ebenfalls ein Strom induziert.

TODO: Bild

Auch durch Bewegen eines Magneten wird ein Strom induziert.

4.1.1 Das Faradaysche Induktionsgesetz

Wir definieren die elektromotorische Kraft (EMK):

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{l}$$

wobei \vec{E}' das elektrische Feld an der Stelle des Linienelementes ist. Auch definieren wir den magnetischen Fluss

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, da$$

Faraday fand jetzt, dass

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

(die Änderung muss negativ sein, sonst ist die Energie nicht erhalten (Lenz 1834, von Helmholtz 1847))

4.1.2 Differentialgleichungen

Betrachten wir eine bewegte Schleife C mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} . Dann ist

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v}) + \underbrace{\vec{v} (\nabla \cdot \vec{B})}_{=0}$$

Mit Faraday und Stokes findet man

$$\oint_C (\vec{E}' - \frac{v}{c} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} \, da$$

Bei kleinen Geschwindigkeiten $|\vec{v}| \ll c$ kann man die Galileitransformation anwenden und erhält

$$= \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

mit dem Feld \vec{E} , was das Laborsystem ist (das für einen ganz kurzen Moment in Ruhe ist).

Es ist dann

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{v}{c} \times \vec{B}$$

Für $\vec{v} = 0$ ist C in Ruhe und es ist $\vec{E}' = \vec{E}$, also im Laborsystem

$$\int_S \left(\nabla \times E + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} \, da = 0$$

Da S und C beliebig gewählt wurden, muss gelten

Definition : Faradaysche Feldgleichung

$$\nabla \times E(\vec{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t}$$

Faraday um 1831 : Experiment führte zum Feldkonzept.

Gedankenexperiment (post-Edinsonsche): Im Vakuum

TODO: Bildeinbinden

Nachtrag: Energie des Magnetischen Feldes

Mit Faradaysche Feldgleichung und der Ampereschen Gleichung $\nabla \times \vec{H} \propto \vec{j}$ Mit viel Argumentation folgt

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int d^3x \vec{H} \cdot \delta \vec{B}$$

Somit folgt in einem linearem Medium

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{H} \cdot \vec{B}$$

Von Gauss und Coulomb folgt

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho(\vec{x}) \quad (1)$$

Von Ampere folgt

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (2')$$

Die Kein-Monopol-Gleichung

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

Mit den Verknüpfungsgleichungen

$$\vec{D} = \vec{D}[\vec{E}] \quad \vec{H} = \vec{H}[\vec{B}]$$

Mit Faraday folgt die zeit-abhängige Gleichung

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (4.1)$$

Maxwell(1864) Inkonsistenz von 2' für Dynamik. Mit $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0$ folgt in 2' $\nabla \cdot \vec{j} = 0$.
Widerspruch zur Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Mit 1 folgt

$$\nabla \cdot \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

Maxwell schlägt Substitution vor in 2' mit $\vec{j} \rightarrow \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.
Ganze Klassische Physik

Definition der Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho(\vec{x}) \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

Verknüpfungsgleichungen

$$\vec{D} = \vec{D}[\vec{E}] \quad \vec{H} = \vec{H}[\vec{B}]$$

Definition der Elektromagnetischen Kraft

Lorentz:

$$\vec{F}_{em} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

Nach Newton gilt

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Wobei der Impuls relativistisch ist nach Einstein mit

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}}$$

Weiterhin folgt nach Newton für die Gravitation (nicht relativistisch)

$$\vec{F}_{grav} = -Gm_1m_2 \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

Daraus folgt in der ART

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi QT_{\mu\nu}$$

Dies entspricht der Poisson-Gleichung $\nabla^2\phi = -4\pi\rho$

Die mathematische Crux der Maxwell-Gleichungen

Satz Zerlegungssatz

Sei ein Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r})$ gegeben, mit $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ und $\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \vec{E} = 0$.

Schreibe

$$\vec{E} = \vec{E}_l + \vec{E}_t$$

Wobei

$$\nabla \times \vec{E}_l = 0 \quad \nabla \cdot \vec{E}_t = 0$$

(Durch Fouriertransformation folgt $\vec{k} \times \vec{E}_l = 0, \vec{k} \cdot \vec{E}_t = 0$) mit

$$\vec{E}_l = \nabla \alpha \quad \vec{E}_t = \nabla \times \vec{\beta}$$

Wobei

$$\alpha(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|}$$

$$\vec{\beta}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\nabla \times \vec{E}(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|}$$

Satz Eindeutigkeitsatz

$\vec{E}(\vec{r})$ ist eindeutig festgelegt, wenn für \mathbb{R}^3 Quellen $\nabla \cdot \vec{E}$ und Wirbel $\nabla \times \vec{E}$ bekannt sind.

4.2 Potentiale

Laut Maxwell gilt mit (3): $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ Somit folgt mit Zerlegungssatz

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Somit folgt für die Faraday-Gleichung (4) :

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \implies \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$$

4.2.1 Eichungen

Allein mit diesem Ansatz sind die Gleichung (3) und (4) schon gelöst! Nun setzen wir in die inhomogenen Gleichungen ein:

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -4\pi\rho \quad (4.2)$$

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot A + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (4.3)$$

Diese Gleichungen sind gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Sehr schwer zu lösen! Also werden wir die Gleichungen entkoppeln durch Wahl einer geschickten Eichtransformation

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda(\vec{x}, t) \quad \phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Lambda$$

Unter dieser Wahl ist natürlich das \vec{B} - und \vec{E} -Feld invariant. Wir versuchen jetzt das Λ so zu wählen, dass die Gleichungen sehr geschickt gelöst werden können.

Lorentzeichung Dies ist der Fall bei der **Lorentzeichung** (Beweis für Wohldefiniertheit siehe später), bei der gilt

$$\nabla \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi' = 0$$

Die Gleichungen lauten bei dieser Eichung:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi' = -4\pi\rho \quad (???)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A}' = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (???)$$

Mit dem D'Alembertsche Differentialoperator

$$\square = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$$

lautet die Gleichung ganz einfach

$$\square \begin{pmatrix} \phi' \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = -\frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} c\rho \\ \dot{j}_1 \\ \dot{j}_2 \\ \dot{j}_3 \end{pmatrix} \quad \square A_\mu = -\frac{4\pi}{c} j_\mu \quad \text{und die Eichung war: } \partial_\mu A^\mu = 0$$

Diese Eichung hat schon relativistische Eigenschaften!

Um die Lorentzeichung zu erreichen, benötigt man für die Transformation

$$(\vec{A}, \phi) \rightarrow (\vec{A}', \phi')$$

mit der Eigenschaft

$$\nabla \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0$$

also das $\Lambda = \Lambda[\vec{A}, \phi]$. Wir finden

$$\text{div} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Lambda = 0$$

Also

$$\square \Lambda = \left[-\nabla \cdot \vec{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]$$

Dies ist nach Λ lösbar (weil alles andere bekannt ist) mit der Greenschen Funktion des D'Alembert-Operators (später).

Coulombeichung Wir könnten auch einfach eine andere Eichung wählen, die erst einmal nicht relativistisch ist. Zum Beispiel mit der **Coulombeichung** (Transversale Eichung oder Strahlungseichung), die zur Eigenschaft führt:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

Unter dieser Eichung lauten unsere Gleichungen (??)

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho \quad (???)$$

mit der schon bekannten Lösung

$$\phi(\vec{x}, t) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Das momentane Coulombpotential ϕ zur Zeit t wird also von allen Ladungen (überall!!) zur gleichen Zeit t bestimmt (klingt sehr unrelativistisch!). Die Gleichung (??) wird dann zu

$$\square \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (???)$$

Die Lösung von oben kann dort eingesetzt werden und man erhält (siehe unten)

$$= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{transversal}}$$

wobei der Transversalteil von \vec{j} der Teil ohne Divergenz ist. Wir können \vec{j} nämlich schreiben mit

$$\vec{j} = \vec{j}_l + \vec{j}_t \quad \nabla \times \vec{j}_l = 0 \quad \nabla \cdot \nabla \vec{j}_t = 0$$

nach dem Zerlegungssatz. Es gilt für die einzelnen Komponenten:

$$\vec{j}_l = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int d^3x' \frac{\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad \vec{j}_t = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Mit der Kontinuitätsgleichung

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \phi} = -\nabla \cdot \vec{j} = -\nabla \cdot \vec{j}_l$$

Also vereinfacht und zusammengefasst

$$\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = 4\pi \vec{j}_l$$

und damit die Behauptung von oben.

Wenn die Ladungsdichte im betrachteten Punkt $\rho = 0$ ist, dann ist auch $\phi = 0$. In diesem Fall ist

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \implies \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$$

wobei \vec{A} durch die Gleichung

$$\square \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{trans}}$$

gegeben war.

4.2.2 Greensche Funktion der Wellengleichung

Wir betrachten wieder die Maxwell'schen Gleichungen in der Lorenzform. Dabei hatten wir Gleichungen wie:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi \rho$$

Wir nehmen an: es gibt keine Randflächen und wir betrachten nur ein dispersionsfreies Medium.

Wiederholung: Fouriertransformation Jede Funktion ψ lässt sich schreiben als

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\psi}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t}$$

mit der inversen Fouriertransformation

$$\tilde{\psi}(\vec{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \psi(\vec{x}, t) e^{i\omega t}$$

Wir fouriertransformieren jetzt unsere Gleichung und erhalten die Helmholtzgleichung:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\vec{x}, \omega) = -4\pi \tilde{f}(\vec{x}, \omega)$$

mit dem Wellenvektor $k = \omega/c$. Diese Differentialgleichung ist eine elliptische PDE. Um sie zu lösen, suchen wir die Greensche Funktion zu dem Operator

$$(\nabla^2 + k)G_k(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Aus Symmetriegründen ist G_k eigentlich nur eine Funktion des Abstandes $R = |\vec{x} - \vec{x}'|$, also

$$G_k = G_k(R)$$

Wir schreiben dies um in Kugelkoordinaten und erhalten die gewöhnliche Differentialgle-

ichung

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (RG_k(R)) + k^2 G_k = -4\pi \delta(R)$$

Für $R \neq 0$ ist die Gleichung einfach die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators für RG_k . Die Lösung ist also gegeben durch

$$RG_k = Ae^{ikR} + Be^{-ikR}$$

Für $kR \leq 1$ erhalten wir in etwa die Poisson-Gleichung mit einer Punktladung, also

$$\lim G_k(R) = \frac{1}{R}$$

Um dies zu erhalten, setzen wir $B = 1 - A$ und erhalten

$$G_k(R)AG_k^+ + (1 - A)G_k^- \quad G_k^\pm = \frac{e^{\pm ikR}}{R}$$

Die Rücktransformation in den Zeitraum ist für G_k^+ eine Kugelwelle nach außen mit dann

$$e^{i(kR - \omega t)}$$

Das G_k^- ist zwar mathematische auch eine Lösung, aber aufgrund der Zeitrichtung nicht physikalisch. A wird durch die zeitlichen Randbedingungen bestimmt.

