Mitschrieb theoretische Physik C WS 12/13

Elektrodynamik

gehalten von Prof. Dr. Alexander Mirlin

6. Februar 2013

geschrieben von Steffen Hahn

Inhaltsverzeichnis

1. Vorwort

Vorsicht: Der komplette Mitschrieb ist *inoffiziel*. Dementsprechend kann er an manchen Stellen der Vorlesung unvollständig sein und teils noch Fehler enthalten. Im Rahmen der Lust des Autors können auch ganze Teile von der Vorlesung zur besseren Verständlichkeit komplett abweichen. Es wäre nett, falls jemand einen Fehler findet oder einen Verbesserungsvorschlag hat, diesen mir per Mail zukommen lassen kann:

`steffen.t.hahn@googlemail.com`

Dank geht an:

- Robin Hofsaess (Fehlersuche)
- Andreas Kaiser (Fehlersuche)
- Daniel Weiss (Fehlersuche)
- Fritz Waitz (Fehlersuche)
- Dennis Weyland (Fehlersuche)

2. Einleitung

17.10.2012

2.1. Was ist die Elektrodynamik?

Während die Mechanik die Bewegung von Körpern betrachtet, ist die Elektrodynamik (ab sofort ED) eine Feldtheorie. Das heißt sie betrachtet die Ursachen, unter welchen Bedingungen Kräfte auf Körper ausgeübt werden. In der ED sind dies das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r},t)$ und das magnetische Feld $\vec{B}(\vec{r},t)$. Sie äußern sich durch ihre Wirkung auf Ladungen. Diese erfahren in einem der beiden Felder eine Kraft im SI-Einheitensystem von

$$\vec{F} = q\left(\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r},t)\right). \tag{2.1}$$

Die Bewegungsgleichungen für die beiden Felder sind die Maxwell-Gleichungen (partielle Differentialgleichungen):

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{2.3}$$

Bei statischen Phänomenen können wir die Vereinfachung

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{2.4}$$

annehmen.

2.2. Grundlagen - Nablaoperator

Der Nabla-Operator ist ein Operationssymbol der erlaubt die drei Differentialoperatoren Divergenz, Rotation und Gradient in eine kurze einprägsame Form zu bringen. Im Dreidimensionalen wird er als

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^T \tag{2.5}$$

definiert. In dieser Form wird er im folgenden auch, wenn nichts anderes gesagt wird, benutzt. Mit dem Operator kann man die Differentialoperation wie folgt schreiben

$$\operatorname{grad} F = \nabla \cdot F = \vec{G}, \operatorname{div}\vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = g, \operatorname{rot}\vec{f} = \nabla \times \vec{f}. \tag{2.6}$$

Der Gradient eines Skalarfeldes ergibt einen Vektor, der zur Stelle des stärksten Anstiegs zeigt. Die Divergenz eines Vektorfeldes ist ein Maß für die „Quellenstärke“, jedem Vektor wird ein Skalar zugeordnet. Die Rotation eines Vektorfeldes hingegen gibt dagegen an inwiefern ein Vektorfeld „rotiert“. Bei einem Karussell wäre der Betrag der Rotation des Vektorfeldes die doppelte Winkelgeschwindigkeit.

3. Elektrostatik

3.1. Das Coulomb-Gesetz

Ladungen wirken aufeinander Kräfte aus. Die Kraft von einer Ladung q_1 auf eine andere Ladung q_2 kann über das Coulomb-Gesetz

$$\vec{F} = kq_1q_2\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \tag{3.1}$$

beschrieben werden. Das elektrische Feld $\vec{E}$ einer Ladung q_i ist die Kraft pro Ladungseinheit. Das führt mit dem über Gleichung (3.1) auf

$$\vec{F} = q\vec{E} \Leftrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = kq_i\frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \tag{3.2}$$

Die $\frac{1}{r^2}$-Abhängigkeit kommt vom Fehlen der Ruhemasse von Photonen ($m_\gamma = 0$).

3.2. Einheitensysteme

Im Allgemeinen gibt es zwei wichtige Einheitensysteme in denen Probleme der Elektrodynamik gelöst werden. Das von der theoretischen Physik präferierte ist das Gauß-System, das international akzeptierte das SI-Einheitensystem.

3.2.1. SI-Einheitensystem

Das $\sim$ baut auf den Basiseinheiten Meter, Kilogramm und Sekunde auf. Die Stromstärke ist eine definierte Basiseinheit und gibt an wie viel Ladung pro Sekunde fließt. Der Proportionalitätsfaktor k des Coulomb-Gesetzes ist definiert als

$$k := c_0^2 10^{-7}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \quad \text{mit} \quad c_0 = 3\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{3.3}$$

Darüber hinaus gelten

$$\epsilon_0 \approx 8,864\cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2} \quad e \approx 1,602\cdot 10^{-19}\mathrm{C}. \tag{3.4}$$

3.2.2. Gauß-System

Das $\sim$ baut auf den Basiseinheiten Zentimeter, Gramm und Sekunde auf. Der Proportionalitätsfaktor k ist auf den einheitenlosen Wert 1 gesetzt. Die Ladung besitzt die Einheit ESE (Elektrostatische Einheiten). Sie wird im englischen „esu“ teilweise auch 1 Fr (Franklin), 1 statC (static Coulomb) genannt. Die Kraft wird in „dyn“ angegeben, dabei entspricht

$$1\,\mathrm{dyn} = 1\frac{\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} = 1\frac{\mathrm{ESE}^2}{\mathrm{cm}^2} \tag{3.5}$$

und ESE besitzt die Einheit

$$1\,\mathrm{ESE} = 1\frac{\mathrm{cm}^{\frac{3}{2}}\mathrm{g}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{s}} \quad \text{mit} \quad e \approx 4.803\cdot 10^{-10}\,\mathrm{ESE}. \tag{3.6}$$

Es ist zu beachten, dass man beide Systeme schwerlich ineinander umrechnen kann, da sie beide von anderen Standpunkten ausgehen. Man kann eigentlich nur sagen, welche Ladung, welcher ESE entsprechen würde.

3.3. Ladungsverteilung

Eine Ladungsverteilung lässt sich leicht über 19.10.2012

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \tag{3.7}$$

darstellen. Bei einer stetigen Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ können wir in eine Integralform wechseln:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\ \rho(\vec{r}\,')\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}. \tag{3.8}$$

Die Ladungsdichte setzt sich dabei aus allen Ladungen zusammen, wobei

$$\rho(\vec{r}\,) = \sum_{i=1}^{n} q_i \delta(\vec{r}-\vec{r}_i) \tag{3.9}$$

für die Dichte geschrieben werden kann. Dabei ist δ die Dirac-Delta-Distribution bei der es sich um eine „verallgemeinerte Funktion" handelt. Für diese gilt

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ \delta(x-x_0) = \begin{cases} 1 & a < x_0 < b \\ 0 & x_0 < a \text{ oder } b < x_0 \end{cases} \tag{3.10}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0). \tag{3.11}$$

Die Dirac-Distribution ist auch im Mehrdimensionalen definiert. Hier wird sie oft in Dichten, wie oben in Gleichung (3.9) benutzt. Sie lässt sich schreibe als

$$\delta(\vec{r}\,) = \delta(x)\delta(y)\delta(z). \tag{3.12}$$

3.4. Gauß'sche Gesetz

Wir betrachten eine Ladung die von einer beliebigen Fläche S umschlossen wird, die den Normalenvektor $\vec{n}(\vec{r})$ hat. Es gilt

$$\vec{E}\cdot\vec{n}\ \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}\mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\mathrm{d}\Omega \tag{3.13}$$

Da die Ladung in der Annahme innerhalb der Fläche liegt muss das gerichtete Oberflächenintegral über die el. Feldstärke

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\ \mathrm{d}S = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{3.14}$$

sein. Daraus kann man folgern, wenn alle Ladungen sich innerhalb befinden, dass

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\ \mathrm{d}S = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i q_i \Rightarrow \oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\ \mathrm{d}S = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{V(S)} \mathrm{d}^3r\ \rho(\vec{r}\,). \tag{3.15}$$

Die differentielle Form des Gauß'schen Gesetzes lässt sich aus den im Kapitel 2.1 definierten Maxwell-Gleichungen ablesen.

3.5. Das Skalarpotential

Aus dem Zusammenhang

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\nabla_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{3.16}$$

lässt sich ein Skalarpotential zu dem bisherig definierten elektrischen Feld finden:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla \int \mathrm{d}^3r'\ \rho(\vec{r}\,')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} =: -\nabla\Phi. \tag{3.17}$$

Daher gilt im statischen Fall auch

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times (-\nabla\Phi) = 0. \tag{3.18}$$

Man kann das Skalarpotential auch über die Ladungsverteilung, ähnlich wie das elektrische Feld, berechnen

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}. \tag{3.19}$$

Das Potential des elektrischen Feldes drückt aus, welche Arbeit pro Ladung nötig ist, um eine Ladung von einem Ort zu einen anderen Ort zu bewegen. Dabei ist zu beachten, das es sich beim E-Feld in diesem Fall um ein konservatives Feld handelt: Daher gilt auch Wegunabhängigkeit zwischen zwei Punkten mit unterschiedlichem Potential und zudem für die elektrische Energie

$$W = -\int_A^B \vec{F}_{el}\ \mathrm{d}\vec{l} = -q\int_A^B \nabla\Phi\ \mathrm{d}\vec{l} = q(\Phi_B - \Phi_A). \tag{3.20}$$

3.6. Anwendung auf Randbedingungen

Es sei $\sigma(\vec{r})$ die Flächenladungsdichte. Wir betrachten ein infinitesimales Oberflächenelement und wenden darauf das Gauß'sche Gesetz an indem wir eine Art Kasten so darum legen, das dessen beiden Deckflächen parallel zur Oberfläche liegen. Danach lassen wir, wie gewohnt, den Abstand zwischen beiden Flächen gegen 0 gehen und kommen so auf

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\cdot\vec{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{2,\perp} - E_{1,\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \tag{3.21}$$

Daraus folgt, dass die Senkrechtkomponente des E-Feldes nicht stetig bei Übergang zwischen zwei Materialien ist. Nun betrachten wir eine geschlossene Kurve in Form eines Rechtecks, die so an der Randfläche liegt, dass sie zur Hälfte darin und zur Hälfte draußen verläuft und orthogonal zur Oberfläche ist. Wir lassen den Abstand zwischen Randkurve die innen und außen geht gegen 0 gehen und kommen so darauf

$$\oint_C \vec{E}\ \mathrm{d}\vec{l} = 0 \Rightarrow E_{2,\parallel} - E_{1,\parallel} = 0. \tag{3.22}$$

Daraus folgt, dass die Parallelkomponente des E-Feldes stetig ist.

3.7. Poisson-Gleichung und Laplace-Gleichung

Die Poisson-Gleichung folgt aus der Überlegung

$$\nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{und} \quad \vec{E} = -\nabla\phi \Rightarrow \Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{3.23}$$

Die Laplace-Gleichung findet sich dann, wenn keine Ladungsdichte herrscht. Sie kann als $\Delta\Phi = 0$ ausgedrückt werden. Eine Lösung der Poisson-Gleichung ergibt sich aus

$$\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\ \rho(\vec{r}\,')\nabla_r^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|},\ \text{mit}\ \nabla_r^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{3.24}$$

3.8. Elektrostatische Energie

Es seien $n-1$ Punktladungen gegeben. Wie groß ist jetzt die Arbeit eine weitere Punktladung aus dem unendlichen an die Position r_n zu bringen?

$$W_n = q_n\Phi(\vec{r}_n) \Rightarrow \Phi(\vec{r}_n) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{q_i}{|\vec{r}_n-\vec{r}_i|}. \tag{3.25}$$

Die gesamte Potentielle Energie des Systems liegt bei

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i}\frac{q_iq_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|} = \frac{1}{2}\sum_i q_i\Phi(\vec{r}_i)\ ,\ \text{mit}\ \ \Phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j\neq i}\frac{q_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|} \tag{3.26}$$

Bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ gilt

$$W^{\mathrm{kont}} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3r'\ \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r\ \rho(\vec{r})\Phi(\vec{r}) \tag{3.27}$$

$$= \frac{-\epsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3r\ \Phi(\vec{r})\nabla^2\Phi(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3r\ \nabla\Phi\cdot\nabla\Phi \tag{3.28}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3r\ |\vec{E}|^2 \Rightarrow w(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^2 \quad \text{Energiedichte} \tag{3.29}$$

Da die Integration im Unendlichen liegt fällt dabei der integrierte Term nach dem Satz von Gauß beim Anwenden der partiellen Integration weg. Man erhält einen scheinbaren Widerspruch

$$W^{\mathrm{kont}} = \frac{\epsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3r\ |\vec{E}|^2 > 0 \tag{3.30}$$

ist immer positiv. Jedoch können bei der kontinuierlichen Ladungsverteilung in Gleichung (3.26) auch negative Werte herauskommen. Das Paradoxon löst sich auf, da in W^{kont} über alle q_i und q_j integriert wird, auch wenn sie gleich sind! Man sollte deshalb eher auf die anfängliche Ladungsverteilung zurückgreifen.

3.9. Randwertprobleme

Ein Beispiel für $\sim$ ist ein gegebene Ladungsdichte ρ im Zusammenhang mit dem Potential 24.10.2012

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\ \rho(\vec{r}\,')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \tag{3.31}$$

Die Lösung ist das bekannte $\vec{E} = -\nabla\Phi$. In Metallen gilt immer im Inneren $\vec{E} = 0$ und $\Phi = \text{const}$, wohingegen an der Oberfläche induzierte Ladungen auftreten. Das Elektrische Feld ist dabei immer senkrecht zur Oberfläche, da es sonst zur internen Ladungsverschiebung kommen würde.

`Hier ein Bild eines Metalls vorstellen`

Dies ist ein Charakteristisches Problem. Es gilt $E_\perp(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma(\vec{r})$. Zur Lösung muss man die Gleichung

$$\nabla^2\Phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \tag{3.32}$$

über die gegebenen Randbedingungen versuchen zu lösen. Doch was sind Randbedingungen? Eine Randbedingung wäre beispielsweise die Angabe der Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ für $\vec{r} \in S_i$, man nennt dies Dirichlet-Randbedingung. Eine weitere Randbedingung ist die Neumann-Randbedingung für die gilt

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}(\vec{r}) = \nabla\Phi \cdot \vec{n}. \tag{3.33}$$

Im Fall der metallischen Oberfläche gilt $\Phi = \text{const.}$ Daher erscheint die von Dirichlet praktischer. Es gibt zwei Situationen: Im ersten Fall ist die Metalloberfläche an eine Batterie angeschlossen, deren anderer Pol geerdet ist und es existiert eine Ladung außerhalb. Im zweiten Fall ist die Metalloberfläche komplett isoliert. Φ ist unbekannt, jedoch kann man die Ladung über das Oberflächenintegral über die Oberflächenladungsdichte σ berechnen. Ein Algorithmus für das Problem ist

1. löse mit beliebigen Φ_i
2. finde $\sigma[\Phi_i]$
3. löse $\int \mathrm{d}S\ \sigma$

Wir betrachten n Leiter im sonst leeren Raum. Wir nehmen an alle Potentiale Φ_i seien angegeben. Wie sieht nun die Relation von Ladungen und Potentialen aus? Wir definieren

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\Phi_j, \text{ mit } C_{ij}\text{-Kapazitätskoeffizient (Matrix der Kapazitäten).} \tag{3.34}$$

Jetzt nehmen wir an die Leiter seien isoliert. Wir kennen jetzt die Potentiale nicht, aber die Ladungen. Daher müssen wir die Relation invertieren

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{n} (C^{-1})_{ij} Q_j. \tag{3.35}$$

Über die Formel der elektrostatische Energie gilt darüber hinaus

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r\ \rho(\vec{r})\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\Phi_i = \frac{1}{2}\sum_{ij}(C^{-1})_{ij}Q_jQ_i = \frac{1}{2}\sum_{ij} C_{ij}\Phi_i\Phi_j. \tag{3.36}$$

3.10. Formale Lösung des Randwertproblems

Wir betrachten ein Volumen V, welches durch eine Oberfläche S begrenzt wird. Wir wollen den Satz von Gauß in einem speziellen Fall benutzen. Falls $\vec{A}$ die Funktion ist, dann benutzen wird dafür $\vec{A} = \phi\nabla\psi$ und $\nabla\vec{A} = \nabla\phi\nabla\psi + \phi\nabla^2\psi$. Damit gilt

$$\oint \mathrm{d}S\ \phi\nabla\psi \cdot \vec{n} = \int \mathrm{d}^3r\ \left(\nabla\phi\nabla\psi + \phi\nabla^2\psi\right) = \oint \mathrm{d}S\ \phi\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}. \tag{3.37}$$

Dies wird erste Greensche Identität genannt. Die Zweite greensche Identität erhalten wir direkt durch Subtraktion

$$\oint \mathrm{d}S\ \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}}\right) = \int \mathrm{d}^3r\ \left(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right). \tag{3.38}$$