Die zeitabhängige Greensche-Funktion G_k von \square Wir betrachten jetzt die Gleichung

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\vec{x}, t, \vec{x}', t') = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t')$$

Die Lösung ergibt sich einfach durch Zusammensetzen den bisherigen Ergebnisse. Setze dazu

$$R = |\vec{x} - \vec{x}'| \quad \tau = |t - t'|$$

und dann

$$G^\pm = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{\pm ikR - i\omega\tau}}{R} = \frac{1}{R} \delta\left(\tau \mp \frac{R}{c}\right)$$

mit $k = \omega/c$. G^+ nennen wir retardierte, G^- die avancierte Greensche-Funktion.

Damit lässt sich jetzt die allgemeine inhomogene Wellengleichung

$$\square\psi = -4\pi\rho$$

lösen als

$$\psi^\pm(\vec{x}, t) = \int \int d^3x' dt' G^\pm(\vec{x}, t, \vec{x}', t') f(\vec{x}', t') + \text{homogene Lösung}$$

Beispiel: Quellverteilung die zeitlich und räumlich beschränkt ist Außerdem soll für $t = -\infty$ die eingehende Welle ψ_m eine Lösung der homogenen Wellengleichung sein. Also ist

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi_m(\vec{x}, t) + \int d^3x' dt' G^+(\vec{x}, t, \vec{x}', t') f(\vec{x}', t') = \psi_m(\vec{x}, t) + \int d^3x' \frac{f\left(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

TODO: Bild

Das Feld jetzt an einem Punkt wird also durch das Feld bestimmt, das sich in einer Entfernung zur Zeit davor befunden hat.

Zusammenfassung:

Wir gingen aus von den Maxwellgleichungen:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Um sie zu lösen, führten wir die Lorentzgleichung ein und

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Jetzt können wir auch die Lösungen für \vec{A} und ϕ angeben, als

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = \int d^3x' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \begin{pmatrix} \rho(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}) \\ \vec{j}(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}) \end{pmatrix}$$

Also wird das hier und jetzt bestimmt durch die Felder und Ladungen mit einem früheren Raumzeitabstand (Minkowski-Metrisch).

4.3 Erhaltung von Energie und Impuls

An einer einzelnen Ladung q geleistete Arbeit pro Zeiteinheit ist

$$\frac{\Delta \vec{x} \cdot \vec{F}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) = q\vec{v} \cdot \vec{E}$$

Kontinuierlich ist das also

$$\int_V d^3x \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Wir benutzen jetzt die Maxwellgleichungen (2) und

$$\int d^3x \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \int d^3x c \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

und die Identität

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

liefert

$$= \frac{1}{4\pi} \int dx^3 \left[c \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - c \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

jetzt benutzen wir die Maxwellgleichung (3) und erhalten

$$= -\frac{1}{4\pi} \int d^3x \left[c \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

Die gesamte elektromagnetische Energiedichte wird definiert als

$$u = \frac{1}{8\pi} \left(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2 \right) \quad [u] = \text{cal/cm}^3$$

und der Poyntingsche Vektor als

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad [\vec{S}] = \text{cal/cm}^3/\text{s}$$

Damit lässt sich schreiben

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

$\vec{j} \cdot \vec{E}$ beschreibt die Umwandlung elektromagnetischer Energie in mechanische Energie (inkl.

Wärmeenenergie):

$$\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{dE_{\text{mech}}}{dt} \quad E_{\text{Feld}} = \int_V u$$

Dies liefert außerdem noch

$$\frac{d}{dt}(E_{\text{mech}} + E_{\text{Feld}}) = - \oint_{\partial V} \hat{n} \cdot \vec{S} \, da$$

Für den linearen Impuls gilt

$$\frac{d\vec{p}_{\text{mech}}}{dt} = \int_V d^3x (\rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B})$$

Diesmal benutzen wir die Maxwellgleichung (1) und (2):

$$\begin{aligned} \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} &= \frac{1}{4\pi} \left[\vec{E}(\nabla \cdot \vec{E}) - \frac{1}{c} \vec{B} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\vec{E}(\nabla \cdot \vec{E}) + \vec{B}(\nabla \cdot \vec{B}) + \frac{1}{c} \underbrace{\vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{=\nabla \times \vec{E}} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{B} \times \nabla \times \vec{B} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\vec{E}(\nabla \cdot \vec{E}) + \vec{B}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \right] - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\vec{p}_{\text{Feld}} = \int_V d^3x \frac{1}{4\pi c} (\vec{E} \times \vec{B})$$

und den Maxwellischen Spannungstensor

$$T_{mn} = \frac{1}{4\pi} \left[E_m E_n + B_M B_n - \frac{1}{2} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) \delta_{mn} \right]$$

und damit lässt sich schreiben

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_{\text{mech}} + \vec{p}_{\text{Feld}})_l = \sum_m \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial x_m} T_{lm} = \oint_{\partial V} d\vec{a} T_{lm} \hat{n}_m$$

Wir haben also hier Impuls- und Energieerhaltung gefunden!

4.4 Harmonische Zeitabhängigkeit oder \mathbb{R} vs. \mathbb{C}

Alle Felder haben eine harmonische Zeitabhängigkeit mit ωt .

Wir sind uns sicher, dass $\vec{E}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^3$, also lässt sich schreiben

$$\vec{E}(\vec{x}) = \Re[\vec{E}(\vec{x})e^{-i\omega t}] = \frac{1}{2} \left(\vec{E}e^{-i\omega t} + \vec{E}^*e^{i\omega t} \right)$$

Mit diesem Wissen ist

$$\vec{j}(\vec{x}, t) \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4} \left[\vec{j}e^{-i\omega t} + \vec{j}^*e^{i\omega t} \right] \cdot \left[\vec{E}e^{-i\omega t} + \vec{E}^*e^{i\omega t} \right] = \frac{1}{2} \Re \left(\underbrace{\vec{j}^* \cdot \vec{E} + \vec{j} \cdot \vec{E}}_{e^{2i\omega t}} \right)$$

fällt durch Zeitmittelung weg

Somit ist z.B. das zeitliche Mittel der geleisteten Arbeit gegeben durch

$$\Re \left(\frac{1}{2} \int d^3x \vec{j}^* \cdot \vec{E} \right)$$

4.5 Ebene elektromagnetische Wellen

Unser betrachtetes Medium habe eine konstante Permeabilität und Suszeptibilität ($\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \mu \vec{H} = \vec{B}$). Außerdem sollen keine freien Ladungen und Ströme vorhanden sein ($\rho = \vec{j} = 0$). Unsere Maxwellgleichungen lauten in diesem Spezialfall

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Nun haben wir noch

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

Nun leiten wir daraus her:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = 0 \implies \nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Daraus folgt

$$\frac{c}{\mu \epsilon} \left(-\nabla^2 \vec{B} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

und dann für \vec{E} :

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{\mu \varepsilon}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

und dann

$$c \nabla^2 \vec{E} - \frac{\mu \varepsilon}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Insgesamt finden wir also zwei Wellengleichungen:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = 0$$

v wird dann auch **Phasengeschwindigkeit** genannt mit

$$v = \frac{c}{n} \quad \text{Brechungsindex: } n = \sqrt{\mu \varepsilon}$$

4.5.1 Lösung der Wellengleichungen

1. Schritt: Sei u ein Skalarfeld

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(\vec{x}, t) = 0$$

Wir wählen den Ansatz

$$u(\vec{x}, t) = e^{\pm i \vec{k} \cdot \vec{x} - i \omega t}$$

und dieser liefert und die s.g. **Dispersionsbeziehung**

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} n$$

Ist jetzt $\vec{k} \parallel \vec{x}$, dann ist

$$u(\vec{x}, t) = A_k e^{ikx - i\omega t} + B_k e^{-ikx - i\omega t} = A_k e^{ik(x-vt)} + B_k e^{-ik(x+vt)}$$

Eine Fouriertransformation liefert die allgemeine Lösung (mit f und g beliebige Funktionen)

$$u(\vec{x}, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

2. Schritt: Jetzt betrachten wir noch den Vektorcharakter von \vec{E} und \vec{B} : Wieder

machen wir den Ansatz von oben und erhalten

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{\mathcal{E}} e^{ik\vec{x}\cdot\hat{n} - i\omega t} \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{\mathcal{B}} e^{ik\vec{x}\cdot\hat{n} - i\omega t}$$

mit $\mathcal{E}, \mathcal{B}, \hat{n}$ räumlich und zeitlich konstant und \hat{n} reell (die anderen beiden komplex). Setze wir dies in die Wellengleichung ein, so erhalten wir wieder die Dispersionsbeziehung:

$$k^2 = \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}$$

In die beiden Divergenzgleichungen der Maxwellgleichungen eingesetzt, erhalten wir:

$$\hat{n} \cdot \vec{\mathcal{E}} = \hat{n} \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0$$

Wir wissen also jetzt schon, dass es nur Transversalwellen geben kann. Die Rotationsgleichungen liefern uns

$$\vec{\mathcal{B}} = \sqrt{\mu\varepsilon} \hat{n} \times \vec{\mathcal{E}}$$

Also sind die drei Vektoren $\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{E}}$ und die Ausbreitungsrichtung \hat{n} orthogonal zueinander. Betrachten wir dies näher: Die Gleichung 2 liefert uns:

$$ik\hat{n} \times \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c}i\omega\vec{\mathcal{B}} = 0 \implies \vec{\mathcal{B}} = \frac{ck}{\omega}\hat{n} \times \vec{\mathcal{E}} = \sqrt{\mu\varepsilon}\hat{n} \times \vec{\mathcal{E}}$$

Überprüfen wir noch die Gleichung 4:

$$ik\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}} + \frac{\mu\varepsilon}{c}i\omega\vec{\mathcal{E}} = 0 \implies \vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}$$

Die letzte Gleichung liefert uns:

$$\hat{n} \times \hat{n} \times \vec{\mathcal{B}} = -\sqrt{\mu\varepsilon}\hat{n} \times \vec{\mathcal{E}} = (\hat{n} \cdot \vec{\mathcal{B}})\hat{n} - \vec{\mathcal{B}} = -\vec{\mathcal{B}}$$

und damit das gleiche Resultat. Gleichungen und Ansatz liefern also eine gewisse Konsistenz. Unsere Lösung ist also richtig.

Insgesamt sind die komplexen Vektoren $\vec{\mathcal{B}}$ und $\vec{\mathcal{E}}$ also in der gleichen Phase. Da sie auch noch senkrecht aufeinander stehen, bietet es sich an, ein Orthonormalsystem $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{n}$ zu wählen. TODO: Bild Für die Welle unterscheiden wir dann zwei Fälle:

(a) Lineare Polarisation:

$$\vec{\mathcal{E}} = \hat{e}_1 E_1 \quad \vec{\mathcal{B}} = \hat{e}_2 \sqrt{\mu\varepsilon} E_1 \quad E_1 \in \mathbb{C}$$

Der Energiestrom ist dann gegeben durch:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu} \right)^* = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |E_1|^2 \hat{n}$$

und damit reell und somit physikalisch messbar. Das zeitliche Mittel der Energiedichte ist (siehe auch oben):

$$u = \frac{1}{16\pi} \left(\varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot \vec{B}^* \right) = \frac{\varepsilon}{8\pi} |E_1|^2$$

Also insgesamt

$$|\vec{S}| = u \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = uv_{\text{Gruppe}}$$

wie wir später noch finden werden.

(b) Allgemeinste Lösung wäre gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = (\hat{e}_1 E_1 + \hat{e}_2 E_2) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} \quad |k|^2 = \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \sqrt{\mu\varepsilon} \hat{k} \times \vec{E}$$

Sind (die jetzt komplexen) Amplituden E_1 und E_2 in Phase, so haben wir wieder den Fall oben. Haben sie verschiedene Phasen, so nennt man die Welle elliptisch polarisiert. Ein Spezialfall wäre die zirkulare Polarisation, bei der für die Phasenverschiebungen gilt

$$\varphi(E_1) = \varphi(E_2) \pm \frac{\pi}{2}$$

4.5.2 Ebene Trennfläche zweier Dielektrika

Die Fläche liege in der $z = 0$ Ebene. Darunter ist der Brechungsindex $n^2 = \mu\varepsilon$, darüber ist $n'^2 = \mu'\varepsilon'$. Die einkommende Welle kommt mit \vec{k} im Winkel α . Daraus resultieren die reflektierte und die transmittierte Welle. **TODO: Bild**

Für die einfallende Welle gilt also:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} \quad \vec{B} = \sqrt{\mu\varepsilon} \hat{k} \times \vec{E}$$

und für die gebrochene Welle:

$$\vec{E}' = \vec{E}'_0 e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x} - i\omega t} \quad \vec{B}' = \sqrt{\mu' \epsilon'} \hat{k}' \times \vec{E}'$$

und schließlich für die reflektierte Welle:

$$\vec{E}'' = \vec{E}''_0 e^{i\vec{k}'' \cdot \vec{x} - i\omega t} \quad \vec{B}'' = \sqrt{\mu \epsilon} \hat{k}'' \times \vec{E}''$$

In den jeweiligen Medien sind offensichtlich die Maxwellgleichungen (wie oben) erfüllt. Die Frage stellt sich nur, was an der Grenzflächen passiert. Die Grenzbedingungen liefern an der Grenzfläche $z = 0$:

$$i\vec{k} \cdot \vec{x}|_{z=0} = i\vec{k}' \cdot \vec{x}|_{z=0} = i\vec{k}'' \cdot \vec{x}|_{z=0}$$

Damit dies für alle x erfüllt ist, betrachten wir die Projektion des \vec{k} -Vektors. Also muss

$$\alpha'' = \alpha \quad (\text{Reflexion})$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{n'}{n} \quad (\text{Snellius})$$

Nun liefert die Tatsache, dass $\hat{n} \cdot \vec{D}$, $\hat{n} \cdot \vec{B}$, $\hat{n} \times E$ und $\hat{n} \times H$ stetig an der Grenzfläche sind, das Ergebnis:

- Lineare Polarisation mit $\vec{E} \perp (\vec{k}, \hat{n}) =$ Einfallsebene:

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{2n \cos \alpha}{n \cos \alpha + \frac{\mu}{\mu'} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \alpha}} \quad \frac{E''_0}{E_0} = \frac{n \cos \alpha - \frac{\mu}{\mu'} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \alpha}}{n \cos \alpha + \frac{\mu}{\mu'} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \alpha}}$$

Mit $\mu/\mu' = 1$ entstehen daraus die Fresnel Formeln.

- Lineare Polarisation mit $\vec{E} \parallel (\vec{k}, \hat{n})$ liefert die restlichen Fresnel Formeln.

Brewster-Winkel für lineare Polarisation parallel zur Einfallsebene und einem Medium mit $\mu = \mu'$ ergibt sich TODO: Bild Die Frage ist, wann $|E''| = 0$ gilt. Dies ist möglich für den Brewsterwinkel

$$\alpha_B = \arctan \left(\frac{n'}{n} \right)$$

Ein Beispiel wäre die Grenzfläche von Luft ($n = 1$) und Wasser ($n = 1.34$). Dafür liegt der Brewsterwinkel in etwa bei $\alpha_B = 53^\circ$. Eine unpolarisierte Welle, die in diesem Winkel auf

die Grenzfläche kommt, transmittiert dann vollständig polarisiert. **TODO: Bild**

Totalreflektion **TODO: Bild** Totalreflektion kommt gerade dann vor, wenn

$$\alpha_{TR} = \arcsin\left(\frac{n'}{n}\right)$$

Nehmen wir all dies zusammen, finden wir, dass auch Licht eine elektromagnetische Welle ist. Man setzt deshalb c als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Diese Tatsachen wurden von Maxwell 1864 und H. Hertz 1886 (in Karlsruhe) gefunden.

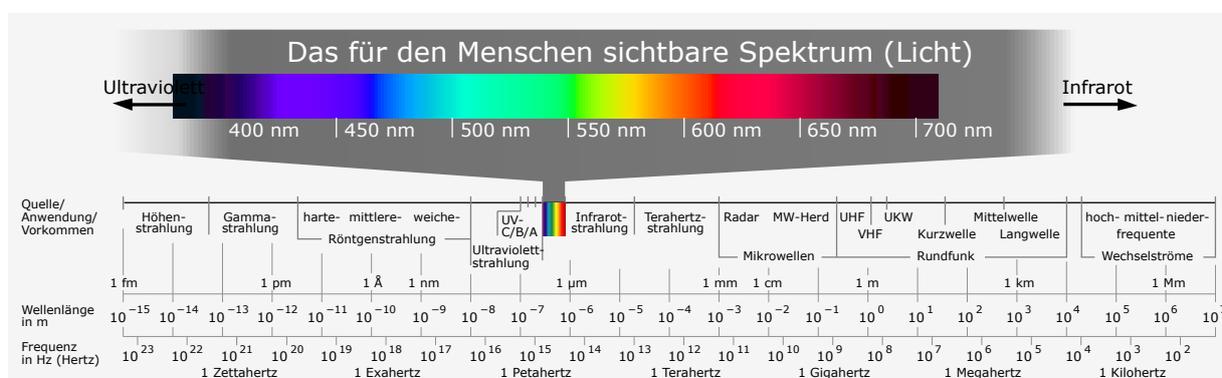


Abbildung 4.1: Elektromagnetisches Spektrum (Quelle: wikipedia.de)

4.6 Dispersion

4.6.1 Gruppengeschwindigkeit

Die Maxwellgleichungen sind linear, weshalb wir auch eine Überlagerung von Wellen (in diesem Fall nur in einer Dimension) betrachten können:

$$\omega = \omega(k)$$

Die kartesische Komponente der Gleichung von \vec{E} und \vec{B} hat die Struktur

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v_{\text{ph}}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = 0$$

Die allgemeine Lösung ist dann

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{ikx - i\omega t} \quad A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x, 0) e^{ikx}$$

Betrachten wir jetzt ein Wellenpaket

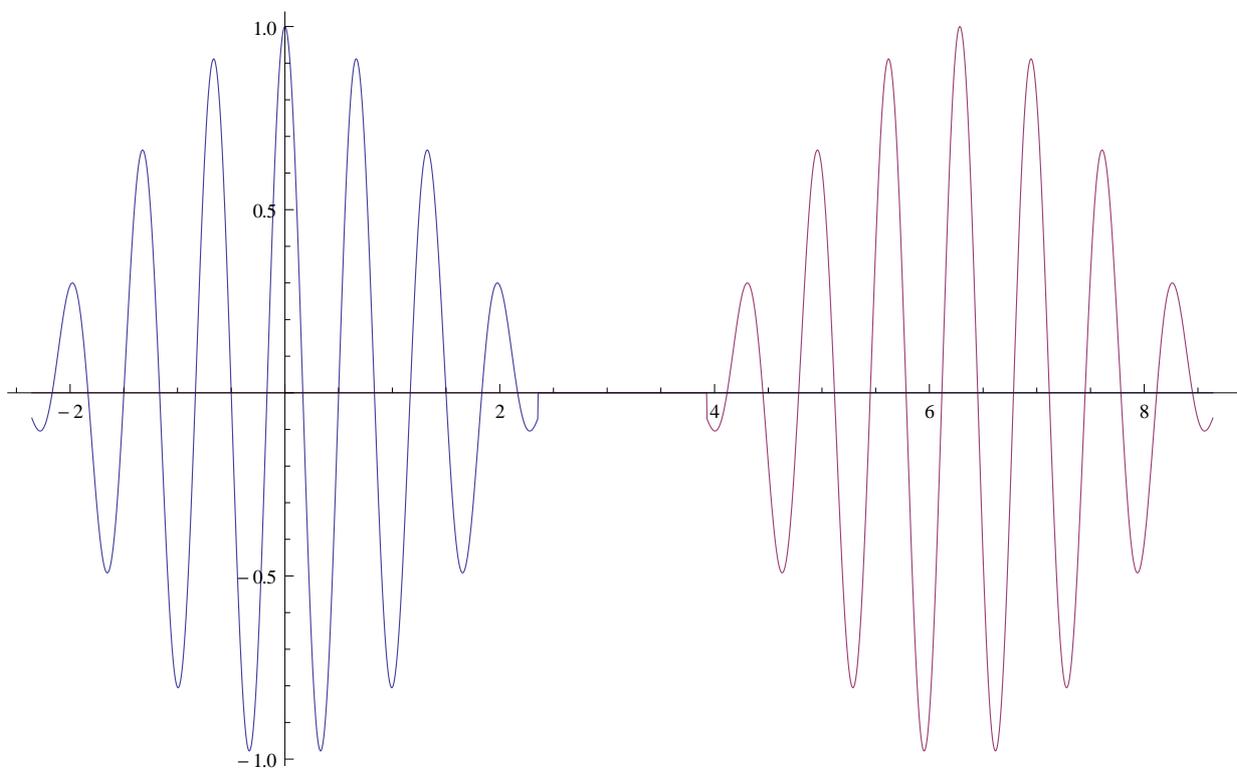


Abbildung 4.2: Wellenpaket (blau) zur Zeit $t = 0$ und zur Zeit $t > 0$ (rot)