Mit diesen beiden Hilfsmittel betrachten wir weiter das Randwertproblem $\nabla^2\Phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$ mit Dirichlet oder Neumann Randbedingung. Eine Φ_1, Φ_2-Lösungen $U(\vec{r}) = \Phi_1 - \Phi_2$, mit $\nabla^2 U = 0$, über die erste Greensche Identität folgt mit $\phi = \psi = U$ und damit

$$\int \mathrm{d}^3r\ (\nabla U \nabla U + U \underbrace{\nabla^2 U}_{=0}) = \oint \mathrm{d}S\ U\frac{\partial U}{\partial \vec{n}} = 0,\ \text{da } U(\vec{r}) = 0 \text{ für } \vec{r} \in S. \tag{3.39}$$

Daraus gilt für Dirchilet, dass U eine Konstante ist. Wir wählen sie als 0, um die Eindeutigkeit der Lösung zu gewährleisten. Wir definieren eine Green'sche Funktion als

$$\nabla_r^2 G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}\,'). \tag{3.40}$$

Es wäre auch äquivalent bei der Ableitung nach r'. Die 4π sind ein Normierungsfaktor. Eine Lösung dieser Gleichung sieht beispielsweise folgendermaßen aus

$$G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + F(\vec{r}, \vec{r}\,'),\ \nabla_r^2 F(\vec{r}, \vec{r}\,') = 0 \tag{3.41}$$

Die Randbedingung mit der Green'schen Funktion würde bei Dirichlet

$$G(\vec{r}, \vec{r}\,')|_{\vec{r}\,' \in S} = 0 = G(\vec{r}, \vec{r}\,')|_{\vec{r} \in S},\ G(\vec{r}, \vec{r}\,') = G(\vec{r}\,', \vec{r}) \tag{3.42}$$

heißen. Jetzt nutzen wir die zweite Greensche Identität mit $\phi = \Phi$ und $\psi = G(\vec{r}, \vec{r}\,')$.

$$\oint \mathrm{d}S' \left[\Phi\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} - G\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}}\right] = \int \mathrm{d}^3r' \left[\Phi \cdot (-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')) - G \cdot (-\frac{1}{\epsilon_0}\rho)\right] \tag{3.43}$$

daraus folgt durch umformen

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\ (G\rho) + \frac{1}{4\pi}\oint \mathrm{d}S' \left[\Phi(\vec{r},')\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} - \underbrace{G\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}}}_{=0}\right], \tag{3.44}$$

falls es die Dirichlet-Randbedingung ist, da G auf dem Rand 0 ist. Für Neumann muss man etwas anderes Verlangen. Eine weitere Frage ist, was wir für einen Leiter im Unendlichen Verlangen sollen. Das Potential ist bekannt 26.10.2012

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\ \rho(\vec{r}\,')\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|},\ \text{mit } G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{3.45}$$

Daraus folgt direkt die Dirichlet-Randbedingung im Unendlichen.

$$G(\vec{r}, \vec{r}\,') \underset{r \to \infty}{\to} 0 \tag{3.46}$$

3.11. Methode der Bildladungen/Spiegelladungen

Wir betrachten eine unendliche, metallische Platte, die geerdet ist. Wir nehmen an sie sei unendlich dünn und ihr Potential sei 0. Nun denken wir uns eine Ladung Q im Abstand a in x-Richtung von der Platte. Wir können dieses Problem sehr einfach Lösung durch eine Konstruktion über eine Senkrechte auf der Platte.

`Bild von dem Spiegelladungsprozess`

Wir spiegeln die Ladung an der Platte und erhalten so die Position einer „imaginären" Ladung, dh. $\vec{r}_1 = (a, 0, 0)^T$ und $\vec{r}_2 = (-a, 0, 0)^T$ und betrachten nun beide Ladungen:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{-q}{|\vec{r} - \vec{r}_2|}\right]. \tag{3.47}$$

Wir überprüfen ob dies die Poissongleichung verletzt

$$\nabla^2\Phi\big|_{x>0} = -\frac{q}{\epsilon_0}\left[\delta(\vec{r}-\vec{r}_1) - \underbrace{\delta(\vec{r}-\vec{r}_2)}_{=0}\right]. \tag{3.48}$$

Die Randwertbedingung ist damit auch erfüllt, da genau in der Mitte das Potential der Platte immernoch 0 sein muss. Die Greensche Funktion beträgt in diesem Fall:

$$G(\vec{r},\vec{r}_1) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} \tag{3.49}$$

Über das berechnete Potential können wir das Elektrische Feld bestimmen

$$\vec{E} = -\nabla\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}\right]. \tag{3.50}$$

Die Oberflächenladungsdichte ($x = 0$) ist dabei

$$\sigma(y,z) = \frac{-qa}{2\pi(a^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv \frac{-qa}{2\pi(a^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.51}$$

Die Dichte ist nur vom Abstand des Lotpunktes von q abhängig. Die Gesamtladung auf der Metallplatte (Influenzladung) ergibt sich ais

$$q_{\text{infl}} = 2\pi\int \mathrm{d}R\; R\cdot\sigma(R) = -q. \tag{3.52}$$

was zu erwarten war. Physikalische existiert die Spiegelladung nicht, aber sie vereinfacht die Rechnung mit der induzierten Ladung für das Potential in der Halbebene, wo die ursprüngliche Ladung sitzt. Für die Kraft auf die reelle Punktladung gilt

$$\vec{F}_1 = q\vec{E}',\ \text{mit}\ \vec{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3} \tag{3.53}$$

Daraus ergibt sich direkt

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{4a^2}(-\vec{e}_x) \tag{3.54}$$

und damit eine Anziehung zwischen Ladung und Platte. Diese Methode funktioniert nicht bei beliebigen Oberflächen. Es funktioniert nur für einfache Situationen.

3.12. Punktladung und geerdete metallische Kugel

Wir betrachten eine Kugel mit dem Potential $\Phi = 0$ und Radius R. Eine Punktladung sitzt auf der z-Achse, die durch den Mittelpunkt der Kugel verläuft. Wir wollen das Potential ausserhalb berechnen.

`Bild einer Kugel, die geerdet ist... Fläche S etc...`

Wir wollen wieder eine Spiegelladung nutzen um, dieses zu bestimmen. Diesmal ist es nicht trivial, da wir nicht direkt die Position von der Spiegelladung und deren Ladung wissen. Die Punktladung sitzt bei $\vec{r}_1 = (0,0,a), a > R$, die Spiegelladung auf der unbekannten Position $\vec{r}_2 = (0,0,b), b < R$. Daher prüfen wir wieder die Poisson-Gleichung. Das Potential wird die Form

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}\right] \tag{3.55}$$

haben. Wir nehmen einen beliebigen Punkt R auf der Kugeloberfläche

$$\Phi(|\vec{r}| = R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta}}\right] = 0. \tag{3.56}$$

Die Lösung können wir aus verschiedenen Randpunkten (2 Unbekannte, 2 Gleichungen) herauslesen. Die einfachste Möglichkeit ist die Wahl der zwei Schnittpunkte der Geraden durch die beiden Ladungen und der Kugel. Als Lösung ergibt sich damit $q' = \frac{-Rq}{a}$ und $b = \frac{R^2}{a}$.

3.12.1. Punktladung und isolierte metallische Kugel

Die Punktladung liegt auf derselben Position. Wir suchen wieder die Bildladung, die irgendwo auf der z - Achse in der oberen Halbkugel liegt.

`Bild einer nicht geerdeten Kugel mit Punktladung auf z-Achse.`

Wir benutzen dieselben Gleichungen wie im geerdeten Fall für die erste Bildladung. Zudem existiert eine weitere Bildladung, wie bei einer aufgeladen Kugel, die wir in der Mitte annehmen können.

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} + \frac{q''}{|\vec{r}|}\right], \text{ mit } q'' = Q - q' \tag{3.57}$$

3.12.2. Punktladung und metallische Kugel mit Potential Φ

Diesmal ist die Kugel nicht isoliert (es hängt eine geerdete Batterie dran). Die Lösung ist in dem Fall identisch zum letzten Fall. Jedoch muss q'' so gewählt werden, damit das Potential am Rand korrekt ist.

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q''}{R} \Rightarrow q'' = 4\pi\epsilon_0 R\,\Phi, Q = q' + q'' \tag{3.58}$$

3.13. Entwicklung nach orthogonalen Funktionen

Wir betrachten zuerst 1-Dimensionale Funktionen, dh. $g(x)$ mit $x \in [a,b]$. Das Skalarprodukt $(g,h) = \int_a^b \mathrm{d}x\ g(x)h^*(x)$. Im Fall von $(g,h) = 0$ heißt dies die Funktionen sind Orthogonal. Im Fall von $(g,g) = 1$ ist die Funktion normiert. Für eine Reihe von Funktionen (mit f_n), die unendlich ist, sodass $(f_m, f_n) = \delta_{mn}$ gilt und damit orthonomiert ist. Die Vollständigkeit bedeutet, für eine beliebige quadratintegrable Funktion $g(x)$ gilt

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x), a_n = (g, f_n), \tag{3.59}$$

wenn

$$\int \mathrm{d}x \left| g - \sum_{n=1}^{N} a_n f_n(x) \right| \to 0. \tag{3.60}$$

erfüllt wird. Wir schreiben $g(x)$ als eine Summe

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \mathrm{d}x'\ g(x') \cdot f_n^*(x') f_n(x) = \int \mathrm{d}x'\ g(x') \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x') f_n(x) = \int \mathrm{d}x'\ g(x')\delta(x'-x). \tag{3.61}$$

Ein bekanntes Beispiel für ein vollständiges Orthonormalsystem ist die Fourierreihe. Für diese gilt 31.10.2012

$$\{f_n\} = \sqrt{\frac{2}{L}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \underbrace{\sin\frac{2\pi x}{L}, \cos\frac{2\pi x}{L}, \sin\frac{4\pi x}{L} \dots}_{\sin\frac{2m\pi x}{L}, \cos\frac{2m\pi x}{L}} \right\}. \tag{3.62}$$

Man kann sie jedoch auch über die komplexe Exponentialfunktion ausdrücken:

$$\{f_n\} = \left\{ \sqrt{\frac{1}{L}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n x/L} \right\}. \tag{3.63}$$

Damit gilt

$$g(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi m x/L} \quad \text{mit} \quad a_m = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x\, g(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi m x/L}. \tag{3.64}$$

Bemerkung: Für $L \to \infty$ wird die Fourierreihe zum Fourierintegral, da die „Abstände" immer kleiner werden. Es gilt dann $\frac{2\pi m}{L} \to k$, $\sum_m \to \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k$ und $a_m = \sqrt{\frac{2\pi}{L}} a(k)$ und damit:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}k \quad \text{mit} \quad a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x. \tag{3.65}$$

Die Orthonomierung ist über

$$\frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x} = \delta(k-k') \tag{3.66}$$

und die Vollständigkeit über

$$\frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-x')k} = \delta(x-x') \tag{3.67}$$

erfüllt.

3.14. Kartesische Koordinaten

Über den Seperationsansatz können wir versuchen eine Allgemeine Vorschrift für die Lösung der Laplace-Gleichung zu finden. Wir setzen Φ als ein Produkt aus drei voneinander, unabhängigen Funktionen $A(x)$, $B(y)$ und $C(z)$ an und setzen in

$$\nabla^2\Phi \Rightarrow \partial_x^2\Phi + \partial_y^2\Phi + \partial_z^2\Phi = 0, \tag{3.68}$$

ein. Danach dividieren wird durch Φ. Es folgt

$$\frac{1}{A(x)}\frac{\mathrm{d}^2A(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{B(y)}\frac{\mathrm{d}^2B(y)}{\mathrm{d}y^2} + \frac{1}{C(z)}\frac{\mathrm{d}^2C(z)}{\mathrm{d}z^2} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2. \tag{3.69}$$

Daraus folgt, dass alle Summanden auf der linken Seite der Gleichung Konstanten seien müssen, wir nennen die Konstanten α^2, β^2 und γ^2. Daraus können wir drei Differentialgleichungen aufstellen:

$$\frac{\mathrm{d}^2A(x)}{\mathrm{d}x^2} = \alpha^2 A(x) \Rightarrow A(x) = a_1\mathrm{e}^{\alpha x} + a_2\mathrm{e}^{-\alpha x}. \tag{3.70}$$

Analog gilt dies für die anderen Funktionen B und C. Wir betrachten einen Quader im Ursprung mit der Länge a in x-Richtung, der Länge b in y-Richtung und der Länge c in z-Richtung. Jetzt suchen wir das Potential innerhalb des Quaders, unter der Randbedingung, dass dieses auf 5 Seitenflächen 0 ist. Auf dem Deckel bei $z = c$ wird das Potential als $\Phi = V(x, y)$ angesetzt. Es muss also gelten $A(x=0)=0 \Rightarrow A(x) \propto e^{\alpha x} - e^{-\alpha x} \propto \sinh \alpha x$. Dies gilt analog für die anderen Funktionen. Daraus folgt

$$A(x=a)=0 \Rightarrow \sinh \alpha a \Rightarrow \alpha_n = \mathrm{i}\frac{n\pi}{a} \Rightarrow A(x) \propto \sin \frac{n\pi}{a}x \tag{3.71}$$

$$B(y=b)=0 \Rightarrow \beta_m = \mathrm{i}\frac{m\pi}{b}, B(y) \propto \sin \frac{m\pi}{b}y \tag{3.72}$$

Für Φ folgt daraus über

$$\gamma^2 = -\alpha^2 - \beta^2 \Rightarrow \gamma_{mn} = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}, \tag{3.73}$$

dass das Potential als

$$\Phi = \sum_{n,m=1}^{\infty} D_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sinh\left(\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}z\right) \tag{3.74}$$

ausgedrückt werden kann. Jetzt bleibt noch eine Randbedingung übrig. Diese nutzen wir jetzt:

$$\Phi(z=c) = V(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} D_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sinh\left(\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}c\right). \tag{3.75}$$

Daraus können wir auf eine doppelte Fourierentwicklung schließen. Wir müssen beachten, dass wir nicht keine negativen n nehmen müssen, da sonst voneinander abhängige Funktionen entstehen: $\sin\frac{\pi x}{a} = -\sin\frac{-\pi x}{a}$. Es gilt nun

$$\{f_{nm}\} = \left\{\sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\right\} \tag{3.76}$$

und damit die Koeffizienten D_{nm} bestimmen über

$$D_{nm} = \frac{4}{ab\sinh\left(\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}c\right)} \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y\, V(x,y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right). \tag{3.77}$$

Ganz allgemein, das Potential eines Randwertproblem ist eine Summe aus Volumen- und Oberflächenintegral (Gleichung (3.44)). Das Volumenintegral wäre 0, da die Dichte innerhalb des Quaders 0 ist, und unsere Lösung würde sich aus dem Oberflächenintegral ergeben.