und seine Fouriertransformation

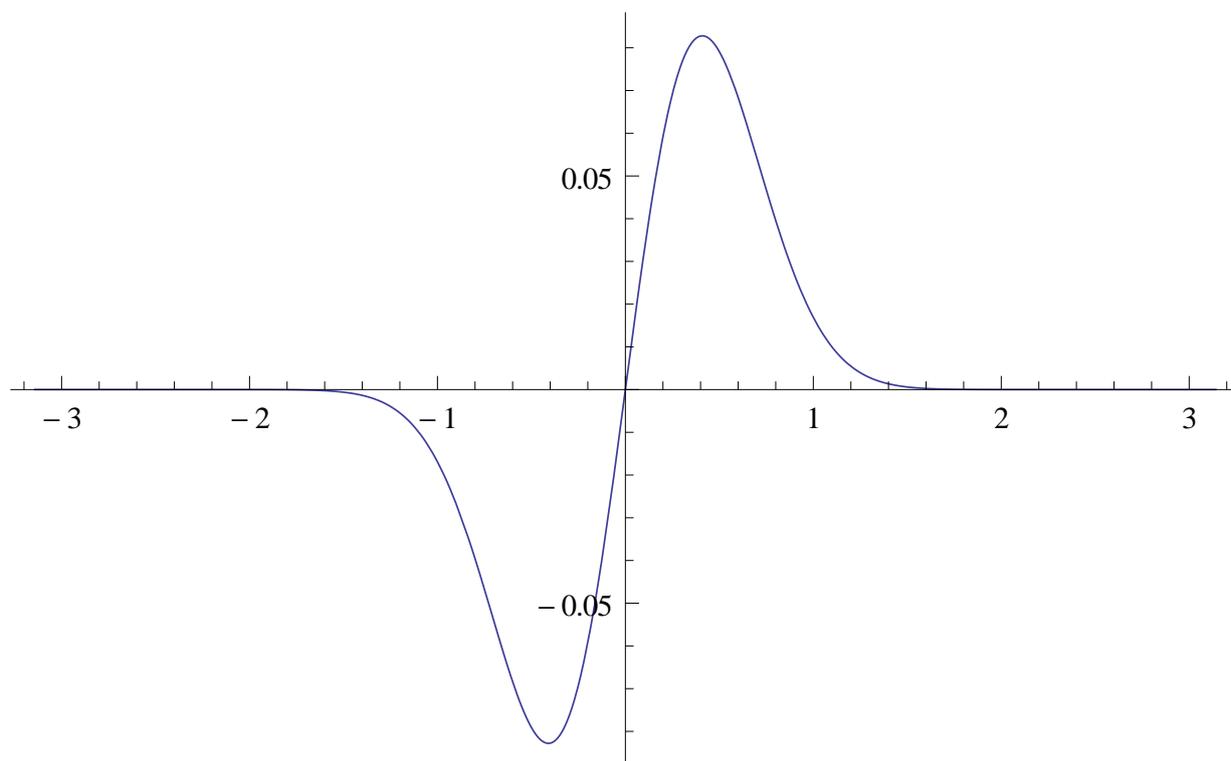


Abbildung 4.3: Symbolische Fouriertransformierte des Wellenpakets zur Zeit $t = 0$

Da k_0 eine wichtige Größe ist, betrachten wir einmal die Taylorentwicklung von ω um k_0 :

$$\omega(k) = \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0) + \dots$$

Mit diesem Wissen ist

$$u(x, t) = \underbrace{e^{(ik_0 \frac{d\omega}{dk} - \omega_0)t}}_{\text{Phasenfaktor}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int dk A(k) e^{i(x - \frac{d\omega}{dk} t)k}}_{u(x - \frac{d\omega}{dk} t, 0)}$$

Also für eine Zeit $t > 0$ das selbe Wellenpaket wie für $t = 0$, nur verschoben um eine bestimmte Strecke (in erster Näherung). Wie definieren deshalb die Gruppengeschwindigkeit als

$$v_g(k_0) = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}$$

Für die elektromagnetischen Wellen gilt aber

$$\omega(k) = \frac{ck}{n(k)} \quad n = \sqrt{\mu(k)\varepsilon(k)}$$

und damit die Phasengeschwindigkeit

$$v_{ph} = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{c}{n(k)}$$

und die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}}$$

Wir werden sehen, dass bei normaler Dispersion die Gruppengeschwindigkeit immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist.

4.6.2 Oszillatormodell für $\varepsilon(\omega)$

Wir betrachten eine Elektron gebunden durch eine harmonische Kraft, welches sich in einem äußeren elektrischen Feld befindet:

$$m(\ddot{\vec{x}} + \gamma_j \dot{\vec{x}} + \omega_j^2 \vec{x}) = e\vec{E}(\vec{x}, t)$$

mit dem Dämpfungsterm γ_j . Wir nehmen an, dass alle Felder eine harmonische Zeitabhängigkeit mit ω haben. Die Gleichung ist dann lösbar. Uns interessiert vor allem der Dipolmoment, der entsteht, also

$$\vec{p} = e\vec{x} = \frac{e^2}{m} (\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j)^{-1} \vec{E}$$

Diese Betrachtung lässt sich jetzt auf ein Gas ausdehnen, welches pro Volumeneinheit N Moleküle hat, die jeweils Z Elektronen haben. Die einzelnen Elektronen lassen sich aufteilen in verschiedene Gruppen, die jeweils eine andere Bindungsfrequenz haben:

$$f_j \text{ Elektronen haben Bindungsfrequenz } \omega_j \quad \sum f_j = Z$$

Früher hatten wir definiert

$$\vec{p} = \chi_e \vec{E} \quad \varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi_e(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \sum_j f_j \frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j}$$

mit der Oszillatorstärke f_j , den Bindungsfrequenzen ω_j und der Dämpfung γ_j .

4.7 Strahlung

Wir suchen in diesem Kapitel die Felder einer lokalisierten oszillierenden Quelle. Wir setzen erst einmal eine harmonische Zeitabhängigkeit voraus (aufgrund der Fouriertransformation ist dies keine Einschränkung). Also

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho_\omega(\vec{x})e^{i\omega t} \quad \vec{j}(\vec{x}, t) = \vec{j}_\omega(\vec{x})e^{i\omega t}$$

Physikalisch ist hier wieder nur der Realteil. Für die folgenden Probleme betrachten wir die Lorentzgleichung. Wir fanden schon die Lösung:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3x' dt' \frac{\vec{j}(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)$$

Da die Quelle harmonisch ist, muss auch \vec{A} harmonisch sein, denn es ist

$$\int dt' e^{-i\omega t'} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right) = e^{-i\omega t + i\frac{\omega}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Damit lässt sich auch \vec{A} schreiben in der Form

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}_\omega(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

mit

$$\vec{A}_\omega(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{\vec{j}_\omega(\vec{x}') e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$

Die Maxwellgleichungen liefern

$$\vec{B}_\omega = \nabla \times \vec{A}_\omega \quad \vec{E}_\omega = \frac{i}{k} \nabla \times \vec{B}_\omega$$

Diese Lösung gilt außerhalb der Quellen.

Wir wollen mit d die lineare Ausdehnung der Quelle, mit $r = |\vec{x} - \vec{x}'|$ der Abstand der Betrachtung zur Quelle und mit $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ die Wellenlänge bezeichnen. Wir unterscheiden drei Zonen:

Quasistationäre Zone (Nahzone): $d \ll r \ll \lambda$ In diesem Fall ist $kr \ll 1$ und damit

$$e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|} = e^{ikr} \approx 1$$

Außerdem hatten wir früher schon gefunden, dass $\frac{1}{r}$ durch eine Summe von Kugelflächenfunktionen darstellbar ist. Insgesamt erhält man

$$\lim_{kr \rightarrow 0} \vec{A}_\omega = \frac{1}{c} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{2^{l+1}} \int d^3x' \vec{j}_\omega(\vec{x}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \phi')$$

Der erste Term für $l = 0$ geht mit $1/r$ (alle anderen gehen mit noch niedriger Ordnung) und damit gehen \vec{E} und \vec{B} mit $1/r^2$ und außerdem radial in erster Näherung. Elektrisches und magnetisches Feld schwingen gleichförmig und scheinen sich nicht zu "bewegen".

Induktionszone: $d \ll r \approx \lambda$ sehr kompliziert zu berechnen (wird hier jetzt nicht ausgeführt)

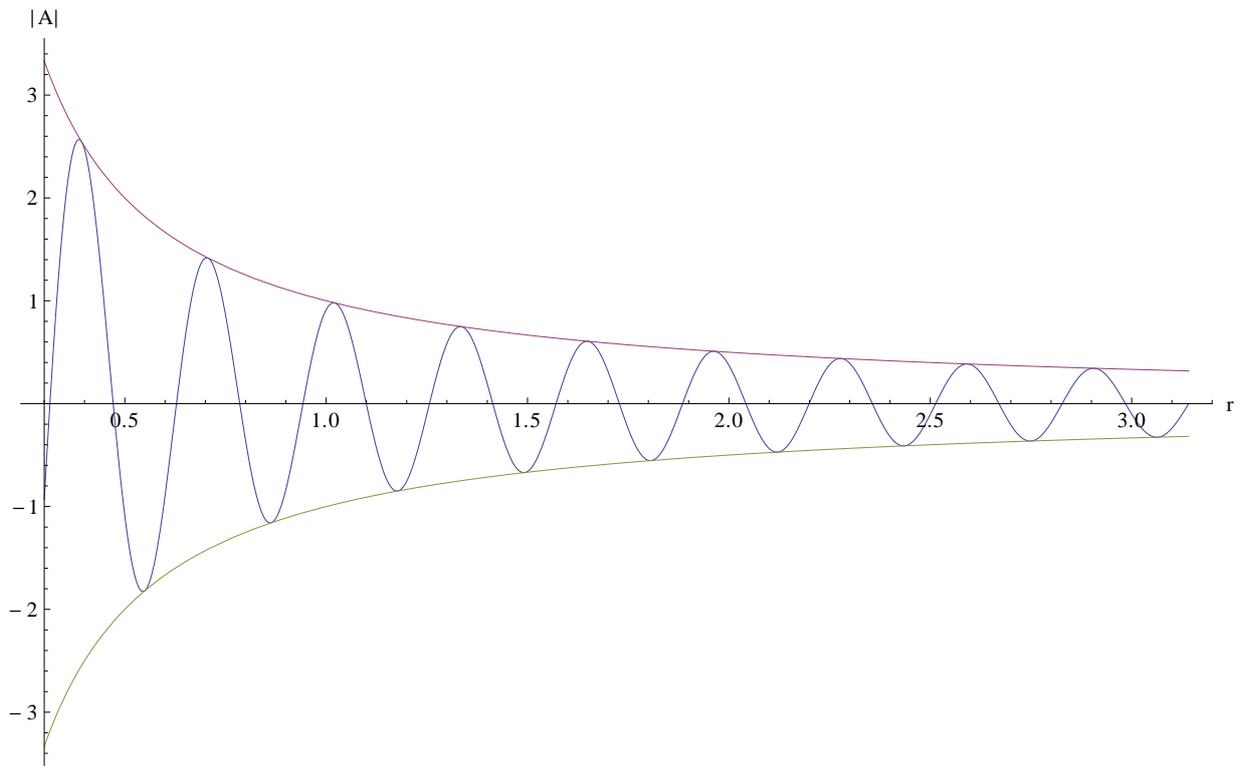
Wellenzone (Fernzone): $d \ll \lambda \ll r$ Hier ist dann

$$|\vec{x} - \vec{x}'| \approx r - \hat{n} \cdot \vec{x}'$$

wenn \hat{n} der Einheitsvektor in \vec{x} -Richtung ist. Es ist dann

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \vec{A}_\omega = \frac{e^{ikr}}{cr} \int d^3x' \vec{j}_\omega(\vec{x}') e^{-ik\hat{n} \cdot \vec{x}'}$$

Der Vorfaktor beschreibt zusammen mit der harmonischen Zeitabhängigkeit eine Kugelwelle. Das Integral liefert einen Faktor, der nur von der Richtung (also dem Winkel der Betrachtungsrichtung) abhängt. In diesem Fall gehen jetzt \vec{E} - und \vec{B} -Felder mit $1/r$. Diese nennt man dann Strahlungsfelder (die außerdem noch transversal sind - statt radial wie in der Nahzone).