3.15. Kugelkoordinaten

Dasselbe wollen wir nun in Kugelkoordinaten durchführen. Es gilt die Transformation

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta. \tag{3.78}$$

Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten hat die Form:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin(\theta)\ \partial_\theta\Phi) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2\Phi = 0. \tag{3.79}$$

Als Lösungsansatz wählen wieder den Seperationsansatz mit $\Phi = \frac{U(r)}{r}P(\theta)Q(\varphi)$. Damit

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}PQ + \frac{UQ}{r}\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right) + \frac{UP}{r}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{3.80}$$

Dies multiplizeren wir mit $\frac{r^3\sin^2\theta}{UPQ}$, daraus ergibt sich

$$r^2 \sin^2\theta \left[\frac{1}{U}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{P}\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right)\right] + \frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\varphi^2} = 0. \tag{3.81}$$

Der erste Term ist φ-Unabhängig der zweite nicht, daher muss deren Summe 0 sein. Wir nehmen an

$$\frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\varphi^2} = -m^2 \Rightarrow Q = C\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}m\varphi} \tag{3.82}$$

und setzen dies direkt ein

$$\frac{r^2}{U}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{P}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = 0. \tag{3.83}$$

Der erste Summand ist nun von r Abhängig und der letzte der beiden nicht. Wir nutzen den Ansatz

$$\frac{r^2}{U}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} = l(l+1), \frac{1}{P}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = -l(l+1) \tag{3.84}$$

und schreiben die erste Gleichung um:

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}U = 0. \tag{3.85}$$

Die allgemeine Lösung muss eine Summe von Potenzen sein muss:

$$U(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l}. \tag{3.86}$$

Für die zweite Gleichung hingegen gilt $x \equiv \cos\theta$. Mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}|} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}$ gilt dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P = 0. \tag{3.87}$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind Legendre-Polynome $P_l(x)$. Es gilt

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l, l \in \mathbb{N}_0 \tag{3.88}$$

Die ersten paar Reihenglieder kann man sich selbst ausrechnen. Die Polynome sind so normiert, sodass $P_l(1) = 1$ gilt. Zudem bilden sie einen Vollständig Orthonormalen Satz über

$$f_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}}P_l(x), \tag{3.89}$$

ansonsten gilt

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, P_l(x)P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1}\delta_{l,l'}. \tag{3.90}$$

Nun betrachten wir, was für ein beliebiges m passiert. Wir betrachten Gleichung (3.87). Die Lösung davon wird gegeben als zugeordnete Legrendepolynome: 2.11.2012

$$P_l^m(x) = (-1)^m(1-x)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m P_l(x)}{\mathrm{d}x^m}, m \in \mathbb{N}_0 \tag{3.91}$$

Für $m = 0$ stimmt dies mit oben überein. Wir suchen für $-m$ die Lösungen:

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x). \tag{3.92}$$

Für ungerade m ist es also kein richtiges Polynom. Für alle m gilt somit:

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}P_l(x). \tag{3.93}$$

Daraus folgt für Gleichung (3.90)

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = \frac{2}{2l+1}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\delta_{l,l'}. \tag{3.94}$$

Bei festem m bildet $P_l^m(x)$ einen vollständigen orthogonalen Satz auf $[-1,1]$, genauso wie $Q_m(\varphi) = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}m\varphi}$. Deswegen können wir sagen, dass

$$P_l^m Q_m = P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}, \text{ für } l = 0,1,2\dots, m = -l, \dots l \tag{3.95}$$

eine vollständige orthogonale Funktion auf der Kugelfläche ist. Man definiert damit

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}. \tag{3.96}$$

Dies ist die Kugelflächenfunktion auf der Oberfläche einer Einheitskugel. Wir zeigen die Orthonomierung

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\ \sin\theta\, Y_{l'm'}^* Y_{lm} = \delta_{ll'}\delta_{mm'}, \tag{3.97}$$

für die Vollständigkeit gilt darüberhinaus

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi) = \delta(\varphi-\varphi')\delta(\cos\theta - \cos\theta'). \tag{3.98}$$

Zwei Eigenschaften sind leicht einzusehen:

$$Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{lm}^* \quad Y_{l,0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta). \tag{3.99}$$

Für einige l gilt damit

$$l = 0 : Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{3.100}$$

$$l = 1 : Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pm\varphi)} \tag{3.101}$$

$$l = 2 : \dots \tag{3.102}$$

Für eine beliebige Lösung der Laplace-Gleichung gilt damit

$$\Phi = \frac{U(r)}{r}PQ = \frac{U(r)}{r}Y_{lm} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-l-1}\right)Y_{lm}. \tag{3.103}$$

Betrachten wir ein Beispiel. Wir wollen zwischen zwei Kugelflächen, die ineinander liegen ein Randwertproblem lösen, wobei $\Phi(R_1,\theta,\varphi) = V_1$ und $\Phi(R_2,\theta,\varphi) = V_2$ ist. Wir wollen im inneren das Potential wissen. Falls der erste Radius 0 ist, dann müssen alle B_{lm} Null sein, ansonsten käme es zu einer Singularität. Analog dazu, falls wir außen suchen und $\Phi(\infty) = \text{const}$ ist, müssen alle A_{lm} Null sein.

3.16. Potential einer Punktladung

Jetzt betrachten wir das Potential einer Punktladung, welches wir über die Kugelfunktion entwickeln. Wir legen die Punktladung q zuerst auf einen Punkt auf der z-Achse ($\theta' = 0$). Jetzt wollen wir das Potential in einem Punkt R betrachten. Es ist bekannt

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}. \tag{3.104}$$

Wir suchen jetzt die Funktion in Kugelkoordinaten, unter diesen Bedingungen. Sie kann nicht von ϕ abhänig sein, da das Problem zylindersymmetrisch ist. Wir betrachten eine Kugelfläche

$$V_1 = \{\vec{r} : r < r'\}, V_2 = \{\vec{r} : r > r'\} \tag{3.105}$$

Es folgt

$$\nabla_r^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = 0, \text{ für } V_1, V_2 \tag{3.106}$$

Deswegen können wird nach Y_{lm} entwickeln. Wegen der φ-Unabhängigkeit folgt $m = 0$.

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + b_l r^{-l-1}\right) P_l(\cos\theta) \tag{3.107}$$

Für $\theta = 0$ folgt

$$\left.\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right|_{\theta=0} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + b_l r^{-l-1}\right) \tag{3.108}$$

Jetzt betrachten wir das im inneren und äußeren

$$\left.\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right|_{\theta=0} = \begin{cases} \frac{1}{r'-r} = \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{(r')^l} & r < r' \\ \frac{1}{r-r'} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^l} & r > r' \end{cases} \tag{3.109}$$

Damit gilt für $r < r'$:

$$r < r' : a_l = \frac{1}{(r')^{l+1}}, b_l = 0, r > r' := a_l = 0, b_l = (r')^l \tag{3.110}$$

Wir wissen alle Koeffizienten, deswegen können wir jetzt entwickeln

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \cdot \begin{cases} \frac{r^l}{(r')^{l+1}} & r < r' \\ \frac{(r')^l}{r^{l+1}} & r > r' \end{cases} \tag{3.111}$$

Erzeugende Funktion

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\theta}} \tag{3.112}$$

Jetzt betrachten wir das ganze für beliebige θ. Wir können dann unser Koordinatensystem rotieren so dass die z-Achse bei $\theta = 0$ liegt.

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\gamma) \cdot \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \tag{3.113}$$

Aber wir können es auch direkt berechnen (siehe Fließbach 11)

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \tag{3.114}$$

Es ergibt sich das Additionstheorem für Kugeln

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi). \tag{3.115}$$

3.17. Multipolentwicklung

Es gebe eine Ladungsdichte, welche sich in einem bestimmten Bereich lokalisieren lässt. Wir legen nun eine Kugel so um die Ladungsdichte, dass alle Ladungen umschlossen werden, diese soll den Radius R_0 besitzen. Somit gilt für den Außenbereich $r > R_0$ für die Ladungsdichte $\rho(r,\theta,\varphi) = 0$. Uns interessiert nun das Potential, welches außerhalb dieser Kugel zu finden ist. Es gilt

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}V\ \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \int_V \mathrm{d}V\ \rho(\vec{r}\,')\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r^l_<}{r^{l+1}_>}Y^*_{lm}(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{3.116}$$

oder vereinfacht 7.11.2012

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\frac{q_{lm}}{r^{l+1}_>}Y_{lm}(\theta,\varphi),\ \text{mit } q_{lm} = \int_V \mathrm{d}V\ \rho(\vec{r}\,')(r')^l Y^*_{lm}(\theta',\varphi'). \tag{3.117}$$

Diese nennt man manchmal Kugelmultipolmomente. Teilweise besitzen die q_{lm} in der Literatur unterschiedliche Vorfaktoren. Wir schreiben die ersten Summanden der Reihe auf und benennen besonders wichtige

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0\sqrt{4\pi}}\left[\underbrace{\frac{q_{00}}{r}}_{\text{Monopol}} + \underbrace{\sqrt{3}\frac{q_{10}}{r^2}\cos\Theta - \ldots + \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{q_{1,-1}}{r^2}\sin(\Theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}_{\text{Dipol}} + \underbrace{\ldots}_{\text{Quadrupol}}\right]. \tag{3.118}$$

Nun wollen wir dieselbe Entwicklung in kartesischen Koordinaten erstellen. Dazu beginnen wir bei

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \mathrm{d}V\ \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|},\ \text{mit } \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{r} - \sum_i r'_i\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\sum_{ij} r'_i r'_j\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial r_j}\frac{1}{r}\ldots. \tag{3.119}$$

Die Entwicklung ergibt sich also über eine Taylorreihenentwicklung um $\vec{r}\,' = 0$. Wir schreiben für die ersten Terme

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{r} + \sum_i \frac{r_i}{r^3}r'_i + \sum_{ij}\frac{1}{2}\frac{r_i r_j}{r^5}\left(3r'_i r'_j - (r')^2\delta_{ij}\right) + \ldots. \tag{3.120}$$

Für das Potential gilt dementsprechend

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}Q^{(0)} + \sum_i \frac{r_i}{r^3}Q^{(1)}_i + \sum_{ij}\frac{1}{2}\frac{r_i r_j}{r^5}Q^{(r)}_{ij}\right]. \tag{3.121}$$

Die Qs werden dabei über

$$Q^{(0)} = \int_V \mathrm{d}V\ \rho(\vec{r}\,') = q \qquad \text{Monopol} \tag{3.122}$$

$$Q^{(1)}_i = \int_V \mathrm{d}V\ r_i\rho(\vec{r}\,') = p_i \qquad \text{Dipol} \tag{3.123}$$

$$Q^{(2)}_{ji} = \int_V \mathrm{d}V\ \left(3r'_i r'_j - (r')^2\delta_{ij}\right)\rho(\vec{r}\,') \qquad \text{Quadrupol} \tag{3.124}$$

dargestellt. Der Zusammenhang zwischen Kartesischen Koordinaten und Kugelkoordinaten ist für die ersten paar Terme:

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_V \mathrm{d}V\ \rho(\vec{r}\,') = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} q \tag{3.125}$$

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int_V \mathrm{d}V\ z'\rho(\vec{r}\,') = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z \tag{3.126}$$

$$q_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int_V \mathrm{d}V\ (x' - \mathrm{i}y')\rho(\vec{r}\,') = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - \mathrm{i}p_y) \tag{3.127}$$

$$q_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \int_V \mathrm{d}V\ (3(z')^2 - (r')^2)\rho(\vec{r}\,') = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (Q_{zz}) \tag{3.128}$$

$$q_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int_V \mathrm{d}V\ z'(x' + \mathrm{i}y')\rho(\vec{r}\,') = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{xz} - \mathrm{i}Q_{yz}) \tag{3.129}$$

$$q_2 = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int_V \mathrm{d}V\ (x' + \mathrm{i}y')^2\rho(\vec{r}\,') = -\frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{xx} - 2\mathrm{i}Q_{xy} - Q_{yy}) \tag{3.130}$$

Man kann zeigen, dass der erste nicht verschwindende Term dieser Reihe unabhängig von der Wahl des Ursprungs ist.

3.18. Energie im äußeren Feld

Wir nehmen an es gebe eine Ladungsverteilung mit $\rho(\vec{r}) = 0$ für $|\vec{r} - \vec{r}_0| > R$. Wir definieren $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}\,'$. Wenn wir nun auf die Ladungskonfiguration ein äußeres Feld $\vec{E}_{\mathrm{ext}} = -\nabla\Phi_{\mathrm{ext}}$ wirken lassen, können wir unter der Annahme, dass das äußere Feld sich nur wenig im Bereich der Ladungsverteilung ändert, eine Taylorreihenentwicklung für das Feld machen durchführen:

$$\Phi_{\mathrm{ext}}(\vec{r}) = \Phi_{\mathrm{ext}}(\vec{r}_0 + \vec{r}\,') = \Phi_{\mathrm{ext}}(\vec{r}_0)r_i' + \sum_i \frac{\partial \Phi_{\mathrm{ext}}}{\partial r_i}(r_0)r_i' + \frac{1}{2}\sum_{ij} \frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial \Phi_{\mathrm{ext}}}{\partial r_j}(\vec{r}_0)r_i'r_j' + \dots \tag{3.131}$$

$$= \Phi_{\mathrm{ext}}(\vec{r}_0)r_i' + \sum_i \frac{\partial \Phi_{\mathrm{ext}}}{\partial r_i}(r_0)r_i' + \frac{1}{6}\sum_{ij} \frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial \Phi_{\mathrm{ext}}}{\partial r_j}(\vec{r}_0)\left(3r_i'r_j' - (r')^2\delta_{ij}\right) + \dots . \tag{3.132}$$

Der letzte Schritt kann vollzogen werden, weil $\nabla^2\Phi_{\mathrm{ext}} = 0$ ist. Für die potentielle Energie der Ladungsverteilung ist $\rho(\vec{r}) \equiv \tilde{\rho}(\vec{r}\,')$ im äußeren Feld. Es gilt

$$W = \int_V \mathrm{d}V\ \rho(\vec{r})\Phi_{\mathrm{ext}}(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}V\ \tilde{\rho}(\vec{r}\,')\Phi_{\mathrm{ext}}(\vec{r} - \vec{r}\,') \tag{3.133}$$

$$= q\Phi_{\mathrm{ext}}(\vec{r}_0) - \vec{p}\vec{E}_{\mathrm{ext}}(\vec{r}_0) - \frac{1}{6}\sum_{ij} Q_{ij}\frac{\partial \vec{E}_{\mathrm{ext},j}}{\partial r_j}\vec{r}_0 + \dots . \tag{3.134}$$

Man stelle sich hier Monopol, Dipol, Quadropol und Oktopol vor.

4. Magnetostatik

4.1. Biot-Savart-Gesetz

Ruhende Ladungen „produzieren“ elektrische Felder. Jetzt betrachten wir bewegte Ladungen. Diese „produzieren“ Ströme, welche ein Magnetfeld erzeugen. Wir nehmen im Folgenden stationäre (zeitunabhängige) Ströme an. Dies ist die Magnetostatik. Elektrischer Strom ist definiert als

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \quad \text{mit} \quad \mathrm{d}I = \vec{j}\vec{n}\,\mathrm{d}S, \tag{4.1}$$

wobei $\vec{j}$ die Stromdichte darstellt.

4.1.1. Die Kontinuitätsgleichung

Wir nutzen die Ladungserhaltung zur Herleitung. Wir betrachten ein beliebiges Volumen V mit einer geschlossenen Oberfläche S. Die Ladung ist erhalten, wenn

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}V\ \rho(\vec{r},t) + \int_S \mathrm{d}S\ \vec{n}\vec{j}(\vec{r},t) = 0 \tag{4.2}$$

gilt. Wir nutzen den Gaußschen Satz und ziehen die Ableitung in das Integral hinein

$$\int_V \mathrm{d}V\ \left[\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) + \nabla\vec{j}(\vec{r},t)\right] = 0 \Rightarrow \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \nabla\vec{j}(\vec{r},t) = 0. \tag{4.3}$$

In der Magnetostatik ist der erste Summand 0 und daher ist die Divergenz der Stromdichte 0.

4.1.2. Fortsetzung Biot Savat

Wir betrachten zwei geschlossene Wege C_1 und C_2 durch die der Strom I_1 und I_2 fließt. Wir fragen nun welche Kraft von einem Element $\mathrm{d}\vec{l_1}$ bei $\vec{r}_1$ auf eine Element $\mathrm{d}\vec{l_2}$ an Position r_2 ausgewirkt wird. Es gilt

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{\mathrm{d}\vec{l_1} \times (\mathrm{d}\vec{l_2} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \tag{4.4}$$

und in integraler Form

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint\oint \frac{\mathrm{d}\vec{l_1} \times (\mathrm{d}\vec{l_2} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}. \tag{4.5}$$

Wir nutzen den Zusammenhang $\vec{A} \times (\vec{D} \times \vec{C}) = \vec{D}(\vec{A}\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\vec{D})$. Damit folgt aus der letzten Gleichung 9.11.2012

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint\oint \frac{\mathrm{d}\vec{l_1}\mathrm{d}\vec{l_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}. \tag{4.6}$$

Darüber können wir die magnetische Flussdichte/Induktion $\vec{B}$ als

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \frac{\mathrm{d}\vec{l_2} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \tag{4.7}$$

definieren. Sie wird durch den Strom I_2 bei $\mathrm{d}\vec{l}_2$ erzeugt. Für die Kraft gilt damit

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = I_1(\mathrm{d}\vec{l}_1 \times \mathrm{d}\vec{B}_2), \tag{4.8}$$

worüber man integrieren kann.

4.2. Magnetfeld im Gauß-System

Wir definieren $r_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Im Gauß-System gilt für die Kraft auf ein Stromelement

$$\vec{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{\mathrm{d}\vec{l}_1 \times (\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12})}{|\vec{r}_{12}|^3} \tag{4.9}$$

und im Magnetfeld $\vec{B}$

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{c} I_1(\mathrm{d}\vec{l}_1 \times \vec{B}_2). \tag{4.10}$$

Die magnetische Feldstärke ist dabei definiert als

$$\vec{B}_2 = \frac{1}{c} I_2 \frac{\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}. \tag{4.11}$$

Man wählt $\frac{1}{c}$ in den beiden letzten Gleichungen als „Normierung“, weil es im relativistischen geschickter ist. Im Vakuum gilt zudem $\vec{H} = \vec{B}$. Im Gauß-System ist die Einheit der magnetischen Flussdichte Gauß mit der Umrechnung $1\,\mathrm{T} \longleftrightarrow 10^4\,\mathrm{G}$.