Es scheint so, als würde die zeitliche Abhängigkeit des Feldes in eine räumliche Abhängigkeit des Feldes umgewandelt.

Multipolentwicklung

Wir wollen jetzt noch den winkelabhängigen Integralfaktor betrachten. Dafür machen wir eine Taylorentwicklung:

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \vec{A}_\omega(\vec{x}) = \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ik)^m}{m!} \int d^3x' \vec{j}_\omega(\vec{x}') (\hat{n} \cdot \vec{x}')^m$$

Elektrische Dipolstrahlung: $n = 0$

$$\vec{A}_\omega = \frac{e^{ikr}}{cr} \int d^3x' \vec{j}_\omega(\vec{x}')$$

Zusätzlich betrachten wir noch die Kontinuitätsgleichung, mit

$$-i\omega\rho = -\nabla \cdot \vec{j}$$

also

$$\int d^3x' \vec{j}_\omega(\vec{x}') = - \int d^3x' (\nabla' \cdot \vec{j}_\omega) = -i\omega \int d^3x' \rho(\vec{x}')$$

Dies war gerade das elektrische Dipolmoment

$$\vec{p} = \int d^3x' \rho(\vec{x}')$$

und mit diesem ist

$$\vec{A}_\omega = -ik\vec{p} \frac{e^{ikr}}{r}$$

und damit

$$\vec{B}_\omega = k^2 \hat{n} \times \vec{p} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right)$$

und das \vec{E} -Feld analog.

Fernfeld Für $kr \rightarrow \infty$ ist also

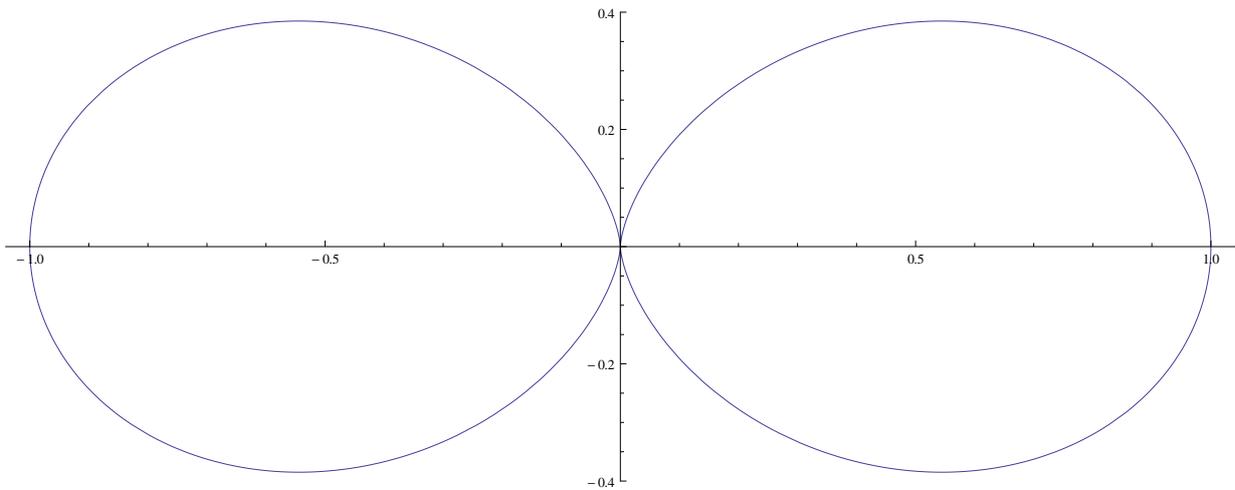
$$\vec{B}_\omega = k^2 \hat{n} \times \vec{p} \frac{e^{ikr}}{r} \quad \vec{E}_\omega = \vec{B}_\omega \times \hat{n}$$

Wir sehen, dass die Felder transversal sind und mit $1/r$ gehen. Die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkelelement Ω ist dann

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} \Re(r^2 \hat{n} \cdot \vec{E}_\omega \times \vec{B}_\omega^*) = \frac{c}{8\pi} k^4 |(\hat{n} \times \vec{p}) \times \hat{n}|^2$$

Wenn Θ der Winkel zwischen \vec{p} und \hat{n} ist, dann kann man noch schreiben:

$$= \frac{c}{8\pi} k^4 |\vec{p}|^2 \sin^2 \Theta$$



Die Gesamtleistung des Strahles ist dann:

$$P = \frac{ck^4}{3} |\vec{p}|^2$$

Nahfeld Es ist dann

$$\vec{B}_\omega = ik(\hat{n} \times \vec{p}) \frac{1}{r^2} \quad \vec{E} = (3\hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{p}) - \vec{p}) \frac{1}{r^3}$$

Damit ist

$$|\vec{B}| \ll |\vec{E}|$$

Beispiel: Lineare Antenne Eine lineare Antenne sei d lang und liege symmetrisch um den Ursprung auf der z -Achse. Auf der Antenne fließe der Strom

$$I = I_0 \left(1 - \frac{2|z|}{d} \right) e^{i\omega t}$$

Die Kontinuitätsgleichung liefert aus

$$i\omega\rho = \nabla \cdot \vec{j}$$

die Ladung pro Längeneinheit auf der Antenne

$$\tilde{\rho}(z) = \pm \frac{2iI_0}{\omega t} e^{i\omega t}$$

und damit der zeitunabhängige Teil des Dipolmomentes

$$\vec{p} = \hat{e}_z \int_{-d/2}^{d/2} z \tilde{\rho}(z) dz = \frac{iI_0 d}{2\omega} \hat{e}_z$$

Die Leistung ist dann

$$P = \left(\frac{(kd)^2}{6c} \right) \frac{I_0^2}{2} \propto \omega^2$$

Der Vorfaktor des Stromes ist der Strahlungswiderstand $R_{\text{Strahlung}}$. Er entspricht in MKSA-Einheiten $5(kd)^2 \Omega$.

Magnetische Dipolstrahlung und elektrische Quadrupolstrahlung: $n = 1$ Die magnetische Dipolstrahlung ist analog zur elektrischen Dipolstrahlung.

Elektrische Monopolstrahlung Gibt es nicht! Die ganze Zeit haben wir nur das Vektorpotential \vec{A} betrachtet. Für das Skalarpotential gilt (wir fanden das schon in der Lorentzzeichnung):

$$\phi(\vec{x}, t) = \int d^3x' dt' \frac{\rho(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)$$

Wieder können wir dies für große ENTfernungen nähern als

$$\phi \approx \frac{1}{r} \int d^3x' \rho\left(\vec{x}', t - \frac{r}{c}\right) = \frac{1}{r} Q\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

Wenn Q die Gesamtladung ist. Die Gesamtladung ist jedoch erhalten und damit für alle Zeiten gleich. Damit ist

$$\phi = \frac{Q}{r}$$

statisch und es existiert keine elektrische Monopol-Strahlung.

4.8 Bewegte Punktladung

Wir betrachten eine Punktladung auf einem gegebenen Pfad bewegt, also

$$\rho(\vec{x}, t) = q\delta(\vec{x} - \vec{R}(t)) \quad \vec{j}(\vec{x}, t) = q\dot{\vec{R}}(t)\delta(\vec{x} - \vec{R}(t))$$

Das Skalarpotential ist dann gegeben durch (mit u der Phasengeschwindigkeit)

$$\phi(\vec{x}, t) = \int d^3x' dt' \frac{\rho(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{u}\right)$$

Da es sich hier um Deltafunktionen handelt, ist dies einfach zu berechnen:

$$= q \int dt' \frac{\delta\left(t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{R}(t')|}{u}\right)}{|\vec{x} - \vec{R}(t')|}$$

Wir benutzen

$$\delta(f(t')) = \sum_{t_j} \frac{\delta(t - t_j)}{\left|\frac{\partial f}{\partial t'}\right|_{t'=t_j}}$$

wenn die t_j die Nullstellen von f sind. In unserem Fall ist

$$f = t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{R}(t')|}{u} \quad \frac{\partial f}{\partial t'} = 1 - \frac{\vec{x} - \vec{R}(t')}{u|\vec{x} - \vec{R}(t')|} \dot{\vec{R}}(t')$$

also

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{q}{|\vec{x} - \vec{R}(t_R)| - \frac{1}{u} (\vec{x} - \vec{R}(t_R)) \dot{\vec{R}}(t_R)}$$

mit

$$t_R = t - \frac{1}{u} |\vec{x} - \vec{R}(t_R)|$$

Das Vektorpotential ist (analog)

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{q\dot{\vec{R}}(t_R)/c}{|\vec{x} - \vec{R}(t_R)| - \frac{1}{u} (\vec{x} - \vec{R}(t_R)) \dot{\vec{R}}(t_R)}$$

Dies sind die so genannten Liénard-Wiechert-Potentiale. Daraus lassen sich dann alle benötigten Größen berechnen. Betrachten wir ein Beispiel mit einem Teilchen mit Geschwindigkeit weit unter der Lichtgeschwindigkeit. Die Abstrahlleistung pro Raumwinkel ist dann

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\dot{v}|^2 \sin^2 \theta$$

wenn θ der Winkel zur Beschleunigungsrichtung ist. Die Gesamtleistung ist dann (die so genannte Larmor-Formel)

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} |\dot{v}|^2$$

Kapitel 5

Spezielle Relativitätstheorie

5.1 Bezugssysteme

Wir betrachten die Newtonsche Physik in zwei Bezugssystemen $K(x, y, z)$ und $K'(x', y', z')$. Das K' -System bewege sich mit der konstanten Geschwindigkeit \vec{v} gegenüber dem System K in Richtung der y -Achse. Es gilt also die Galileische Transformation:

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$$

Die Newtonsche Mechanik ist invariant unter dieser Transformation.