4.3. Kraft zwischen zwei parallelen Drähten

Als Anwendungsbeispiel wollen wir nun die Kraft zwischen zwei parallel Drähten berechnen. Dazu nehmen wir zuerst an, dass der erste Draht L_2 auf der z-Achse liegt. Durch diesen fließt der Strom I_2. Nun wollen wir die magnetische Feldstärke an einem Punkt $\vec{r}_1$ bestimmen. Es gilt

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \int \frac{\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \vec{e}_x \int \frac{\mathrm{z}R}{(R^2 + (z_1 - z_2)^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{4.12}$$

Der Draht ist unendlich ausgedehnt. Wir verschieben unser Koordinatensystem so, dass r auf der Höhe von z=0 liegt

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \vec{e}_x \frac{1}{R} \int_0^\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2}{R} \vec{e}_x. \tag{4.13}$$

Wir betrachten nun einen zweiten Draht, mit dem Strom I_1. Wir wollen die Kraft zwischen beiden Drähten berechnen. Es gilt

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2 I_1}{R} \mathrm{d}z_1. \tag{4.14}$$

Für den Fall $I_1 = I_2 = 1\,\mathrm{A}$ und $R = 1\,\mathrm{m}$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}F_{12}}{\mathrm{d}z_1} = 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N/m}. \tag{4.15}$$

4.4. Allgemeine Formulierung des B.-S.-Gesetzes

Wir nehmen an es gäbe in einem Raum eine beliebige Verteilung der Stromdichte $\vec{j}$. Nun wollen wir feststellen, welche magnetische Feldstärke aus dieser Anordnung folgt. Nach dem B.-S.-Gesetz folgt

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathrm{d}V \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}. \tag{4.16}$$

Dies sieht gravierend ähnlich aus, wie das Coloumbgesetz, wobei das letztere durch einen Skalar „produziert“ wird, während diese hier durch einen Vektor „produziert“ wird. Darüber folgt zudem

$$\vec{F}(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}V \, \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}). \tag{4.17}$$

Kraft auf Punktladung: Wir bestimmen zuerst die Stromdichte einer Punktladung. Diese können wir über ihre Geschwindigkeit angeben:

$$\vec{j} = q\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \Rightarrow \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}_0). \tag{4.18}$$

Dies ist natürlich die Lorentzkraft.

4.5. Feldgleichung, Vektorpotential, Ampere-Gesetz

Wir gehen analog wie beim elektrischen Feld vor. Diesmal bestimmen wir eine Vektorpotential:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_r \times \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\vec{j}(r')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}). \tag{4.19}$$

Dabei gilt die Eichfreiheit

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\vec{j}(r')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + \nabla\chi(r) \tag{4.20}$$

Man kann einen beliebigen Gradientenfunktion hinzuaddieren. Dies ist üblich für Eichtheorien, wie die Elektrodynamik (die Einfachste). Wir wählen im Folgenden $\chi = 0$. Nun folgern wir

$$\nabla\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \vec{j}(\vec{r}\,') \nabla_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \vec{j}(\vec{r}\,') \nabla_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{4.21}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \underbrace{\nabla_{r'} \vec{j}(\vec{r}\,')}_{=0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = 0 \tag{4.22}$$

dabei ist zu beachten, dass dies nur im stationären Fall gilt (Coulomb-Eichung). Wir wollen die Rotation von $\vec{B}$ und Divergenz von $\vec{B}$ berechnen:

$$\nabla\vec{B} = \nabla(\nabla \times \vec{A}) = 0. \tag{4.23}$$

Daraus kann man folgern, dass das B-Feld nicht einzelne feste Quellen besitzt. Aus der Rotation des B-Feldes folgt das Ampere-Gesetz: 14.11.2012

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \underbrace{\nabla(\nabla\vec{A})}_{=0} - \nabla^2\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \vec{j}(r') \underbrace{\nabla_r^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}}_{=-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}). \tag{4.24}$$

4.5.1. Integralform des Ampere-Gesetzes

Wir nutzen das Stokes'sche Gesetz:

$$\oint_C \mathrm{d}\vec{l}\,\vec{B} = \int_S \mathrm{d}S\,\vec{n}\,(\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \int_S \mathrm{d}S\,\vec{n}\,\vec{j} = \mu_0 I_C. \tag{4.25}$$

Man sieht, dass es unabhänig von den Form der Fläche ist. Es zählt nur der Strom, welcher durch diese hindurchfließt.

4.5.2. Randbedingungen

Wir wollen jetzt analog zur Ladung eine Flächenstromdichte definieren über die wir die Randbedingungen für Probleme der Magnetostatik definieren. Wir legen die beiden Terme

$$[j] = \left[\frac{I}{L^2}\right] \quad [k] = \left[\frac{I}{L}\right] \tag{4.26}$$

fest. Wir gehen ähnlich vor, wie bei der Elektrostatik und denken uns erst ein gauss'sches Kästchen an einer Oberfläche. Danach nutzen wir Gleichung (4.23) mit dem Gauss'schen Satz. Dadurch erhalten wir

$$\int_S \mathrm{d}S\,\vec{B}\vec{n} = \int_V \mathrm{d}V\,\nabla\vec{B} \Rightarrow (\vec{B}_1 - \vec{B}_2)\vec{n} = 0, \tag{4.27}$$

wenn wir die beiden Oberflächen immer weiter zusammenlaufen lassen. Als nächstes betrachten wir über das Ampersche Gesetz ein Rechteck, dessen Seitenflächen parallel zur Oberfläche liegen (eine darin, eine draußen):

$$\int \mathrm{d}\vec{l}\,\vec{B} = \mu I_C \Rightarrow \vec{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{K}. \tag{4.28}$$

Daher gilt

$$B_{2,\perp} - B_{1,\perp} = 0 \quad B_{2,\parallel} - B_{1,\parallel} = \mu_0 \vec{K} \times \vec{n}. \tag{4.29}$$

Wir fragen uns nun, welche Bedingung dies für das Vektorpotential mit sich führt. Wir nutzen die gleiche Form wie beim letzten mal:

$$\oint_C \vec{A}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{A}\,\vec{n}\mathrm{d}S = \int_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} \xrightarrow{\delta\to 0} 0. \tag{4.30}$$

Es folgt daher $\vec{A}_{1,\parallel} = \vec{A}_{2,\parallel}$. Zusätzlich gilt nur in Coulomb-Eichung $\vec{A}_{1,\perp} = \vec{A}_{2,\perp}$.

4.6. Multipolentwicklung, magnetischer Dipol

Wir beginnen mit der Formel für das Vektorpotential und betrachten große Abstände R.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3r'\, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{4.31}$$

Wir nutzen die Herleitung aus der Elektrostatik

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\underbrace{\frac{1}{r}\int \mathrm{d}^3r'\vec{j}(r')}_{=\vec{A}^{(0)}(r)} + \sum_i \frac{r_i}{r^3}\int \mathrm{d}^3r'\; r_i'\vec{j}(\vec{r}\,') + \ldots\right], \tag{4.32}$$

und zeigen, dass $\vec{A}^{(0)}(r) = 0$ ist. Für beliebige f, g und $\vec{j}(r) = 0$, mit $r > R$ und $\nabla\vec{j} = 0$ gilt: $\int \mathrm{d}V \left(f\vec{j}\nabla g + g\vec{j}\nabla f\right) = 0$. Das führt dazu

$$f = 1, g = r_i \Rightarrow \int \mathrm{d}^3r\ \vec{j}_i = 0. \tag{4.33}$$

Für den Dipolbeitrag gilt darüber

$$f = r_k, g = r_i \Rightarrow \int \mathrm{d}^3r\ (r_i j_k + r_k j_i) = 0 \tag{4.34}$$

und damit

$$\vec{A}_k^{(1)} = \frac{1}{r^3}\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_i r_i \int \mathrm{d}^3r'\ r_i'\vec{j}(\vec{r}\,') = \frac{1}{2r^3}\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_i r_i \int \mathrm{d}^3r'\ (r_i j_k - r_k j_i). \tag{4.35}$$

Über den Epsilon-Tensor folgt:

$$\vec{A}_k^{(1)} = \frac{1}{r^3}\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{ij} r_i\epsilon_{kil}\int \mathrm{d}^3r'\ \left[\vec{r}\,'\times\vec{j}(\vec{r}\,')\right]_l = \frac{1}{2r^3}\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\vec{r}\times\int \mathrm{d}^3r'\ \left[\vec{r}\,'\times\vec{j}(\vec{r}\,')\right]_l\right]_k, \tag{4.36}$$

was wiederum

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{1}{2r^3}\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{r}\times\int \mathrm{d}^3r'\vec{r}\,'\times\vec{j}(\vec{r}\,'). \tag{4.37}$$

impliziert. Dies kann auch über das magnetische Dipolmoment ausgedrückt werden:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r'\vec{r}\,'\times\vec{j}(\vec{r}\,'). \tag{4.38}$$

Jetzt können wir das Magnetfeld eines Dipols berechnen:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla\times\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{r^3}\right] \tag{4.39}$$

Der Vektor $\vec{n}$ zeigt in Richtung des Vektors $\vec{r}$. Magnetisches Moment einer Leiterschleife, die in einer Ebene liegt:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r'\ \vec{r}\,'\times\vec{j}(\vec{r}\,') = \frac{I}{2}\int \vec{r}\times\mathrm{d}\vec{l} \tag{4.40}$$

Jetzt nutzen wir $\frac{1}{2}\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}S\vec{n}$.

$$\vec{m} = I\int \mathrm{d}S\vec{n} = IS\vec{n} \tag{4.41}$$

4.7. Gyromagnetisches Verhältnis

Wir betrachten einen starren Körper, der mit einer Winkelgeschwindigkeit um eine feste Achse rotiert. Es gibt also ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega}\times\vec{r}$. Die Stromdichte sei $\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})$. Wir nehmen zusätzlich an, der Körper besitze eine Ladungsdichte und eine Massendichte.

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r'\ \rho(\vec{r})\vec{r}\,'\times\vec{v}(\vec{r}\,') \tag{4.42}$$

und

$$\vec{L} = \int \mathrm{d}^3r\ \rho_m(\vec{r})\vec{r}\times\vec{v}(\vec{r}). \tag{4.43}$$

Annahme: ρ und ρ_m sind gleich verteilt. Daher gilt $\frac{\rho}{\rho_m} = \text{const} = \frac{q}{M}$. Damit kommt man auf

$$\vec{m} = \frac{q}{2M}\vec{L} \tag{4.44}$$

Diese Formel ist rein klassisch. Spätestens für Elementarteilchen gilt sie nicht dann müssen wir den Faktor g multiplizieren. Wir nehmen an es würde für ein Elektron gelten und daher für seinen Spin. Für das Bohrmagnetum gilt

$$\mu_B = \frac{eh}{2m_e} \tag{4.45}$$

Aus der Quantenmechanik. Aus der Diracgleichung gilt $\rightarrow q_e = 2$.

4.8. Kraft und Drehmoment auf magnet. Moment im äußeren Magnetfeld

16.11.2012

Wir nehmen an, es gibt eine Stromdichte $\vec{j}$ mit

$$\vec{j} = \begin{cases} 0, r > R_0 \\ \ldots, r < R_0 \end{cases} \tag{4.46}$$

Dann gilt gilt für die Kraft

$$\vec{F} = \int \mathrm{d}^3r\, \vec{j}(\vec{r}\,) \times \vec{B}(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3r\, \vec{j}(\vec{r}\,) \times \left[\vec{B}(0) + \sum_i r_i \nabla_i \vec{B}(0) + \ldots\right]. \tag{4.47}$$

Wir betrachten nur den Dipolbeitrag (erster Summand ist 0):

$$\begin{aligned} F_k &= \sum_{ilm} \int \mathrm{d}^3r\, \epsilon_{klm} j_l(r) r_i \nabla_i B_m(0) = \frac{1}{2}\sum_{ilm} \int \mathrm{d}^3r\, \epsilon_{klm}(j_l r_i - j_i r_l)\nabla_i B_m(0) && (4.48)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{ilmp} \int \mathrm{d}^3r\, \epsilon_{klm}\epsilon_{pil}(\vec{r}\times\vec{j})_p \nabla_i B_m(0) && (4.49)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{imp} \int \mathrm{d}^3r\, (\delta_{mp}\delta_{ki} - \delta_{mi}\delta_{kp})(\vec{r}\times\vec{j})_p \nabla_i B_m(0) && (4.50)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{m} \int \mathrm{d}^3r\, \left[(\vec{r}\times\vec{j})_m \nabla_k B_m(0) - \underbrace{(\vec{r}\times\vec{j})_k \nabla_m B_m(0)}_{=0, \nabla\vec{B}=0}\right] && (4.51)\\ &= \sum_m m_m \nabla_k B_m(0) = \sum_j m_j \nabla_k B_j(0) \Rightarrow \vec{F} = \nabla(\vec{m}\cdot\vec{B}). && (4.52) \end{aligned}$$

Der Skalar $\vec{m}\cdot\vec{B}$ ist die potentielle Energie $-V$. Die Kraft können wir über

$$\mathrm{d}\vec{N} = \vec{r}\times \mathrm{d}\vec{F} \Rightarrow \vec{N} = \int \mathrm{d}^3r\, \vec{r}\times(\vec{j}\times\vec{B}) = \vec{m}\times\vec{B} \tag{4.53}$$

auch anders ausdrücken.

4.9. Faraday'sches Induktionsgesetz

Elektrostatik ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$): Es gilt $\nabla \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \nabla \times \vec{E} = 0, \vec{E} = -\nabla \Phi$. Magnetostatik ($\nabla \vec{j} = 0$): Es gilt $\nabla \vec{B} = 0, \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Faraday entdeckte, dass eine Änderung von $\vec{B}$ ein $\vec{E}$ induziert:

$$\oint_C \mathrm{d}\vec{l}\, \vec{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \mathrm{d}\vec{S}\, \vec{B}. \tag{4.54}$$

Dies ist die elektromotorische Kraft (EMK). Der magnetische Fluss ist definiert als

$$\Phi = \int_S \mathrm{d}\vec{S}\, \vec{B} \Rightarrow E = \oint_C \mathrm{d}\vec{l}\, \vec{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \tag{4.55}$$

Nun wollen wir es in Differentialform bringen:

$$\oint_C \mathrm{d}\vec{l}\, \vec{E} = \int_S \mathrm{d}\vec{S}\, (\nabla \times \vec{E}) \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{4.56}$$

4.10. Magnetische Energie, Induktivität

Wir fangen allgemein an

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \sum_i = \vec{F}_i \vec{v}_i = -\sum q_i \left(\vec{E}_i + \vec{v}_i \times \vec{B}_i\right) \vec{v}_i = -\int \mathrm{d}^3 r\, \vec{E} \cdot \vec{j}. \tag{4.57}$$

Für eine Stromschleife ist die Formel einfach zu schreiben

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -IU = -I \oint_C \mathrm{d}\vec{l}\, \vec{E}. \tag{4.58}$$

Wir gehen nun Schrittweise vor. Wir nehmen die Rotation des B feldes um die Stromdichte zu ersetzen. Danach integrieren wir partiell, sodass die Rotation vor E steht und nutzen das Faradaygesetz.

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mu_0} \int \mathrm{d}^3 r\, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \vec{B} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{2\mu_0} \int \mathrm{d}^3 r\, \vec{B}^2 \Rightarrow W_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathrm{d}^3 r\, \vec{B}^2. \tag{4.59}$$

4.10.1. Induktivitätskoeffizient

Wir betrachten wieder eine Anordnung von Stromschleifen $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ mit den Strömen $I_1, I_2, \dots, C_n$.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r'\, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \int \mathrm{d}^3 r_i\, \frac{\vec{j}(\vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \tag{4.60}$$

Wir nehmen die Vereinfachung an, das die Schleifen (Drähte) extrem dünn sind:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i I_i \oint_{C_i} \frac{\mathrm{d}\vec{l}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \tag{4.61}$$

Magnetischer Fluss.

$$\Phi_k = \int_{S_j} \mathrm{d}\vec{S}_j\, \vec{B}(\vec{r}_j) = \int_{C_j} \mathrm{d}\vec{l}_j\, \vec{A}(r_j) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i I_i \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{\mathrm{d}\vec{l}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \sum_i I_i M_{ji} \tag{4.62}$$

Wenn man die Drähte immer dünner werden lässt, divergiert dieses jedoch, da $1/r$ logarithmisch divergiert. Für die Abschätzung gilt

$$M_{ii} = L_i \propto \frac{\mu_0}{4\pi} R \ln \frac{R}{a} \tag{4.63}$$

4.10.2. Gesamtenergie einer Anordnung der Stromschleifen

Wir nehmen an, es fließen Ströme und wir wissen alle Induktionskoeffizienten. Nun wollen wir wissen, welche magnetische Energie in dieser Anordnung steckt:

$$W_{\text{mag}} = \int \mathrm{d}t \, \frac{\mathrm{d}W_{\text{mag}}}{\mathrm{d}t} = \int \mathrm{d}t \, \left(\frac{\mathrm{d}W_{\text{EMK}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}W_{\text{mech}}}{\mathrm{d}t} \right) \tag{4.64}$$

Damit gilt

$$\frac{\mathrm{d}W_{\text{mag}}}{\mathrm{d}t} = -\sum_i I_i E_i = \sum_i I_i \frac{\mathrm{d}\Phi_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{ij} I_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M_{ij} I_j) \tag{4.65}$$

Nun gibt es Möglichkeiten die Konfigurationen zu bringen

1. erst Schleifen in die entgültige Position bringen, dann Strom erzeugen
2. erst Ströme im Leiter weit weg voneinander erzeugen und dann zusammenbringen.

$$\frac{\mathrm{d}W_{\text{mag}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}W_{\text{EMK}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}W_{\text{mech}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{ij} I_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M_{ij} I_j) + \frac{\mathrm{d}W_{\text{mech}}}{\mathrm{d}t} \tag{4.66}$$

Im ersten Fall bewegen sich die Schleifen nicht (nur am Anfang wenn keine Kräfte wirken). Daher ist die mechanische Energie 0.

$$\frac{\mathrm{d}W_{\text{mag}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{ij} I_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M_{ij} I_j) \Rightarrow W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} I_i I_j \tag{4.67}$$

Dabe sind M_{ij} konstanten. Im zweiten Fall ist es umgekehrt. Ströme sind konstant und Schleifen bewegen sich. In diesem Fall ist die mechanische Arbeit

$$\frac{\mathrm{d}W_{\text{mag}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{ij} I_i I_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M_{ij}) + \frac{\mathrm{d}W_{\text{mech}}}{\mathrm{d}t} = 2\frac{\mathrm{d}W_{\text{mag}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}W_{\text{mech}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}W_{\text{mech}}}{\mathrm{d}t}. \tag{4.68}$$

Ein weiterer Fall wäre, die Schleifen bei festen Flüssen zu bewegen. Daher, falls 21.11.2012

$$\Phi_i = \sum_j M_{ij} I_j = \text{const} \tag{4.69}$$

gilt. Dann würde die gesamte Änderung der magnetischen Energie aus der mechanischen Arbeit resultieren. Die letzte Gleichung können wir auch „invertieren“:

$$I_i = \sum_j (M^{-1})_{ij} \Phi_j. \tag{4.70}$$

Dabei gilt für die Magnetische Energie

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} (M^{-1})_{ij} \Phi_i \Phi_j. \tag{4.71}$$

Dies kann man über die Definition der EMK umschreiben

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \sum_{ij} I_i \int_{C_i} \mathrm{d}\vec{l}_i \, \vec{A}(\vec{r}_i) \Rightarrow \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \, \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) \tag{4.72}$$

und danach partiell Integrieren (mit der Annahme, das alle Randterme im Unendlichen verschwinden):

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathrm{d}^3 r \, (\nabla \times \vec{B}) \cdot A = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathrm{d}^3 r \, \vec{B} \cdot (\nabla \times A) = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathrm{d}^3 r \, \vec{B}^2. \tag{4.73}$$

Dies ist äquivalent zum gefundenen Energieterm.