Beispiel: Teilchen, die über Zweikörperpotentiale miteinander wechselwirken. Im System K' gilt die Gleichung

$$m_i \frac{d\vec{v}'_i}{dt} = -\nabla'_i \sum_{i \neq j} V_{ij}(|\vec{x}'_i - \vec{x}'_j|)$$

Nach einer Galileitransformation lauten die Beziehungen im System K :

$$\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{v}$$

und damit wider die Gleichung

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\nabla_i \sum_{i \neq j} V_{ij}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$$

Diese Tatsache nennt man *Forminvarianz*. Damit sind beide Systeme K und K' physikalisch äquivalent.

Maxwell'sche Elektrodynamik?

$$K' : \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right] \phi(x', t) = 0$$

GT führt zu System K mit

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2} \vec{v} \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \cdot \nabla) \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \right] \phi(x, t) = 0$$

Wobei $\vec{v} \cdot \nabla$ die Ableitung in Richtung \vec{v} ist.

Es gibt $7 = (2^3 - 1)$ Erklärungsmöglichkeiten Es gibt drei zu beantwortende Fragen.

- (I) Newtonsche Bewegungsgleichungen
- (II) Maxwell Gleichung
- (III) Galileiinvarianz

(1) I korrekt, II nicht korrekt, III

(7) I nicht korrekt, II korrekt, III nicht korrekt (Einstein 1905, SRT)

Dazwischen variieren alle möglichen Aussagen. (7) führt zur Lorentztransformation.

5.2 SRT : zwei Postulate

Die Richtigkeit der Postulate folgt nur aus dem Experiment.

P1 : Postulat der Relativität Die Physikalischen Gesetze und die Ergebnisse aller Experimente, die in einem bestimmten Bezugssystem ausgeführt werden, sind unabhängig von der Translationsbewegung des Systems als Ganzes. (d.h. 'äquivalente Euklidische Bezugssysteme, die sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig zueinander bewegen.)

P2 : Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit Die Geschwindigkeit des Lichts im Vakuum ist unabhängig von der seiner Quelle.

Spezielle Lorentztransformation

$K(t, x, y, z), K'(t', x', y', z')$. System K' und K mit Relativgeschwindigkeit $v\vec{e}_x$ fallen zur Zeit $t = t' = 0$ zusammen.

Lorentztransformation

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

$$x' = \gamma (x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Inverse Transformation

$$t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right)$$

$$x = \gamma (x' + vt')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

Wellenfront in System K :

$$c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

Wellenfront in System K' nach P2

$$c^2t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0$$

Hypothese : $x' = x'(x, y, z, t), t' = t'(x, y, z, t)$ seien lineare Transformation. Dies ergibt die Lorentztransformationen.

Sei nun $y = z = 0$. Also

$$\begin{aligned}
 c^2 t'^2 - x'^2 &= \frac{c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)^2 - \frac{(x - vt)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(c^2 t^2 - 2vxt + \frac{v^2 x^2}{c^2} - x^2 - v^2 t^2 + 2vxt \right) \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(c^2 t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - x^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right) \\
 &= c^2 t^2 - x^2
 \end{aligned}$$

Herleitung der inversen Transformation: Nach dem ersten Postulat einfach v durch $-v$ in der Lorentztransformation ersetzen.

Bemerkungen

(i) $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ liefert die Galileitransformation.

(ii) Wellenfront Ableitung ist nicht Galileinvariant.

Transformation der Geschwindigkeit $u_x = \frac{dx}{dt}, u'_x = \frac{dx'}{dt'}$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad t' = \frac{t - \beta \frac{x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Wobei

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Damit

$$\begin{aligned}
 u'_x &= \frac{dx'}{dt'} \\
 &= \frac{dx' dt}{dt dt'} \\
 &= \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{dt}{dt'} \\
 \frac{dt'}{dt} &= \frac{1 - \beta \frac{u_x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \left(\frac{dt}{dt'} \right)^{-1} \\
 u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \\
 \begin{pmatrix} u'_y \\ u'_z \end{pmatrix} &= \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \begin{pmatrix} u_y \\ u_z \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Beispiel $u_x = c$

$$u'_x = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = c$$

5.2.1 Experimente

E1: Aberation (Bradley 1727) z.B. Stern am Zenith. Man betrachtet einen Stern K im Sternensystem am Zenith, der Licht ausstrahlt $\vec{u} = (0, -c, 0)$. Im System der Erde sieht man K' mit

$$\vec{u}' = (-v, -c\sqrt{1 - \beta^2}, 0)$$

wieder mit $\beta = \frac{|v|}{c}$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$. Sei der Winkel Θ' zwischen u'_y und \vec{u}' . Wir machen folgende Näherung

$$\tan \Theta' = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx \beta$$

mit $|\beta| \leq 1$. Für unsere Erde und den betrachteten Stern gilt nun

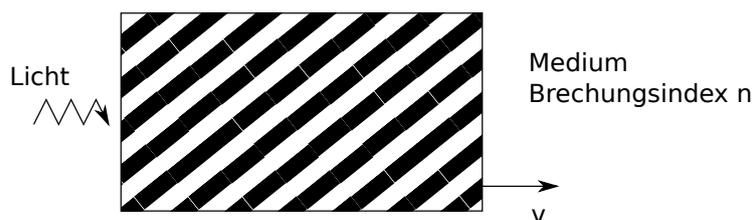
$$v_{\text{Erde}} \approx 30 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

und damit

$$\Theta' \approx 10^{-4} \approx 20,5''$$

Dies entspricht der tatsächlich gemessenen Abweichung. Man kann diese auch absolut beobachten, da die Erde sich (glücklicherweise) nicht geradlinig bewegt, sondern ihre Geschwindigkeit und Richtung ändert.

E2: Fizeau Experiment (1851) Mit einem Fizeau-Interferometer kann man die Lichtgeschwindigkeit in einem bewegten Medium (Wasser) der Brechzahl n sehr genau messen.



Die Lichtgeschwindigkeit im Medium in Ruhe beträgt $u' = c/n$. Im Laborsystem gilt:

$$u = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{cn}} = \frac{c}{n} + v \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}_{\text{Fresnel-Fizeau-Faktor}} + O(v^2)$$

Fresnel leitete diesen Faktor aus einer Variante der heute überholten (nichtrelativistischen) Äthertheorie her.

5.3 Minkowski Raum-Zeit

Minkowski wollte die Dimensionen des Raumes (Meter) und die der Zeit (Sekunden) so verändern, dass man sie besser vereinbaren könnte. Und so setzte er

$$x_0 = ct$$

Mit der Lorentz-Transformation bekommt man nun

$$x'_0 = \gamma(x_0 - \beta x_1)$$

$$x'_1 = \gamma(x_1 - \beta x_0)$$

$$x'_2 = x_2$$

$$x'_3 = x_3$$

Man kann dies mit der Rapidität ζ umschreiben (Man bekommt dann eine andere Parametrisierung als mit β und γ).

$$\begin{aligned}\beta &= \tanh \zeta \in (-1, 1) \\ \gamma &= \cosh \zeta \in [1, \infty) \\ \beta\gamma &= \sinh \zeta\end{aligned}$$

Damit lassen sich die Lorentz-Transformationen folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned}x'_0 &= x_0 \cosh \zeta - x_1 \sinh \zeta \\ x'_1 &= -x_0 \sinh \zeta + x_1 \cosh \zeta\end{aligned}$$

Unter einer Drehung bleibt die Länge invariant und die Länge ist eine positiv semidefinite Funktion. Hier betrachten wir die Lorentz-Transformation als eine Pseudo-Drehung, da die Länge hier negativ werden kann und man nicht aus der Länge zwischen A und B gleich null schließen kann, dass die Punkte A und B dann gleich sind. Wir betrachten nicht euklidische Geometrie! Mit der Länge

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

Hier wird unser Konzept von Vektoren verändert, wir betrachten nicht mehr Dreiervektoren sondern Vierervektoren. Der Vierervektor ist

$$A_{mu} \equiv (A_0, A_1, A_2, A_3) \equiv (A_0, \vec{A}) = (A_0, A_{\parallel} + A_{\perp})$$

Ein Vierervektor transformiert folgendermaßen unter der Lorentz-Transformation

$$\begin{aligned}A'_0 &= \gamma (A_0 - \vec{\beta} \cdot \vec{A}) \\ \vec{A}'_{\parallel} &= \gamma (\vec{A}_{\parallel} - \vec{\beta} \cdot A_0) \\ \vec{A}'_{\perp} &= \vec{A}_{\perp}\end{aligned}$$

Das (invariante) Skalarprodukt für A_{μ} und B_{μ} ist definiert als

$$A_{\mu} B^{\mu} \equiv A_0 B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$$

Nach der Idee von Minkowski zur Raum-Zeit sind diese nicht getrennt, sondern miteinander verknüpft.

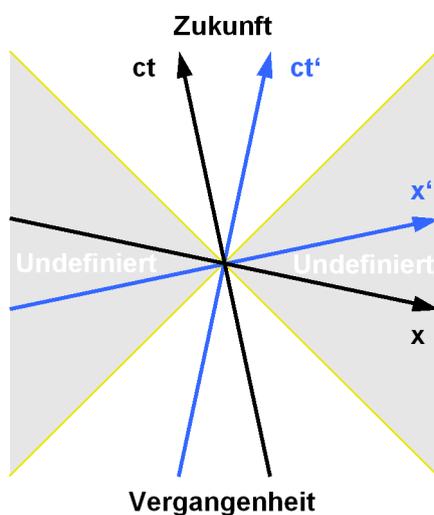
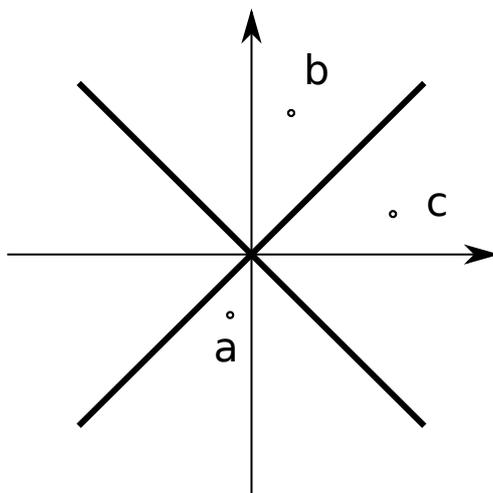


Abbildung 5.1: Quellen: wikipedia.pdf

Die Regionen außerhalb des Lichtkegels (Gegenwart) können wir nicht erreichen. Daher dürfen die Felder außerhalb keinen Einfluss haben (Mikrokausalität). Betrachte zwei Ereignisse a und b. Die Distanz zwischen ihnen soll sein

$$s_{ab}^2 \equiv c^2 (t_a^2 - t_b^2) - |\vec{x}_a - \vec{x}_b|^2$$



Für $s_{ab}^2 > 0$ sind die Ereignisse *zeitartig* getrennt, für $s_{ab}^2 < 0$ *raumartig* getrennt.