5. Maxwell-Gleichungen, el./magn. Wellen, Strahlen

5.1. Maxwell-Gleichungen

Wir schreiben nun alle Gleichungen ein weiteres mal aus:

$$\nabla\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho,\ \text{Gauß-Gesetz} \tag{5.1}$$

$$\nabla\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0,\ \text{Faraday-Gesetz} \tag{5.2}$$

$$\nabla\vec{B} = 0 \tag{5.3}$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j},\ \text{Ampere-Gesetz} \tag{5.4}$$

Das Ampere-Gesetz ist unvollständig, da der sie dem Ladungserhaltungsatz Widerspricht. Maxwell erkannte dieses widerspruch und modifizierte sie zu

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0(\vec{j} + \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}). \tag{5.5}$$

Die Divergenz dieser Gleichung ergibt die Ladungserhaltung und damit Konsistenz. Im Gaußsystem sehen die Maxwell-Gleichungen so aus

$$\nabla\vec{E} = 4\pi\rho,\ \text{Gauß-Gesetz} \tag{5.6}$$

$$\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0,\ \text{Faraday-Gesetz} \tag{5.7}$$

$$\nabla\vec{B} = 0 \tag{5.8}$$

$$\nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j},\ \text{Ampere-Gesetz} \tag{5.9}$$

5.2. Vektor- und Skalarpotential, Eichtransformation

Die Zwei Gleichungen

$$\nabla\vec{B} = 0 \quad \nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{5.10}$$

Die Letztere können wir umschreiben in

$$\nabla\times\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi. \tag{5.11}$$

Die erste schreiben wir als Rotation des Vektorpotentials. Dies sind die homogenen Maxwell-Gleichungen. Die Inhomogenen Maxwell-Gleichungen sind:

$$-\nabla^2\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\vec{A}\right) = 4\pi\rho \tag{5.12}$$

und für die allerletzte

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}. \tag{5.13}$$

5.2.1. Eichtransformation

Die Eichtransformation ist

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}. \tag{5.14}$$

Dadurch verändern sich die homogenen Maxwellgleichungen nicht und damit weder B- noch E-Feld. Daher wir können die Potentiale wählen, wie wir sie möchten (Eichfreiheit). Dies kann man mit Bedingungen fixieren. Diese heißen Eichungen. Die zwei wichtigsten sollen nun diskutiert werden.

1. Coulomb-Eichung (auch Strahlungseichung): $\nabla\vec{A} = 0$ (vor allem bei Strahlungsproblemen)
2. Lorenz-Eichung: $\nabla\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$ (explizit relativistisch Invariant)

Vorsicht es gibt einen Lorentz (Hendrik Anton) und einen Lorenz (Ludwig Valentin). Jetzt wollen wir geeignete Potentiale finden, die die Lorenzeichung erfüllen:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} \Rightarrow \nabla\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = 0. \tag{5.15}$$

Für die Gleichung ergibt sich nun

$$\nabla^2\chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = -\left(\nabla\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \tag{5.16}$$

Zu Bemerken ist, dass die Lorenzeichung nicht die Freiheit komplett einschränkt. Beispielsweise, wenn die Potentiale direkt die Gleichung erfüllen kann es zu Problemen kommen.

Inhomogene Maxwell-Gl. in Lorenz-Eichung

Wir nehmen an die Lorenz-Eichung gilt:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \quad \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{5.17}$$

Inhomogene Maxwel-Gl. in Coulomb-Eichung

Wir nehmen an die Coulomb-Eichung gilt:

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho \quad \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \nabla\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \tag{5.18}$$

Die erste Gleichung können wir einfach mit dem Ansatz

$$\varphi(\vec{r},t) = \int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{5.19}$$

Nun zerlegen wir die Stromdichte in senkrechte und parallele Komponenten. Es gilt

$$\vec{j} = \vec{j}_\perp + \vec{j}_{||} \Rightarrow \nabla\vec{j}_\perp = 0, \nabla\times\vec{j}_{||} = 0. \tag{5.20}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{||}. \tag{5.21}$$

Über den Ladungserhaltungsatz können wir zusätzlich

$$\nabla\times\left(\frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = 0 \quad \nabla\left(\frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{5.22}$$

aufstellen. Damit ergibt sich:

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\perp}. \tag{5.23}$$

5.3. Energie- und Impulserhaltung, Poynting-Vektor

Wir betrachten ein System el/mag Felder $\vec{E},\vec{B}$ und geladene Teilchen $[\rho,\vec{j}]$ und möchten sehen, wie die Energieerhaltung in diesem Funktioniert. Dazu berechnen wir die geleistete Arbeit der Felder an Ladungen

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{mat}} = \sum_{i=1}^{N} q_i\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_i}{c}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{v}_i\mathrm{dt} = \sum_i q_i\vec{E}\cdot\vec{v}_i\mathrm{dt} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mat}}}{\mathrm{dt}} \Rightarrow \int \mathrm{d}^3r\vec{E}\vec{j}. \tag{5.24}$$

Jetzt betrachten wir

$$\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \tag{5.25}$$

Wir multiplizieren die erste mit $\vec{B}$ und die zweite mit $\vec{E}$ und subtrahieren sie voneinander

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\vec{B} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\vec{E} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\vec{E}\underbrace{-\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E}) + \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B})}_{=-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})}. \tag{5.26}$$

Es ergibt sich also

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{E}^{\,2} + \vec{B}^{\,2}}{8\pi} = -\vec{j}\vec{E} - \frac{c}{4\pi}\nabla(\vec{E}\times\vec{B}). \tag{5.27}$$

Die Energiedichte des el/mag Feldes ist somit

$$w_{\mathrm{em}} = \frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^{\,2} + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^{\,2} \tag{5.28}$$

Der Koeffizient

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B} \tag{5.29}$$

heißt Poyntingvektor. Darüber können wir das Poyntingtheorem aufschreiben:

$$\frac{\partial w_{\mathrm{em}}}{\partial t} + \nabla\vec{S} = -\vec{j}\vec{E}. \tag{5.30}$$

Der erste Teil beschreibt die Veränderung der Energie des e/m Feldes. Der letzte Teil bezeichnet die Umwandlung der Energie des e/m Feldes in Energie von Teilchen. Der mittlere Term bezeichnet den Energiefluss (Energiestromdichte). Nun wollen wir dies in eine Integralform bringen. Wir betrachten ein Volumen V, welches von der Fläche S umschlossen wird. Wir betrachten ein Flächenelement $\mathrm{d}\vec{s}$ und integrieren über das gesamte Volumen V:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}^3r\; w_{\mathrm{em}} + \int_V \mathrm{d}^3r\; \vec{j}\cdot\vec{E} = -\oint_s \mathrm{d}\vec{s}\,\vec{S} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(w_{\mathrm{em}}+w_{\mathrm{mat}}) = -\oint_s \mathrm{d}\vec{s}\,\vec{S}. \tag{5.31}$$

Nun wollen wir eine ähnliche Betrachtung für die Impulserhaltung anstellen. Wir beginnen mit dem Impuls der Materie

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{\mathrm{mat}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i q_i\left(\vec{E}+\frac{\vec{v}_i}{c}\times\vec{B}\right) \Rightarrow \int \mathrm{d}^3r\;\left(\rho\cdot\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}\right). \tag{5.32}$$

Wir nutzen

$$\nabla\vec{E} = 4\pi\rho, \nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{5.33}$$

und formen um

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{\mathrm{mat}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r\;\left[\vec{E}(\nabla\vec{E}) - \vec{B}\times(\nabla\vec{B}) - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}\right]. \tag{5.34}$$

Wir betrachten

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) - \vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) + c\vec{E}\times(\nabla\times\vec{E}) \tag{5.35}$$

und setzen ein

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{\mathrm{mat}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}^3r\;\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{4\pi c} = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r\;\left[\vec{E}(\nabla\vec{E}) - \vec{E}\times(\nabla\vec{E}) + \underbrace{\vec{B}(\nabla\vec{B})}_{=0} - \vec{B}\times(\nabla\times\vec{B})\right]. \tag{5.36}$$

Wir schreiben als letztes nun

$$\begin{aligned}\left[\vec{E}(\nabla\vec{E}) - \vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})\right]_j &= E_j\sum_i \nabla_i E_i - \sum_{klmp}\epsilon_{jkl}\epsilon_{lmp}E_k\nabla_m E_p &(5.37)\\ &= E_j\sum_i \nabla_i E_i - \sum_{kmp}(\delta_{jm}\delta_{kp}-\delta_{jp}\delta_{km})E_k\nabla_m E_p &(5.38)\\ &= E_j\sum_k \nabla_k E_k - \sum_k E_k\nabla_j E_k - E_k\nabla_k E_j &(5.39)\\ &= \sum_k \nabla_k(E_jE_i - \frac{1}{2}\delta_{ji}\vec{E}^{\,2}). &(5.40)\end{aligned}$$

Damit können wir den Maxwellschen Spannungstensor

$$T_{jk} = \frac{1}{4\pi}\left[E_jE_k + B_jB_k - \frac{\delta_{jk}}{2}\left(\vec{E}^{\,2}+\vec{B}^{\,2}\right)\right] \tag{5.41}$$

definieren. Damit ergibt sich:

$$\left[\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{\mathrm{mat}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}^3r\;\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{4\pi c}\right]_j = \int \mathrm{d}^3r\sum_k \nabla_k T_{jk}. \tag{5.42}$$

Dies hat wieder die Struktur eines Erhaltungssatzes. Dabei ist der zweite Summand der Impuls des el/mag Feldes. der Rechte Teil ist somit die zeitliche Änderung des Impulses. Damit ist

$$\vec{g}_{em} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{4\pi c} = \frac{1}{c^2}\vec{S} \tag{5.43}$$

die Impulsdichte des el/mag Feldes. Die Struktur des Erhaltungssatzes ist

$$\left[\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{\mathrm{mat}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{P}_{\mathrm{em}}}{\mathrm{d}t}\right]_j = \int_V \mathrm{d}^3 r \sum_k \nabla_k T_{jk} = \oint \mathrm{d}s_k T_{jk}. \tag{5.44}$$

Das Letzte ist die negative Impulsflussdichte. Die Impulse ergeben sich aus 28.11.2012

$$P = \int \mathrm{d}^3 r \; g_{\mathrm{em}}. \tag{5.45}$$

Wir wollen nun den Impulserhaltungssatz in Differentialform schreiben:

$$\left(\vec{\rho}\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{B} + \frac{\partial \vec{g}_{\mathrm{em}}}{\partial t}\right)_j = \nabla_k T_{jk}. \tag{5.46}$$

Über den Spannungstensor kann beispielsweise die Kraft von einer Ladung auf eine metallische Kugel bestimmt werden (wie auch mit der Methode der Spiegelladungen).

5.4. Elektromagnetische Welle

Wir betrachten die Maxwell-Gleichungen in φ und $\vec{A}$ Darstellung. Wir verwenden die Coulomb-Eichung.

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho \quad \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\perp}. \tag{5.47}$$

Wir betrachten den freien Raum: $\rho = 0, \vec{j} = 0$. Wir nehmen an, dass aus $\nabla^2\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$, da diese Lösung sich „gut“ im unendlichen verhält. Damit vereinfacht sich die zweite Gleichung von Gleichung (5.47):

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{5.48}$$

Diese Wellengleichung muss nun gelöst werden.

5.4.1. 1-D Lösungen der Wellengleichung

Damit vereinfacht sich die Wellengleichung auf

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) f = 0. \tag{5.49}$$

Daraus folgt, dass

$$f(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \tag{5.50}$$

für beliebige Funktionen f_1, f_2 Lösung der Wellengleichung ist. Dabei läuft die erste nach rechts und die zweite nach Links mit der Geschwindigkeit c. Wir benutzen eine Fouriertransformation

$$f_j(x) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \tilde{f}_j(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{5.51}$$

Es gilt f_j reell folgt $\tilde{f}_j(k) = \tilde{f}_j^*(-k)$. Bei genauerer Betrachtung gilt

$$f(x,t) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \left[\tilde{f}_1(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-ct)} + \tilde{f}_2(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+ct)} \right] \tag{5.52}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \left[\tilde{f}_1(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} + \tilde{f}_1(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \right]. \tag{5.53}$$

Die Lösungen sind also harmonisch (ebene Wellen). Es reicht wenn wir nur die Lösungen mit $\omega > 0$ zu betrachten, da die mit $\omega < 0$ komplex konjugiert sind. Als Schreibweise ist

$$f(x,t) = \mathrm{Re}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}. \tag{5.54}$$

Jedoch lässt man meist das „Re“ weg.

5.4.2. Ebene Wellen in 3D

Im Dreidimensionalen löst sich die Wellengleichung ähnlich:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow f(\vec{r},t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}. \tag{5.55}$$

5.4.3. Ebene el/mag Wellen

Es gilt

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}, \omega = ck. \tag{5.56}$$

Daraus berechnen wir die Felder. Es gilt die Coulomb-Eichung:

$$\nabla \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{k}\vec{A}_0 = 0. \tag{5.57}$$

Für das elektrische Feld gilt

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mathrm{i}\omega}{c} \vec{A}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = \mathrm{i}k\vec{A}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \tag{5.58}$$

und für das magnetische Feld gilt

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \nabla \times \vec{A} = \mathrm{i}\vec{k} \times \vec{A}_0 e^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}. \tag{5.59}$$

Daraus folgt

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 e^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}. \tag{5.60}$$

Wir wollen nun die Amplituden näher betrachten:

$$\vec{A}_0\vec{k} = 0 \Rightarrow \vec{E}_0\vec{k} = 0 \quad \vec{B} = \mathrm{i}\vec{k} \times \vec{A}_0 \Rightarrow \vec{B}_0\vec{k} = 0. \tag{5.61}$$

Daraus folgt, dass el/mag Wellen transversal sind, da das E- und das B-Feld senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen. Beide Felder stehen senkrechtaufeinander:

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E} \Rightarrow |\vec{B}| = |\vec{E}|, \vec{B} \perp \vec{E}. \tag{5.62}$$

Das sind die wichtigstens Eigenschaften der Felder einer Elektromagnetischen Welle. Den Vektor $\vec{k}$ nennt man Wellenvektor, er bestimmt die Ausbreitungsrichtung der Welle. Dies folgt aus einer Betrachtung der Phasenfläche $\vec{k}\vec{r} - \omega t = \mathrm{const}$. Dies ist eine 2D-Fläche im 3D-Raum. Dies verschiebt sich in Richtung von $\vec{k}/k$ mit der Geschwindigkeit von $c = \omega/k$. Ein weiteres Argument ist die berechnung der Energierichtung. Dafür nutzen wir die Formel für die Energiestromdichte (Poynting-Vektor):

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B}, \|\vec{k}. \tag{5.63}$$

Damit ist $\vec{k}$ auch die Richtung des Energietransportes. Das E- und B-Feld haben maximale Amplitude an gleichen Stellen, dies folgt aus der Gleichheit der Beträge. Daher folgt, dass beide in Phase sind.

5.5. Polarisation, lineare, zirkulare, elliptische

Wir legen die z-Achse in Richtung von $\vec{k}$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \tag{5.64}$$

Wir nehmen an, dass $\vec{A}_0$ reel ist (oder einen komplexen Phasenfaktor besitzt $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$). Es soll gelten

$$\vec{A} = A_0 \vec{e}_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz - \omega t)}, \mathrm{Re} \Rightarrow A_0 \vec{e}_x \cos(kz - \omega t) \tag{5.65}$$

$$\vec{E} = \mathrm{i}k A_0 \vec{e}_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz - \omega t)}, \mathrm{Re} \Rightarrow -k A_0 \vec{e}_x \sin(kz - \omega t) \tag{5.66}$$

$$\vec{B} = \mathrm{i}k A_0 \vec{e}_z \times \vec{e}_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz - \omega t)}, \mathrm{Re} \Rightarrow -k A_0 \vec{e}_y \sin(kz - \omega t). \tag{5.67}$$

Hier folgt eine Skizze der EM-Welle. Normalerweise. Jetzt wollen wir verschiedene Varianten des Vektors $\vec{A}_0$. Im Fall von: 30.11.2012

$$\vec{A}_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \cdot \text{reeller Vektor} \Rightarrow \text{lineare Polarisation}. \tag{5.68}$$

Im allgemeinen Fall gilt $\vec{E}_0$ ist beliebig komplex. Daher er kann zerlegt werden $\vec{E}_0 = \vec{a}_1 + \mathrm{i}\vec{a}_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(\vec{b}_1 + \mathrm{i}\vec{b}_2)$. Der Winkel α wird dabei später festgelegt.

$$\vec{E}_0^2 = \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0 = |\vec{E}_0^2| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}(\vec{b}_1 + \mathrm{i}\vec{b}_2)^2 \tag{5.69}$$

über

$$|\vec{E}_0^2| = (\vec{b}_1 + \mathrm{i}\vec{b}_2)^2 = \vec{b}_1^2 + \vec{b}_2^2 + 2\mathrm{i}\vec{b}_1\vec{b}_2 \tag{5.70}$$

kommen wir darauf, dass $\vec{b}_1$ orthogonal zu $\vec{b}_2$ ist. Wenn mindestens eines von beiden nicht Null ist, dann liegt lineare Polarisation vor. Diesen Fall wollen wir nicht betrachten. Wegen $\vec{E}\vec{k} = 0$ sind die beiden Vektoren orthogonal zum Wellenvektor $\vec{k}$. Wir wählen

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{b_1}, \vec{e}_2 = \mp \frac{\vec{b}_2}{b_2}, \vec{e}_3 = \frac{\vec{k}}{k} \tag{5.71}$$

Wir betrachten die Koordinatentransformation $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \rightarrow \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$. Das elektrische Feld wird dadurch

$$\vec{E} = (b_1\vec{e}_1 \mp \mathrm{i}b_2\vec{e}_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha)} = (b_1\vec{e}_x \mp \mathrm{i}b_2\vec{e}_y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \tag{5.72}$$

für das magentische feld gilt dagegen

$$\vec{B} = \vec{e}_z \times \vec{E} = (b_1\vec{e}_y \pm \mathrm{i}b_2\vec{e}_x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}. \tag{5.73}$$

Betrachten wir die Physikalischen reellen Felder, so gilt:

$$\vec{E} = \vec{e}_x b_1 \cos(kz - \omega t) \pm \vec{e}_y b_2 \sin(kz - \omega t) \tag{5.74}$$

$$\vec{B} = \vec{e}_y b_1 \cos(kz - \omega t) \mp \vec{e}_x b_2 \sin(kz - \omega t) \tag{5.75}$$

An einem festen Raumpunkt beschreibt $\vec{E}$ somit eine Ellipse in der (x, y)-Ebene

$$\frac{\vec{E}_x^2}{b_1^2} + \frac{\vec{E}_y^2}{b_1^2} = 1 \quad \frac{\vec{B}_x^2}{b_2^2} + \frac{\vec{B}_y^2}{b_1^2} = 1. \tag{5.76}$$

Je nachdem welche Vorzeichen in Gleichung (5.75) stehen rotieren diese gegen- oder mit dem Uhrzeigersinn. Es gibt einige Spezialfälle:

- $b_1 = 0$ oder $b_2 = 0$ folgt lineare Polarisation
- $b_1 = b_2$, dann liegt eine zirkulare Polarisation vor

Im letzten Falle nennt man die Drehung linkszirkularpolarisiert, wenn eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn vorliegt. Eine allgemeine elliptische Polarisation kann man als Überlagerung von zwei linearen Polarisationen auffassen (Bspw. $\vec{E} \| \vec{e}_x$ und $\vec{E}\,' \| \vec{e}_y$) oder als zwei unabhängige zirkularpolarisierte Wellen.

5.6. Energie-Dichte und -Fluß

Wir betrachen die Formel Formel der allgemeinen Welle

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\,\vec{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad \vec{B} = \mathrm{Re}\,\vec{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}. \tag{5.77}$$

und die größen

$$\omega_{\mathrm{em}} = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^{\,2} + \vec{B}^{\,2}) \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B}. \tag{5.78}$$

Nun wollen wir die zeitgemittelten Größen berechnen. Wir nehmen an es gibt

$$\vec{a} = \mathrm{Re}\,\vec{a}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = \frac{1}{2}\left[\vec{a}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} + \vec{a}_0^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\right] \tag{5.79}$$

$$\vec{b} = \mathrm{Re}\,\vec{b}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = [\ldots]\,. \tag{5.80}$$

Darüber können wir schreiben

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \frac{1}{4}\left\langle \vec{a}_0\vec{b}_0^* + \vec{a}_0^*\vec{b}_0 + \ldots \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{a}_0\vec{b}_0^*) \Rightarrow \omega_{\mathrm{em}} \frac{1}{16\pi}(\vec{E}_0\vec{E}_0^* + \vec{B}_0\vec{B}_0^*) = \frac{1}{8\pi}\vec{E}_0\vec{E}_0^*. \tag{5.81}$$

Dies passiert auch beim Poyntingvektor

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\,(\vec{E}_0 \times \vec{B}_0^*) = \langle \omega_{\mathrm{em}} \rangle\, c\frac{\vec{k}}{k}. \tag{5.82}$$

Die Welle transportiert Energie mit Geschwindigkeit c in Richtung des Wellenvektors $\vec{k}$.

5.7. Hohlraumwellen: Hohlraumresonatoren und Wellenleiter

Wir betrachten el/mag Wellen in einem Volumen, welche durch Metallwände begrenzt werden. Im inneren herschen freie Maxwellgleichungen und am Rand diverse Randbedingungen:

`Bilder von Hohlraumresonatoren`

5.12.2012

Wir werden das Metall, als idealen Leiter betrachten ($R=0$). Die Ladungen können sich unendlich schnell bewegen (daher gilt $\vec{E}=0$. Dies macht vorerst die Randbedingungen einfacher. Wir wollen jetzt eine an der Grenze des Metalls finden

$$\vec{E}_{\parallel} \text{ stetig } \Rightarrow \vec{E}_{\parallel}(\vec{R},t)=0 \text{ an der Grenzfläche.} \tag{5.83}$$

Die Randbedingungen für das B-Feld erhalten wir aus den Maxwell-Gleichungen

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\vec{B}\Rightarrow\vec{B}_{\perp}\equiv\vec{B}\cdot\vec{n}=0. \tag{5.84}$$

Wir leiten die Wellengleichung für das E und B-Feld ab

$$\nabla^2\vec{E}=-\nabla\times\underbrace{(\nabla\times\vec{E})}_{=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}+\underbrace{\nabla(\nabla\vec{E})}_{=0}=\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E}=0 \tag{5.85}$$

Jetzt betrachten wir den Hohlraumresonator, $0\le x\le L$, $0\le y\le L_2$, $0\le z\le L_3$. Wir wählen einen Seperationsansatz für E_x

$$E_x(x,y,z,t)=X(x)Y(y)Z(z)T(t)\Rightarrow\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}+\frac{Z''}{Z}-\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}=0. \tag{5.86}$$

Wir wählen $X''/X=-k_1^2$, $Y''/Y=-k_2^2$, $Z''/Z=-k_3^2$ und $T''/T=-\omega^2$. Darüber folgt, dass $\omega^2=c^2(k_1^2+k_2^2+k_3^2)$. Die Randbedingung: $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}$. Wir setzen einen sin- und cos-Ansatz an.

$$X''=-k_1^2X=a\sin(k_1x+\alpha_1)\equiv b\sin k_1x+c\cos k_1x\equiv d\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1x}+f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1x}. \tag{5.87}$$

Darüber gilt

$$E_x=\mathrm{Re}\left[c_1\sin(k_1x+\alpha_1)\sin(k_2x+\alpha_2)\sin(k_3x+\alpha_3)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\right]. \tag{5.88}$$

Die Randbedingungen sagen nun aus $E_x=0$ an $y=0,\ L_2$ bzw. $z=0,\ L_3$. Daraus gilt $k_2=m\pi/L_2$,$k_3=n\pi/L_3$, mit $\alpha_1=\alpha_2$.

$$E_x=\mathrm{Re}\left[c_1X(x)\sin\left(\frac{my\pi}{L_2}\right)\sin\left(\frac{nz\pi}{L_3}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\right]. \tag{5.89}$$

Nun vollziehen wir dies für die y- und z-Komponente

$$E_y=c_2Y(y)\sin\left(\frac{lx\pi}{L_1}\right)\sin\left(\frac{nz\pi}{L_3}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' x} \tag{5.90}$$

$$E_z=c_3Z(z)\sin\left(\frac{lx\pi}{L_1}\right)\sin\left(\frac{my\pi}{L_2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'' x}. \tag{5.91}$$

Wir nutzen, dass $\nabla\vec{E}=0$ innerhalb des Quaders

$$\nabla\vec{E}=c_1\left(\frac{\mathrm{d}X(x)}{\mathrm{d}x}\cdot\ldots\right)+c_2\left(\frac{\mathrm{d}Y(y)}{\mathrm{d}y}\cdot\ldots\right)+c_3\left(\frac{\mathrm{d}Z(z)}{\mathrm{d}z}\cdot\ldots\right). \tag{5.92}$$

Daraus folgt, dass $\omega=\omega'=\omega'',l=l',m=m',n=n'$ und

$$\frac{\mathrm{d}X(x)}{\mathrm{d}x}\propto\sin\frac{l\pi x}{L_1}\Rightarrow X(x)=\cos\frac{l\pi x}{L_1}. \tag{5.93}$$

Damit gilt für die allgemeine Lösung:

$$E_x = c_1 \cos\left(\frac{l\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{my\pi}{L_2}\right) \sin\left(\frac{nz\pi}{L_3}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{5.94}$$

$$E_y = c_2 \cos\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) \sin\left(\frac{lx\pi}{L_1}\right) \sin\left(\frac{nz\pi}{L_3}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{5.95}$$

$$E_z = c_3 \cos\left(\frac{n\pi z}{L_3}\right) \sin\left(\frac{mx\pi}{L_1}\right) \sin\left(\frac{my\pi}{L_2}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{5.96}$$

Es gilt $l, m, n \in \mathbb{N}_0$ (Maximal eine Komponente darf immer Null werden!). Nun können wir zudem die Kreisfrequenz berechnen:

$$\omega^2 = c^2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2), k_1 = \frac{l\pi}{L_1}, k_2 = \frac{m\pi}{L_2}, k_3 = \frac{n\pi}{L_3} \Rightarrow \omega = \pi c \sqrt{\frac{l^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2} + \frac{n^2}{L_3^2}}. \tag{5.97}$$

Wegen $\nabla \vec{E} = 0$ gilt zudem

$$c_1 \frac{l\pi}{L_1} + c_2 \frac{m\pi}{L_2} + c_3 \frac{n\pi}{L_3} = 0 \tag{5.98}$$

Zwei von den Cs können frei gewählt werden. Wir berechnen das B-Feld über die maxwellschen Gleichungen

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\vec{B} \Rightarrow B_x = -\frac{\mathrm{i}c}{\omega}\left(c_3 \frac{m\pi}{L_2} - c_2 \frac{n\pi}{L_3}\right) \sin \frac{l\pi x}{L_1} \cos \frac{m\pi y}{L_2} \cos \frac{n\pi z}{L_3} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{5.99}$$

Diese Lösungen nennt man Eigenmoden (Eigenschwingungen) des Resonators. ω_{lmn} nennt man Eigenfrequenzen.

`Bild von Eigenmoden (nur Abhänigkeit von z Komponente)`

Die Wellen stehen (daher die Nullstellen bleiben fest). Die Wellenlänge ist $\lambda_z = 2L_3/n$. Nun wollen wir einen Wellenleiter in z-Richtung betrachten, welcher unbegrenzt ist und rechteckig $0 \leq x \leq L_1$ und $0 \leq y \leq L_2$. Wir nutzen zur Lösung, denselben Seperationsansatz

$$Z(z) = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kz} \tag{5.100}$$

Die restlichen Faktoren bleiben.

$$E_x = c_1 \cos\left(\frac{l\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{my\pi}{L_2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \tag{5.101}$$

$$E_y = c_2 \cos\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) \sin\left(\frac{lx\pi}{L_1}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \tag{5.102}$$

$$E_z = c_3 \sin\left(\frac{mx\pi}{L_1}\right) \sin\left(\frac{my\pi}{L_2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}. \tag{5.103}$$

Für die Kreisfrequenz gilt nun

$$\omega^2 = c^2\left(\frac{\pi^2 l^2}{L_1^2} + \frac{\pi^2 m^2}{L_2^2} + k^2\right). \tag{5.104}$$

Zudem gilt dieselbe Randbedingung mit der Divergenz innerhalb des Wellenleiters:

$$c_1 \frac{l\pi}{L_1} + c_2 \frac{m\pi}{L_2} - ic_3 k = 0. \tag{5.105}$$

Das magnetische Feld können wir auch analog zum letzten Beispiel berechnen:

$$B_z = -\frac{c}{\omega}\left(-c_1\frac{l\pi}{L_1} + c_2\frac{m\pi}{L_2}\right)\cos\left(\frac{mx\pi}{L_1}\right)\cos\left(\frac{my\pi}{L_2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\dots \tag{5.106}$$

Für freie el/mag Wellen liegen TEM-Wellen (Transversal) vor. Für einen Wellenleiter mit rechteckigen Querschnitt existieren solche TEM-Moden (Lösungen) nicht. Es folgt

$$B_z = 0 \Rightarrow c_2\frac{l\pi}{L_1} - c_1\frac{m\pi}{L_2} = 0, E_z = 0 \Rightarrow c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = 0 \Rightarrow c_2\frac{l\pi}{L_1} + c_1\frac{m\pi}{L_2} = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0. \tag{5.107}$$

Es existieren transversal Elektrische (TE) und transversal Magnetische (TM) Lösungen. Im Fall von einem Kern im Wellenleiter können auch TEM Moden existieren.
Wir betrachten nun zuerst die TE-Moden ($E_z = 0, B_z \neq 0$ für $l = m = 0$ nicht erlaubt, daher max. eine ist Null). Wir wollen die niedrigste Frequenz im Fall $L_1 > L_2$ betrachten, daher wählen wir $(l, m) = (1, 0)$.

$$\omega \equiv \omega_{1,0} = c\sqrt{\frac{\pi^2}{L_1^2} + k^2} > \omega_{cr},\ \omega_{cr} = \frac{c\pi}{L_1}. \tag{5.108}$$

Im Wellenleiter können sich keine Wellen mit $\omega \leq \omega_{cr}$ ausbreiten. Im freien Raum herrscht eine lineare Abhängigkeit zwischen ω und k. Im Wellenleiter ist dies ein asymptotisches Verhalten an diese Gerade.

`Bild der Annäherung an die Gerade, für verschiedene Grundfrequenzen.`

Man sieht dies an der Gleichung

$$\omega = c\sqrt{k^2 + \dots} \tag{5.109}$$

Für große k strebt diese gegen ck.