5.3.1 Zeit und Länge

Eigenzeit eines Teilchen mit $\vec{u}(t)$ in K

Invariantes Linienelement

$$ds^2 \equiv c^2 dt^2 - |d\vec{x}|^2$$

Momentan: Ruhesystem K' :

$$dt' \equiv d\tau$$

$$d\vec{x}' = 0$$

$$ds^2 = c^2 d\tau^2$$

Wir finden also mit $ds^2 = c^2 dt^2 (1 - \beta^2(t))$ und $\beta = \frac{u}{c}$. Also mit $ds^2 = c^2 d\tau^2$ folgt durch umformen

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma_u(t)}$$

Da $\gamma \geq 1$ folgt

$$dt = \gamma d\tau \geq d\tau$$

Dies ist die *Zeitdilatation*.

Beispiel : Eigenzeitintervall $\tau_2 - \tau_1 \geq 0$

$$t_2 - t_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma(\tau) d\tau \geq \tau_2 - \tau_1$$

Experiment 3 : Instabiles Teilchen μ^\pm mit $\tau_{\text{zerfall}} = 2 \mu\text{s} \hat{=} 600 \text{ m}$ bei Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit. Werden jedoch auch in 10 km Entfernung vom Entstehungsort gemessen $\rightarrow \gamma \approx 20$.

Ähnlich: *Lorentzkontraktion*

Wir finden

$$l(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l(0) = \frac{l(0)}{\gamma}$$

Herleitung: Stab in K' mit Länge $l(0)$. Die Endpunkte des Stabes sei an Punkt $(a|0)$ und $(b|0)$ mit $b > a$ und damit gilt für die Länge

$$l(0) = x_1^b - x_1^a$$

In K haben wir die Punkte a und b mit Koordinaten aus denen mit Lorentztransformation folgt

$$x_1^P(t) = \frac{x_1^P}{\gamma} + vt$$

$$p \in \{a, b\}$$

Damit folgt für die Länge in K

$$l(v) = x_1^b - x_1^a = \frac{1}{\gamma} (x_1^b - x_1^a) = \frac{l(0)}{\gamma}$$



Experiment E4 : Michelson-Morley (1887) Mit $PS_1 = PS_2 \equiv l$.

Lorentzäthertheorie:

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} \\
 &= \frac{2l}{c} \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \\
 (ct_2)^2 &= l^2 + (vt_2)^2 \\
 t_2 &= \frac{l}{\sqrt{c^2-v^2}} + \frac{l}{\sqrt{c^2-v^2}} \\
 &= \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\Delta F = v(t_1 - t_2) = \frac{\nu l v^2}{c^3} + O\left(\frac{v^3}{c^3}\right)$$

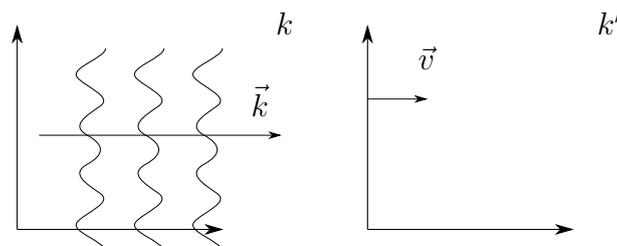
MM mit Präzision von 10^{-10} fanden $\Delta F = 0$.

Nun mit SRT:

Lorentzkontraktion der Länge bei t_1 : $l \rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}l$ Damit folgt

$$t_1 = t_2 \implies \Delta F = 0$$

Dopplerverschiebung



Lowtech Ebene Welle

$$\begin{aligned}
 \propto \cos(\omega t - kx) &= \cos(\omega t(t', x') - kx(t', x')) \\
 &= \cos\left(\omega\gamma \cdot \left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) - k\gamma \cdot (x' + vt')\right) \\
 &= \cos\left((\omega\gamma - k\gamma v)t' - \left(\gamma k - \gamma\omega\frac{v}{c^2}\right)x'\right) \\
 &= \cos(\omega't' - k'x')
 \end{aligned}$$

Mit

$$\omega' = \gamma(\omega - kv) \quad k' = \gamma\left(k - \frac{\omega v}{c}\right)$$

falls $\vec{v} \parallel \vec{k}$.

Hightech Ebene Welle haben einen invarianten Phasenfaktor φ :

$$\varphi = \omega t - \vec{k}\vec{x} = k_\mu x^\mu$$

Also

$$k_\mu = \left(k_0, \vec{k}\right) = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$$

k_μ ist ein Vierervektor. Und somit folgt die Transformation eines Vierervektors

$$\begin{aligned}
 k'_0 &= \gamma\left(k_0 - \beta\vec{k}\right) \\
 \vec{k}'_{\parallel} &= \gamma\left(\vec{k}_{\parallel} - \beta k_0\right) \\
 \vec{k}'_{\perp} &= \vec{k}_{\perp}
 \end{aligned}$$

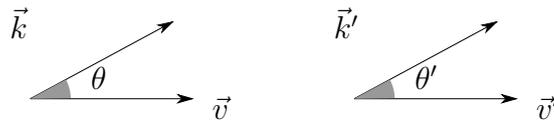
Für Lichtwellen im Vakuum gilt

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{c} = k_0$$

und damit

$$k_\mu k^\mu = k_0^2 - |\vec{k}|^2 = 0$$

Relative Dopplerverschiebung



$$\omega' = \gamma\omega (1 - \beta \cos \theta)$$

Wichtige Vorhersage der SRT: *Transversale Dopplerverschiebung*:

Experiment E5 : Ivesz und Stillwell 1938 Bei $\theta = \frac{\pi}{2}$ folgt

$$\omega' = \gamma\omega$$

Mit

$$\left(\frac{v_{\text{Licht}} - v_{\text{Elektron}}}{v_{\text{Licht}} + v_{\text{Elektron}}} \right) \leq 10^{-2}$$

5.4 Impuls und Energie eines Teilchens

Transformation der Geschwindigkeiten $\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ ist kein Vierervektor. Definiere die Vierergeschwindigkeit

$$U^\mu = (U_0, \vec{U})$$

mit

$$\vec{U} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma_u \vec{u} \quad U_0 = \frac{dx_0}{dt} = \frac{dx_0}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma_u c$$

Insgesamt also

$$u^\mu = \gamma_u (c, \vec{u})$$

Gesucht: Vierervektor für Impuls

Nichtrelativistisch

$$\vec{p}_{NR} = m_0 \vec{u}$$

Vierervektor

$$P_\mu = m_0 U_\mu = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \vec{u})$$

Also

$$\vec{p}_{SRT} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \vec{u}$$

Aber was bedeutet die 0-Komponente?

$$\begin{aligned}\frac{dp_0}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \\ &= \frac{\vec{u}}{c} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \\ &= \frac{\vec{u}}{c} \cdot \frac{d\vec{p}_{SRT}}{dt}\end{aligned}$$

Nichtrelativistisch-Abitur:

Dreidimensionale Kraft

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

nach Newton. Weiterhin gilt für die geleistete Arbeit

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{u}$$

Beides ergibt zusammen

$$\frac{dp_0}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dE}{dt}$$

Also

$$p_0 = \frac{E}{c} + \text{Konstante}$$

Die Konstante kann im Labor vernachlässigt werden, jedoch nichtmehr sobald die Gravitation eine Rolle spielt. Somit

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} c^2 = mc^2$$

Wobei

$$m = \gamma m_0$$

die relativistische Masse bezeichnet und m_0 die Ruhemasse.

Taylorentwicklung der Energie um $u = 0$

$$E = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2 + O\left(\frac{u^2}{c^2}\right)$$

Also

$$E = \text{Konstante} + T + \dots$$

wobei T die kinetische Energie bezeichnet.

P_μ ist Energie-Impuls-Vierervektor. Also mit SRT

Energie-Impuls-Erhaltung \neq Energie-Erhaltung + Impuls-Erhaltung

d.h. es gibt eine Invarianz von

$$P_\mu P^\mu = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m_0^2 c^2$$

Prozess mit N -Teilchen mit $P_\mu^j = \left(\frac{E^{(j)}}{c}, \vec{p}^{(j)} \right)$ bei $j \in \{1, \dots, N\}$ gilt

$$\sum_{j=1}^N P_\mu^{(j)} = \text{Konstant}$$

Experiment E6: Teilchenphysikexperiment: Resonanzen

TODO: Bild2012 – 02 – 02 –

p_0 -Erhaltung gibt

$$2\gamma_w m_0 c = M_0 c$$

Also

$$M_0 = 2 \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} > 2m_0$$

Experiment E7: Fixed-Target vs Collider Experiment Einfachste $m_1 = m_2$

Im Collider bewegen sich beide Teilchen zueinander, beide haben die gleiche Energie E_1 .

TODO: Bild2012 – 02 – 02 – 2 Für den viererimpuls gilt

$$P_\mu^{\text{tot}} = \left(\frac{2E_1}{c}, \vec{0} \right)$$

$2E_1$ ist die freie Energie.

Betrachten wir nun Fixed-Target **TODO: Bild2012 – 02 – 02 – 3**

Nun

$$P_{\mu}^{\text{tot}} = \left(\frac{2E_1 + m_1 c^2}{c}, \vec{p}_1 \right)$$

Im Schwerpunktsystem gilt

$$P_{\mu}^{\prime \text{tot}} = \left(\frac{2E_1'}{c}, 0 \right)$$

$$\begin{aligned} (P_{\mu}^{\text{tot}})^2 &= \left(\frac{2E_1 + m_1 c^2}{c} \right)^2 - |\vec{p}_1|^2 \\ &= 2m_1^2 c^2 + 4E_1 m_1 \\ &= \frac{4(E_1')^2}{c^2} \end{aligned}$$

Damit folgt für die freie Energie E_1'

$$2E_1' \approx 2\sqrt{E_1 m_1 c^2}$$

Am 12.12.2011 kam die Meldung von ATLAS und CMS am LHC über den Hinweis eines Higgs-Boson mit einer Masse von ca. $m_H \approx 125$ GeV.

TODO: *Bild2012 – 02 – 03 – 1*

Betrachte nun den LHC und den LHFTA, Large Hedron Fixed Targeted Accelerator.

TODO: *Bild2012 – 02 – 03 – 2*

TODO: *Bild2012 – 02 – 03 – 3*

Betrachte LHFTA

$$E_{\text{CM}} \approx 2\sqrt{\frac{7}{3}} \text{ TeV} \frac{6}{3} \text{ eV} \approx 56 \text{ GeV}$$

Kein 125 GeV Higgs produziert.

Im LHC gilt

$$E_{\text{CM}} \approx 2\frac{7}{3} \text{ TeV} \approx 5000 \text{ GeV}$$

Es kann also ein 125 GeV Higgs produziert werden.