7.12.2012

Einschub: Über einen Vergleich sehen wir (besser aber herleitbar über partielle Integration:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,\mathrm{i}k\tilde{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \underset{Fourier}{\rightarrow} \mathrm{i}k\tilde{f}(k). \tag{5.110}$$

Wir verallgemeinern dies jetzt auf höhere Ableitungen

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} \underset{Fourier}{\rightarrow} -k^2\tilde{f}(k) \tag{5.111}$$

und jetzt auf mehrere Dimensionen (mehrdimensionale partielle Integrationen für abfallende Randterme):

$$\nabla f(\vec{r}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3}\,\mathrm{i}\vec{k}\tilde{f}(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\vec{r}}. \tag{5.112}$$

5.8. Green'sche Funktion der Wellengleichung, Retardierte Potentiale

Wir betrachten die Lorenz-Eichung: Daraus folgt für die Maxwellgleichung:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \quad \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{5.113}$$

Wir wollen die Lösung der Wellengleichung finden:

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -4\pi f. \tag{5.114}$$

Dafür definieren wir die Green'sche Funktion G für Wellengleichung mit

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{r}, t, \vec{r}\,', t') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\delta(t - t'). \tag{5.115}$$

Die Allgemeine Lösung ist nun

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int \mathrm{d}^3r'\mathrm{d}t' G(\vec{r}, t, \vec{r}\,', t') f(\vec{r}\,', t') + \Psi_0(\vec{r}, t). \tag{5.116}$$

Dies sieht man, wenn man den Wellenoperator in Gleichung (5.114), auf die obere anwendet. Der Summand Ψ_0 löst den homogenen Teil der Wellengleichung. Jetzt Fouriertransformieren wir dies nach der Zeit:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int \frac{\mathrm{d}}{2\pi}\tilde{\Psi}(\vec{r}, \omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \quad \tilde{\Psi}(\vec{r}, \omega) = \int \mathrm{d}\Psi(\vec{r}, t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{5.117}$$

Wir setzen dies in die obige Gleichung ein

$$\int \frac{\omega}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{\Psi}(r, \omega) = -4\pi\int \frac{\omega}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\tilde{f}. \tag{5.118}$$

Die Transformierte Gleichung nennt man Helmoltzgleichung:

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{\Psi}(\vec{r}, \omega) = -4\pi\tilde{f}(\vec{r}, \omega). \tag{5.119}$$

Speziell in der Physik lässt man oft die Tilde weg und unterscheidet die normale und Fouriertransformierte über das Argument. Die Green'sche Funktion der Helmholtzgleichung ist dabei als

$$(\nabla_r^2 + k^2)G_k(\vec{r}, \vec{r}\,') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \tag{5.120}$$

gegeben. Wir betrachten nun außerhalb von $R = 0$:

$$(\nabla^2 + k^2)G_k(R) = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}R^2}\left[RG_k(R)\right] + k^2\left[RG_k(R)\right] = 0. \tag{5.121}$$

Die Lösung der DGL ist klar. Es ist

$$RG_k(R) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR} + Be^{-\mathrm{i}kR} \Rightarrow G_k(R) = \frac{A}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR} + \frac{B}{R}e^{-\mathrm{i}kR}. \tag{5.122}$$

Jetzt betrachten wir das Ganze in der Nähe der Singularität

$$(\nabla^2 + k^2)G_k = -4\pi\delta(\vec{R}) \underset{\text{k ist endlich}}{\longrightarrow} \nabla^2 G_k = -4\pi\delta(\vec{R}). \tag{5.123}$$

Wir wissen die Lösung der Poisson Gleichung und es gilt

$$\lim_{R\to 0} RG_k(R) = 1. \tag{5.124}$$

Damit gilt

$$G_k(R) = AG_k^+(R) + BG_k^-(R), A + B = 1, G_k^\pm(R) = \frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kR}}{R}. \tag{5.125}$$

Daraus können wir jedoch noch nichts direkt folgern. Deswegen betrachten wir die Zeitabhänigkeit:

$$G^\pm(\vec{r}, \omega, \vec{r}\,', t') = \frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'}. \tag{5.126}$$

Damit ergibt sich

$$G^\pm(\vec{r}, t, \vec{r}\,', t') = \frac{\delta(t - t' \mp \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \tag{5.127}$$

Damit ergibt sich weiterhin als Lösung der Wellengleichung:

$$\Psi = \int \mathrm{d}^3r'\ \frac{f(\vec{r}\,', t \mp \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \Psi_0 \tag{5.128}$$

G^+ nennen wir retardierte Green'sche Funktion (wird normalerweise gesucht), sie entspricht der Kausalität, da $t' = t - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'| < t$. G^- heißt avancierte Green'sche Funktion. Die Retardierten Potentiale sind somit:

$$\varphi = \int \mathrm{d}^3r'\ \frac{\rho(\vec{r}\,', t - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{5.129}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \tag{5.130}$$

Jetzt wollen wir das noch Analysieren. Wir wählen eine Quelle, die in der nähe an dem Punkt R' liegt. Jetzt fragen wir an welchen Punkten R und T das Feld verursacht wird $t = \frac{1}{c}|\vec{r}|$.

`Lichtkegel im vierdimensionalen Raum.`

12.12.2012

5.9. Strahlung

Wir betrachten eine Lokalisierung einer Ladungs- und Stromdichte (ρ und $\vec{j}$). Wir wollen nun die Felder außerhalb dieses Bereichs berechnen:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_0(\vec{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{5.131}$$

Uns interessiert der Fall, für $\omega \neq 0$. Wir wollen nun das Vektorpotential bestimmen, da wir daraus, das magnetische und elektrische Feld bestimmen können ($\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \vec{E} = \frac{\mathrm{i}c}{\omega}\nabla \times \vec{B}$). Die Bestimmungsgleichung für $\vec{E}$ folgt aus der vierten Maxwell'schen Gleichung, da die Stromdichte im Außenraum 0 ist. Diese formen wir weiter um

$$\vec{E} = \frac{\mathrm{i}c}{\omega}\nabla \times \vec{B} = \frac{\mathrm{i}}{k}\nabla \times (\nabla \times \vec{A}). \tag{5.132}$$

Wir können $\vec{A}$ über die harmonische Abhänigkeit bestimmen

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r'\ \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \vec{A}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r'\ \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \tag{5.133}$$

Wir nehmen an, dass $d \ll \lambda \Leftrightarrow kd \ll 2\pi$ gilt, wobei d ungefähr der Ausdehnung der Quelle. Wir bezeichnen Abstände $r \ll \lambda$ sind, als Nahzone (statische Zone) und das Feld Nahfeld, Abstände $r \gg \lambda$ sind als Fernzone (Fernfeld). Dazwischen liegt die Zwischenzone. In der Nahzone ist der Exponent des Exponentials sehr klein. Daher können wir in diesem Bereich dieses durch 1 ersetzen.

$$\vec{A}(\vec{r},t) \approx \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r' \, \frac{\vec{j}_0(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \approx \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r' \, \frac{\vec{j}_0(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \tag{5.134}$$

Daher spielen Retardierungseffekte hier keine Rolle. Wir sehen dies entspricht der Formel aus der Magnetostatik (dies gilt auch für ϕ). In der Fernzone ($|\vec{r}-\vec{r}\,'| \gg \frac{2\pi}{k} \gg r'$) können wir $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ nach r' entwickeln:

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = r - \vec{n}\vec{r}\,' + \dots. \tag{5.135}$$

Wir brechen die Entwicklung, für Terme höherer Ordnung ab. Daraus folgt

$$\vec{A}_0(\vec{r}) \approx \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr} \underbrace{\int \mathrm{d}^3r' \, \vec{j}_0(\vec{r}\,')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\vec{n}\vec{r}\,'}}_{\equiv \vec{g}(k\vec{n})} + \mathcal{O}(1/r^2). \tag{5.136}$$

Nun wollen wir die Felder berechnen:

$$\vec{B}_0(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}_0(\vec{r}) = \nabla \times \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr} g(k\vec{n})\right]. \tag{5.137}$$

Nun zeigen wir, dass bei einer Ableitung der führende Term aus dem Exponenten kommt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{x} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{x}\left(\mathrm{i}k - \frac{1}{x}\right) = \frac{\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{x}\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{kx}\right) = \frac{\frac{\partial \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\partial x}}{x}(1 + \mathcal{O}(1/kx)). \tag{5.138}$$

Wir müssen die Ableitung also nur auf das Exponential anwenden:

$$\vec{B}_0(\vec{r}) \approx \frac{\nabla \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr} \times \vec{g}(k\vec{n}) + \mathcal{O}(1/r^2) = \frac{\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr}\vec{n} \times \vec{g}(k\vec{n}). \tag{5.139}$$

Daraus wollen wir nun das elektrische Feld berechnen. Es gilt

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = -\frac{\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr}\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{g}) + \mathcal{O}(1/r^2), \tag{5.140}$$

wobei wir wieder höhere Faktoren vernachlässigen. Es gilt damit

$$\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{n}, \; \vec{E} \approx -\vec{n} \times \vec{B}, \; \vec{E}, \vec{B} \propto \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}. \tag{5.141}$$

Dies ist eine Kugelwelle, da k ein Betrag darstellt (sieht man auch am Faktor $1/r$).

5.10. Strahlungsleistung

Wir berechnen den Zeitgemittelten Poyntingvektor

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{c}{4\pi}\left\langle \mathrm{Re}\vec{E} \times \mathrm{Re}\vec{B} \right\rangle = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left(\vec{E}_0^* \times \vec{B}_0\right) = -\frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left((\vec{n} \times \vec{B}_0^*) \times \vec{B}_0\right) \tag{5.142}$$

$$= -\frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left(\vec{n}\left(\vec{B}_0\vec{B}_0^*\right) - \vec{B}_0^*\left(\vec{n}\vec{B}_0\right)\right) = \frac{c}{8\pi}\vec{n}(\vec{B}_0^*\vec{B}_0) \tag{5.143}$$

$$= \frac{k^2\vec{n}}{8\pi c r^2}\left|\vec{n} \times \vec{g}\right|^2 + \mathcal{O}(1/r^3). \tag{5.144}$$

Damit können wir die Leistung über

$$\mathrm{d}P = \left\langle \vec{S} \right\rangle \vec{n} r^2 \mathrm{d}\Omega \tag{5.145}$$

beschreiben. Dies ist die abgestrahlte Leistung im Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ in Richtung $\vec{n}$. Damit ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{k^2}{8\pi c} \left| \vec{n} \times \vec{g} \right|^2 \tag{5.146}$$

Dies ist natürlich nicht von r abhängig! Wir wollen diese nun Analysieren, dazu führen wir eine Multipolentwicklung von $\vec{g}$ aus

$$\vec{g}(k\vec{n}) = \int \mathrm{d}^3r' \; \vec{j}_0(\vec{r}\,')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{n}\vec{r}\,'} = \vec{g}^{\,(0)} - \mathrm{i}k\vec{g}^{\,(1)} + \ldots \tag{5.147}$$

Es gilt:

$$\vec{g}^{\,(0)} = \int \mathrm{d}^3r' \; \vec{j}_0(\vec{r}\,') \tag{5.148}$$

$$\vec{g}^{\,(1)} = \int \mathrm{d}^3r' \; \vec{j}_0(\vec{r}\,')(\vec{n}\vec{r}\,') \tag{5.149}$$

Es fällt auf, dass der erste ein elektrischer Dipol, der zweite ein magnetischer Dipol ist. Es existiert kein elektrischer Monopolterm, da $\omega \neq 0$ ist.

5.11. Elektrische Dipolstrahlung (Hertzscher Dipol)

Wir betrachten eine Komponente von $\vec{g}$

$$g_j^{(0)} = \int \mathrm{d}^3r' \; j_{0,j}(\vec{r}\,') = \int \mathrm{d}^3r' \; \sum_k j_{0,k}(\vec{r}\,')\nabla'_k r'_j = -\int \mathrm{d}^3r' \; \sum_k \left[\nabla'_k j_{0,k}(\vec{r}\,')\right] r'_j \tag{5.150}$$

$$= -\mathrm{i}\omega \int \mathrm{d}^3r' \; \rho_0(\vec{r}\,')r'_j \quad \Rightarrow \quad \vec{g}^{\,(0)} = -\mathrm{i}\omega \int \mathrm{d}^3r'\vec{r}\,'\rho_0(\vec{r}\,') = -\mathrm{i}\omega\vec{p}_0. \tag{5.151}$$

Damit folgt:

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr}\vec{g}^{\,(0)} = -\mathrm{i}k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\vec{p}_0. \tag{5.152}$$

Dies gilt allgemein für Fern-, Nah- und Zwischenfeld:

$$\vec{B}_0(\vec{r}) = -k^2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{p}_0) \quad \vec{E}_0 = -k^2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{p}_0) \tag{5.153}$$

Die abgestrahlte Leistung eines el. Dipols pro Raumwinkel ist, dabei wollen wir die θ-Abhänigkeit der Strahlungsleistung berechnen: 14.12.2012

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{k^2}{8\pi c}|\vec{n} \times \vec{g}^{\,(0)}|^2 = \frac{\omega^4}{8\pi c^3}|\vec{n} \times \vec{p}_0|^2 = \frac{\omega^4}{8\pi c^3}|\vec{p}_0|^2 \sin\theta^2. \tag{5.154}$$

`Strahlungsdiagramm eines Dipols`

Die Gesamte abgestrahlte Leistung eines Dipols ist über

$$P = \int \mathrm{d}\Omega\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\omega^4}{8\pi c^3}|\vec{p}_0|^2 \cdot 2\pi \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \sin\theta \sin^2\theta = \frac{\omega^4}{3c^3}|\vec{p}_0|^3 \tag{5.155}$$

gegeben. Wir betrachten als Beispiel eine Dipolantenne:

`Bild einer Dipolantenne.`

Wir legen die z-Achse in Richtung der der Antenne. Die Länge der Antenne ist d $((0,0,d/2)$ bis $(0,0,-d/2))$. Für den Strom gilt nun:

$$I(z) = I_0 \left(1 - \frac{2|z|}{d}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \Rightarrow \rho_0(z) = \mathrm{i}\,\frac{2I_0}{\omega d}\,\mathrm{sgn}\, z. \tag{5.156}$$

Daraus berechnen wir das elektrische Dipolmoment

$$p_0 = \int_{-d/2}^{d/2} \mathrm{d}z\; z\rho_0(z) = \mathrm{i}\,\frac{I_0 d}{2\omega} \tag{5.157}$$

und daraus über die Winkelverteilung der Strahlung die gesamte abgestrahlte Leistung.

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\omega^2 I_0^2 d^2}{32\pi c^3}\sin^2\theta = \frac{(I_0 kd)^2}{32\pi c}\sin^2\theta \Rightarrow P = \frac{(I_0 kd)^2}{12c} = \frac{1}{2} I_0^2 R_S. \tag{5.158}$$

Dabei wird R_s Strahlungswiderstand genannt (Widerstand: $1/c$ in Gauß entspricht $30\,\Omega$ im SI). Nun wollen wir die elektrische Dipolstrahlung in der Nahzone betrachten:

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = -\mathrm{i}k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\vec{p}_0 \approx -\frac{\mathrm{i}k}{r}\vec{p}_0,\; kr \ll 1 \tag{5.159}$$

Darüber lassen sich E- und B-Feld berechnen

$$\vec{B}_0 = \nabla \times \vec{A}_0 = -\mathrm{i}k\nabla\frac{1}{r} \times \vec{p}_0 = \mathrm{i}k\frac{\vec{n}\times\vec{p}_0}{r^2} \tag{5.160}$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{k}\nabla \times \vec{B}_0 = -\nabla \times \left(\frac{\vec{n}\times\vec{p}_0}{r^2}\right) = \frac{3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{p}_0) - \vec{p}_0}{r^3}. \tag{5.161}$$

Man sieht, dass das E-Feld, wesentlich größer ist, als das B-Feld $(|\vec{B}_0|\; kr|\vec{E}_0| \ll |\vec{E}_0|)$. Damit gilt im Nahfeld (nur da!):

$$|\vec{E}| \propto 1/r^3, |\vec{B}| \propto 1/r^2 \Rightarrow |\vec{B}| \ll |\vec{E}|. \tag{5.162}$$

5.12. Magn. Dipol und elek. Quadrupolstrahlung

Es gilt

$$\vec{g}^{\,(1)} = \int \mathrm{d}^3r'\; (\vec{n}\vec{r}\,')\vec{j}_0(\vec{r}\,') - \text{ magn. Dipol } + \text{ el. Quadr.} \tag{5.163}$$

Wir wollen nun

$$g_p^{(1)} = \sum_l n_l \int \mathrm{d}^3r'\; r_l' j_{0,p} = \sum_l n_0 \int \mathrm{d}^3r'\; \left[\frac{j_{0,p}r_l' - j_{0,l}r_p'}{2} + \frac{j_{0,p}r_l' + j_{0,l}r_p'}{2}\right]. \tag{5.164}$$

Der erste Term entspricht

$$\sum_l n_0 \int \mathrm{d}^3r'\; \left[\frac{j_{0,p}r_l' - j_{0,l}r_p'}{2}\right] = -c(\vec{n}\times\vec{m}_0)_p,\ \mathrm{mit}\ \vec{m}_0 = \frac{1}{2c}\int \mathrm{d}^3r\,\vec{r}\times\vec{j}_0. \tag{5.165}$$

Der zweite Term

$$\sum_l n_l \int \mathrm{d}^3r' \, \frac{j_{0,p}r'_l + j_{0,l}r'_p}{2} = \sum_l n_l \int \mathrm{d}^3r' \, \frac{\sum_q j_{0,q}\nabla'_q(r'_l r'_p)}{2} \tag{5.166}$$

$$\overset{part.Int.}{=} -\sum_l n_l \int \mathrm{d}^3r' \, \frac{r'_l r'_p}{2} \sum_q \nabla_q j_{0,q} \tag{5.167}$$

$$= -\sum_l n_l \int \mathrm{d}^3r' \, \frac{r'_l r'_p}{2} \mathrm{i}\omega\rho_0 \tag{5.168}$$

$$= \sum_l \frac{-\mathrm{i}\omega n_l}{2} \left[\frac{Q_{0,lp}}{3} + \frac{\delta_{lp}}{3} \int \mathrm{d}^3r' \, (r')^2 \rho_0(\vec{r}\,') \right]. \tag{5.169}$$

Dabei gilt

$$Q_{0,lp} = \int \mathrm{d}^3r' \rho_0(\vec{r}\,')(3r'_p r'_l - (r')^2 \delta_l p) \tag{5.170}$$

Dies entspricht dem elektrischen Quadrupolmoment. Damit ergibt sich

$$\vec{g}^{\,(1)} = -c\vec{n} \times \vec{m}_0 - \frac{\mathrm{i}\omega}{6} \sum_{lp} n_l Q_{0,lp} \vec{e}_\rho - \frac{\mathrm{i}\omega}{6} \vec{n} \int \mathrm{d}^3r' \, (r')^2 \rho_0 \tag{5.171}$$

Der letzte Term spielt keine Rolle, da $\nabla \times (\vec{n}F(r)) = 0$. Wir berechnen das B- und E-Feld

$$\vec{B}_0^{(0)} = \nabla \times \vec{A}_0^{(0)} \approx \frac{k^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr} \vec{n} \times \vec{g}^{\,(1)} \text{ Fernzone.} \tag{5.172}$$

und

$$\vec{E}_0^{(1)} = -\vec{n} \times \vec{B}_0^{(0)}. \tag{5.173}$$

Damit gilt für die magnetische Dipolstrahlung

$$\vec{g}^{\,(1,\mathrm{mag})} = -c\vec{n} \times \vec{m}_0 \tag{5.174}$$

Daraus folgt:

$$\vec{B}_0^{(1,\mathrm{mag})} = -\frac{k^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} (\vec{n} \times (\vec{n} \times m_0)) \quad \vec{E}_0^{(1,\mathrm{mag})} = -\frac{k^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} \vec{n} \times \vec{m}_0. \tag{5.175}$$

Dies entspricht dem vertauschten Formeln für das elektrische Dipolmoment: Damit können wir die selbe Abhänigkeit bei der Leistung benutzen.