Betrachten wir nun die Relativistische Dynamik (kurz)

Nach Newton gilt im Ruhesystem

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_R$$

Relativistische Invarianz für eine Vierervektorgleichung würde vorschlagen

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = F^\mu$$

mit Vierervektor F^μ . F^μ definieren wir einfach im Ruhesystem

$$F^\mu [\text{Ruhesystem}] = (0, \vec{F}_R)$$

Damit ist

$$F^\mu [\text{beliebiges Inertialsystem}] = \Lambda^\mu_\nu F^\nu [\text{Ruhesystem}]$$

Wobei Λ die Transformationsmatrix der Lorentztransformation angibt, also Geschwindigkeitabhängig. Also

$$F^\mu [\text{beliebiges Inertialsystem}] = \left(\gamma \vec{v} \cdot \vec{F}_R, \vec{F}_R + (\gamma - 1) \vec{v} \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}_R}{v^2} \right)$$

Später gibt es die Lorentzkraft F_{Lorentz}^μ .

5.5 Tensoranalysis

Raum-Zeit-Kontinuum mit den Koordinaten x^0, x^1, x^2, x^3 . Koordinatentransformation gibt

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Beispiel: Poincare-Transformationen

$$x' = \Lambda x + a \implies \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu_\nu \quad \text{Konstant}$$

Skalar (Tensor nullter Stufe)

$$\varphi' = \varphi$$

Dies bedeutet genauer

$$\varphi'(x') = \varphi(x)$$

Vektor (Tensor erster Stufe)

- Kontravariant

$$A'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}(x)$$

transformiert wie dx^{μ}

- Kovariant

$$B'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} B_{\nu}$$

transformiert wie $\partial_{\mu}\varphi$

Kontravarianter Tensor zweiter Stufe

$$F'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} F^{\alpha\beta}$$

Allgemein

$$T'_{\alpha\beta\dots}{}^{\mu\nu\dots} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\tau}} \dots \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\beta}} \cdot T_{\delta\varphi\dots}{}^{\sigma\tau\dots}$$

Invariante unter Poincare-Transformation

- Skalarprodukt von zwei Vektoren

$$B \cdot A \equiv B_{\alpha} A^{\alpha} = B_{\alpha} g^{\alpha\beta} A_{\beta}$$

mit

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Betrachte nun

$$\begin{aligned} B' A' &= \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} B_{\beta} A^{\gamma} \\ &= \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\gamma}} B_{\beta} A^{\gamma} \\ &= \delta_{\gamma}^{\beta} B_{\beta} A^{\gamma} \\ &= B \cdot A \end{aligned}$$

- *Metrischer Tensor*

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \eta_{\mu\nu}$$

wobei wie oben

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ist fest in der SRT.

Invariante Längenelement (auch gültig in ART)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \stackrel{\text{SRT}}{=} dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

SRT Invariante

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \nabla^2$$

$$\begin{aligned} \square' &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \partial_\lambda \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} \partial^\kappa \\ &= \Lambda_\mu^\lambda \Lambda_\kappa^\mu \partial_\lambda \partial^\kappa \\ &= \partial_\lambda \partial^\lambda \\ &= \square \end{aligned}$$

5.6 Kovarianz der Elektrodynamik

Kontinuitätsgleichung war bisher

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Definiere den Vierervektor

$$J^\mu = (c\rho, \vec{j})$$

Damit ergibt sich mit der viererdivergenz ∂_μ

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

Experiment der Invarianz der Elektronenladung

$$\rho' d^3x' = \rho d^3x$$

Vergleich

$$dx'_0 d^3x \stackrel{LT}{=} dx_0 d^3x$$

Also transformiert $c\rho$ wie die Zeitkomponente eines Kontravarianten vierervektors.

In der Lorentzgleichung gilt

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0$$

Dies ergab die Wellengleichungen

$$\begin{aligned} \square \vec{A} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \square \phi &= 4\pi\rho \end{aligned}$$

Mit Vierervektor

$$A^\mu \equiv (\phi, \vec{A})$$

ergibt sich also

$$\begin{aligned} \square A^\mu &= \frac{4\pi}{c} J^\mu \\ \partial_\mu A^\mu &= 0 \end{aligned}$$

Mit

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu$$

Wechsel von Inertialsystem K in K' ergibt dort

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \square' A' &= \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \frac{4\pi}{c} J' \\ \partial' A' &= 0 \end{aligned}$$

Da $\left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)$ eine invertierbare Matrix ist, sind die Gleichungen also Lorentzinvariant.

Für die physikalischen Felder ergibt sich

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Explizit

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0) \\ B_x &= \partial_y A_z - \partial_z A_y &= -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) \\ \partial^\mu &= (\eta^{\mu\nu} \partial_\nu) &= (\partial x^0, -\nabla) \end{aligned}$$

Definieren wir einen antisymmetrischen Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Also

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Es gibt insgesamt 6 Feldkomponenten in dem Tensor, genauso wie es zusammen im B und E Feld gibt.

Definieren wir nun den dualen Feldstärketensor

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

mit dem antisymmetrischen Tensor vierter Stufe

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \mu = 0, \nu = 1, \rho = 2, \sigma = 3 \text{ und gerade Permutationen} \\ -1 & \text{Bei ungeraden Permutationen} \\ 0 & \text{für zwei gleiche Indizes} \end{cases}$$

Dualitätstransformation $F \rightarrow \tilde{F}$ liefert

$$\begin{aligned} \vec{E} &\rightarrow \vec{B} \\ \vec{B} &\rightarrow -\vec{E} \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Maxwellgleichungen :

Bisher galt für die inhomogenen Gleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}\end{aligned}$$

und für die homogenen Gleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

Die inhomogenen Gleichungen werden zu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (5.1)$$

und die homogenen Gleichungen

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (5.2)$$

Betrachten wir die Konsistenz mit $\partial_\nu J^\nu = 0$. Betrachten wir dazu

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \partial_\nu J^\nu$$

Die rechte Seite verschwindet wegen der Kontinuitätsgleichung und die linke Seite verschwindet, da die Kombination aus symmetrischem Tensor und antisymmetrischem Tensor verschwindet. Siehe

$$\begin{aligned}\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} \\ &= -\partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu} \\ &\stackrel{\text{Indizes umbenennen}}{=} -\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} \\ &\implies \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0\end{aligned}$$

Mit Lorentz und Einstein folgt

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = qF^{\mu\nu}U_\nu \quad (5.3)$$

wobei U die Vierergeschwindigkeit angibt.

Check :

- (1) Im Ruhesystem und nicht relativistisch mit $m \in \{1, 2, 3\}$

$$\frac{dP^m}{dt} = \frac{q}{c}F^{m0}c = qE^m$$

also die Coulombkraft.

- (2) Die Kovarianz ist ok.

$F^{\mu\nu}$ Tensor bringt für das E und B Feld folgende Transformationen

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \gamma \left(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \vec{\beta} \left(\vec{\beta} \cdot \vec{E} \right) \\ \vec{B}' &= \gamma \left(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \vec{\beta} \left(\vec{\beta} \cdot \vec{B} \right) \end{aligned}$$

Haben wir nun z.B. $\vec{B} = 0$ und transformieren wir, so haben wir $\vec{B}' = -\gamma\vec{\beta} \times \vec{E}$ und somit wird das \vec{E} -Feld aufgeteilt in ein neues \vec{B} und \vec{E} -Feld.

Es gibt einen Artikel von Einstein in 1905 : Zur Elektrodynamik bewegter Körper.

Kapitel 6

Zusammenfassung der Theorie C

- Statik:

Coulombkraft führt zu $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ und $\nabla \times \vec{E} = 0$

Amperekraft führt zu $\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$ und $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

- Dynamik:

Faraday ergibt $\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

Maxwell(Konsistenz) liefert $\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$. Da c feststeht in diesen Gleichungen, kann es nicht Galileiinvariant sein, also benötigen wir die Lorentzinvarianz. Dies führt zur SRT.

Kapitel 7

Capita Selecta (Nicht Klausurrelevant)

7.1 Superluminal Neutrinos?

7.1.1 Experiment

$$c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Neutrino time-of-flight-velocity measured by OPERA (arXiv : 1109.4897 v2 , 17 Nov 2011)

$$v = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{730536 \text{ km} \pm 20 \text{ cm}}{2.4367427 \text{ ms}} = 1.000024c$$

TODO: 2012 – 02 – 10 – 1

Summary In OPERA

$$\left[\frac{v}{c} - 1 \right]_{\nu_{\mu}, 17 \text{ GeV}} = [+2.4 \pm 0.3(\text{stat}) \pm 0.3(\text{sys})] \cdot 10^{-5}$$

In MINOS 2007

$$\left[\frac{v}{c} - 1 \right]_{\nu_{\mu}, 3 \text{ GeV}} = [5.1 \pm 1.3(\text{stat}) \pm 2.6(\text{sys})] \cdot 10^{-5}$$

In a Supernova 1987

$$\left| \frac{v}{c} - 1 \right|_{\bar{\nu}_e, 10 \text{ MeV}} \leq 10^{-9}$$

7.1.2 Theoretic

Fundamental

(a) We know through to Experiments : $\exists \nu - s$ with $v \leq c$.

SRT : Impossible to accelerate these $\nu - s$ to $v > c$

\implies if there is an Neutrino with $v_\nu > c$ the SRT is violated.

(b) Is there a fundamental Problem if $v_{max,\nu} > c_\gamma$? Not necessarily so:

Example: CPT-Anomaly - [K, arXiv hep-th/9912169]

SM (Standart-Modell) over $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \times S)$ **TODO: 2012 - 02 - 10 - 2** This leads to Lorentzviolation (LV) and CTTV : For Example

$$\frac{v_{group\gamma} - v_{max,\nu}}{v_{max,\nu}} = - \left(\frac{\alpha}{L}\right)^2 \frac{1}{\omega^2} \neq 0$$

(c) Problem is to merge LV and Gravity

Phenomenology

Simplest theoretical possibility in Klinhamers View [K, arXiv 12020531]

A Lorentzinvarianz (LI) is exact.

B SSB (spontaneous symmetry breaking) of LI

Idea of SSB in condensed matter and high energy physics

(1) Fundamental equations are invariant.

(2) Ground-State is not invariant.

Example

(a) discrete : **TODO: 2012 - 02 - 10 - 3** Through to $V(x) = V(-x)$ we have Parity-Symmetry.

(b) Classical Electrodynamics :

Rotational invariance: The magnet-orientation of Iron is not rotation invariance. **TODO: 2012 -**

SSB of LI? What dynamics, perhaps in the Higgssector?

Background "vector" $b_{\alpha,\beta} = \delta_{\alpha,0}\delta_{\beta,0}$

$$(E_{\nu,n})^2 = c^2|\vec{p}|^2 + (m_n c^2)^2 + b_{00}^2 \frac{(c|\vec{p}|)^4}{(M c^2)^2}$$

1a OPERA $\frac{v}{c} - 1 \implies M \propto \text{TeV}$

1b narrow pulse stays narrow.

2

Dieses Skript wurde heruntergeladen von
ugroup.hostzi.com



Alle Rechte verbleiben beim lesenden Dozenten.
Keine Garantie auf Richtigkeit oder Vollständigkeit.