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} |\vec{m}_0|^2 \sin^2\theta \Rightarrow P = \frac{\omega^4}{rc^3} |\vec{m}_0|^2. \tag{5.176}$$

Wir betrachten als Beispiel eine einfache Stromschleife ($m = IA/c$):

$$P = \frac{\omega^4}{3c^3} \frac{I_0^2 A^2}{c^2} = \frac{k^4 A^2 I_0^2}{3c} = \frac{1}{2} I_0^2 R_S, R_S = \frac{2}{3} \frac{k^4 A^2}{c} \Rightarrow 20\,\Omega \cdot (k^2 A)^2. \tag{5.177}$$

Der nächste Term ist der elektrische Quadrupol, diesen wollen wir nicht explizit ausrechnen.

6. Elektrodynamik in Materie

6.1. Makroskopische Maxwell-Gleichungen

In Zukunft werden wir mikrospkopische Felder mit kleinen Buchstaben beschreiben:

$$\nabla\vec{b} = 0 \quad \nabla\times\vec{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{b}}{\partial t} = 0 \tag{6.1}$$

$$\nabla\vec{b} = 4\pi\rho \quad \nabla\times\vec{b} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{e}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{6.2}$$

Es gilt also: Mikroskopische Felder: $\vec{e}, \vec{b}$, Mikroskopische Ladungs/Stromdichten: $\rho, \vec{j}$. Wir wollen die kleinen, mikroskopischen Schwankungen mitteln, damit wir im Grenzwertprozeß auf die Makroskopischen schließen können (sie schwanken im Bereich $a \sim 1$ Angström). Dazu nutzen wir eine Funktion $f(\vec{r})$ für die gilt:

- $\int \mathrm{d}^3r f(\vec{r}) = 1$
- $f(\vec{r})$, in einem Bereich mit charakteristische Abmessung b in Umgebung von $\vec{r} = 0$ lokalisiert und glatt
- $a \ll b \ll \lambda$

Ein gutes Beispiel dafür ist die Gauß'sche Funktion:

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{\pi^{3/2}b^3}\mathrm{e}^{-r^2/b^2}. \tag{6.3}$$

Wir realisierung die Mittelung durch eine Faltung:

$$F(\vec{r},t) \to \langle F\rangle(\vec{r},t) = \int \mathrm{d}^3r'\ F(\vec{r}\,',t)f(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{6.4}$$

Damit erhalten wir dann die makroskopischen Größen über

$$\langle\vec{e}\rangle = \vec{E}, \left\langle\vec{b}\right\rangle = \vec{B}. \tag{6.5}$$

Wir können nun die Maxwell-Gleichungen schreiben als:

$$\nabla\vec{B} = 0 \quad \nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{6.6}$$

$$\nabla\vec{E} = 4\pi\langle\rho\rangle \quad \nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\left\langle\vec{j}\right\rangle \tag{6.7}$$

Nun müssen wir die restlichen gemittelten Größen bestimmen. Wir betrachten die Ladungensdichte

$$\rho(\vec{r}) = \rho_{\text{frei}}(\vec{r}) + \rho_{\text{geb}}(\vec{r}). \tag{6.8}$$

Diese setzt sich aus freien und gebunden Ladungsträger (letztere entstehen durch Polarisation der Materie) zusammen. Ein beispiel für letztere sind sich verschiebende Elektronenwolken (gegenüber Kernen) oder bereits existierende Dipole von Molekülen. Es gilt

$$\langle\rho_{\text{geb}}\rangle(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3 r' \; f(\vec{r}-\vec{r}\,') \sum_k \sum_{j(u)} q_j \delta(\vec{r},' - (\vec{r}_n + \vec{a}_{nj})), \tag{6.9}$$

wobei $\vec{r}_n$ die Koordinate der Mitte der Moleküle ist und $\vec{a}_n$ die Verschiebung der Ladung $\vec{j}$ bezüglich $\vec{r}_n$ ist. Daraus ergibt sich

$$\langle\rho_{\text{geb}}\rangle(\vec{r}) = \sum_k \sum_{j(u)} q_j f(\vec{r} - (\vec{r}_n + \vec{a}_{nj}) \tag{6.10}$$

was wir Multipol-Entwickeln können

$$\langle\rho_{\text{geb}}\rangle(\vec{r}) = \sum_k \sum_{j(u)} q_j \left(f(\vec{r}-\vec{r}_n) - \vec{a}_{nj}\nabla f(\vec{r}-\vec{r}_n) + \ldots\right). \tag{6.11}$$

Die Multipolmomente sind die der Moleküle $\#n$. Wir wollen die Terme Analysieren

$$\langle\rho_{\text{geb}}\rangle(\vec{r}) = \sum_n q_n f(\vec{r}-\vec{r}_n) - \sum_n \vec{p}_n \nabla f(\vec{r}-\vec{r}_n) + \ldots \tag{6.12}$$

Der erste Summand muss 0 sein, da wir gebundene Ladungen betrachten, die im statischen nicht verschobenen Fall gilt. Wir vernachlässigen alle Terme, die kleiner als der Dipolterm sind:

$$\langle\rho_{\text{geb}}\rangle(\vec{r}) = -\sum_n \vec{p}_n \nabla f(\vec{r},\vec{r}\,') = -\nabla \sum_n \vec{p}_n f(\vec{r},\vec{r}\,') = -\nabla\vec{P}(\vec{r}). \tag{6.13}$$

Der Vektor $\vec{P}$ ist dabei die gemittelte elektrische Dipolmomentdichte bzw. die elektrische Polarisation.

$$\langle\rho\rangle = \langle\rho_{\text{frei}}\rangle + \langle\rho_{\text{geb}}\rangle = \rho_{\text{makr}} - \nabla\vec{P}. \tag{6.14}$$

Nun gilt

$$\nabla\vec{E} = 4\pi\langle\rho\rangle = 4\pi(\rho_{\text{makr}} - \nabla\vec{P}),\; \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \Rightarrow \nabla\vec{D} = 4\pi\rho_{\text{makr}}. \tag{6.15}$$

Wir wollen nun eine Ähnliche Betrachtung bei der Stromdichte durchführen

$$\left\langle\vec{j}_{\text{geb}}\right\rangle(\vec{r}) = \sum_k \sum_{j(u)} q_j \dot{\vec{a}}_{nj} \left(f(\vec{r}-\vec{r}_n) - \vec{a}_{nj}\nabla f(\vec{r}-\vec{r}_n) + \ldots\right). \tag{6.16}$$

Wir betrachten den ersten Term

$$\sum_n \sum_{j(n)} q_j \vec{a}_{nj} f(\vec{r}-\vec{r}_n) = \frac{\partial}{\partial t}\sum_n \vec{p}_n f(\vec{r}-\vec{r}_n) = \frac{\partial P}{\partial t} \tag{6.17}$$

Der zweite Term ist etwas schwieriger in der Auswertung:

$$-\sum_n \sum_{j(n)} q_j \dot{\vec{a}}_{nj} \left(\vec{a}_{nj}\nabla f(\vec{r}-\vec{r}_n)\right) = \ldots \tag{6.18}$$

mit

$$\dot{a}_i(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \sum_l \dot{a}_i a_l b_l = \frac{1}{2}\sum_l (\dot{a}_i a_l + \dot{a}_l a_i) b_l + \frac{1}{2}\sum_l (\dot{a}_i a_l - \dot{a}_l a_i) b_l \tag{6.19}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_l \left[\frac{\partial}{\partial t}(a_l a_i)\right] b_l + \frac{1}{2}\sum_{lk}\left[\dot{\vec{a}} \times \vec{a}\right]_k \epsilon_{ilk} b_l \tag{6.20}$$

ergibt sich

$$\ldots = \frac{1}{2}\sum_n \sum_{j(n)} q_j \nabla f(\vec{r}-\vec{r}_n) \times (\vec{a}_{nj} \times \dot{\vec{a}}_n) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\sum_n \sum_{j(n)} q_j \vec{a}_n \left[\vec{a}_n \cdot \nabla f(\vec{r}-\vec{r}_n)\right]. \tag{6.21}$$

Den letzteren können wir Vernachlässigen (el. Quadrupolterm). Wir betrachten

$$\vec{M}(\vec{r}) = \frac{1}{2c}\sum_n \sum_{j(n)} q_j f(\vec{r}-\vec{r}_n)\vec{a}_{nj} \times \dot{\vec{a}}_{nj} = \left\langle \sum_n \vec{m}_n \delta(\vec{r}-\vec{r}_n) \right\rangle \tag{6.22}$$

und

$$\vec{m}_n = \frac{1}{2c}\sum_{j(n)} q_j \vec{a}_{nj} \times \dot{\vec{a}}_{nj}. \tag{6.23}$$

Dabei ist $\vec{M}(\vec{r})$ die gemittelte mag. Dipolmomentdichte bzw. Magnetisierung.

$$\left\langle \vec{j}_{\text{geb}} \right\rangle = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c\nabla \times \vec{M} \tag{6.24}$$

Damit ergibt sich für die Maxwell-Gleichung

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\left\langle \vec{j} \right\rangle = \frac{4\pi}{c}\left[\langle j_{\text{frei}}\rangle + \langle j_{\text{geb}}\rangle\right] = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}_{\text{makr}}\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} c\nabla \times \vec{M}\right) \tag{6.25}$$

Die magnetische Flussdichte $\vec{H}$ ist definiert durch

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}. \tag{6.26}$$

Wir können nun die makrospkopischen Maxwell-Gleichungen aufschreiben 21.12.2012

$$\nabla\vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{6.27}$$

$$\nabla\vec{D} = 4\pi\rho_{\text{makr}} \quad \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{makr}}. \tag{6.28}$$

Dies wollen wir jetzt etwas vereinfachen. Wir definieren freie, markoskopische Ladungsdichte

$$\rho_{\text{makr}} = \langle \rho_{\text{frei}} \rangle = \rho = \rho_{\text{ext}}, \tag{6.29}$$

die Polarisationsladung

$$\langle \rho_{\text{geb}} \rangle = \rho_{\text{pol}} \tag{6.30}$$

und die Gesamtdichte

$$\rho_{\text{tot}} = \rho + \rho_{\text{pol}} \tag{6.31}$$

um. Wir können wieder über die homogenen Gleichungen das makroskopische Vektorpotential und Potential. Jedoch brauchen wir, um die inhomogenen Gleichungen zu lösen brauchen wir Informationen über den Zusammenhang zwischen $\vec{E}$ und $\vec{D}$, sowie $\vec{B}$ und $\vec{H}$.

6.2. Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante, mag. Permibilität

Für viele Szbstanzen gelten in schwachen Feldern linieare Zusammenhänge zwischen Polarisation und Magnetisierung und E-Feld und H-Feld:

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E} \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H} \tag{6.32}$$

Man bezeichnet χ_e elektrische und χ_m magnetische Suszeptibilität. Zur Vereinfachung nehmen wir Isotropie (also normale Skalare und keine Tensoren) und nicht ferromagnetische und ferroelektrische Materialien an. Somit gilt

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = (1 + 4\pi\chi_e)\vec{E} = \epsilon\vec{E} \tag{6.33}$$

und

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} = (1 + 4\pi\chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H}. \tag{6.34}$$

Die Größe ϵ heißt Dielektriziätskonstante, die Größe μ heißt magnetische Permeabilität. Im allgemeinen sind sie nur für sehr kleine Bereiche als konstant abzuschätzen, also für kleine ω und kleine q. Beispielsweise gilt für Wasser bei 20 °C liegt ϵ bei 80 und μ bei 0,999992. Für übliche (nicht ferromagnetische) Materialien ist $\chi_m \ll 1$. Materialen für die gilt $\chi_m > 0$ heißen paramagnetisch und Materialien für die gilt $\chi_m < 0$ diamagnetische.

6.3. Energiebilanz

Dies geschieht Analog zum letzten Kapitel:

$$\vec{H} \cdot \left[\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0\right], \quad -\vec{E} \cdot \left[\nabla \times \vec{H} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}\right]. \tag{6.35}$$

Wir addieren beide Terme:

$$\frac{1}{c}\left(\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\vec{E} - \vec{H}\left(\nabla \times \vec{E}\right) + \vec{E}\left(\nabla \times \vec{H}\right). \tag{6.36}$$

Daher ist der Poyntingvektor gleich (Vektoridentität ausnutzen!)

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{H}. \tag{6.37}$$

Dabei ist

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mat}}}{\mathrm{d}t} = \int \mathrm{d}^3 r \vec{j}\vec{E}. \tag{6.38}$$

die Arbeit die von el/mag. Feldern geleistet wird (Änderung der Energie der freien Ladungen). Der erste Term bezeichnet die Energiedichteänderung des el/mag. Feldes. Insgesamt gilt

$$\frac{\partial \omega_{\mathrm{em}}}{\partial t} + \nabla\vec{S} = -\vec{j}\vec{E}. \tag{6.39}$$

Wir können ω_{em} noch umschreiben:

$$\frac{\partial \omega_{\mathrm{em}}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left(\mu\vec{H}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \epsilon\vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{8\pi}\frac{\partial 1}{\partial t}\left(\mu\vec{H}^2 + \epsilon\vec{E}^2\right) = \frac{1}{8\pi}\frac{\partial 1}{\partial t}\left(\vec{H}\vec{B} + \vec{E}\vec{D}\right) \tag{6.40}$$

6.4. Randbedingungen

Wir betrachten eine Randfläche zwischen zwei Medien (M1 (ϵ_1, μ_1), M2 (ϵ_2, μ_2))

`Bild einer Randfläche, Normalenvektor, Grenzfläche, Flächenladungsdichte etc...`

Wir schauen zuerst auf die Seite der Grenzfläche und legen ein gauß'sches Kästchen mitten hinein, über $\nabla\vec{D} = 4\pi\rho$ gilt

$$D_{2\perp} - D_{1\perp} = 4\pi\sigma \Leftrightarrow \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) \cdot \vec{n} = 4\pi\sigma. \tag{6.41}$$

Jetzt betrachten wir eine Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika (keine externen Ladungen, metallische Schicht). Dann wäre $\sigma = 0$ und die Normalkomponente stetig. Jetzt legen wir eine Kontur an den Rand der Grenzfläche über $\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ gilt

$$\vec{E}_{2\|} = \vec{E}_{1\|} \Leftrightarrow \vec{n} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0 \tag{6.42}$$

Nun legen wir wieder ein Gauß'sches Kästchen an die Randfläche betrachten aber das B-Feld $(\nabla\vec{B} = 0)$

$$B_{2\perp} = B_{1\perp} \Leftrightarrow \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) \cdot \vec{n} = 0. \tag{6.43}$$

Die letzte Randbedingung erhalten wir über die übrige Maxwellgleichung $\nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$. Wir betrachten wieder die Kontur und erhalten

$$\vec{H}_{2\|} - \vec{H}_{1\|} = \frac{4\pi}{c}\vec{K} \times \vec{n} \Leftrightarrow \vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{K}. \tag{6.44}$$

An der Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika gibt es keine freien Ladungen, damit gilt in diesem Fall:

$$\vec{H}_{2\|} = \vec{H}_{1\|}. \tag{6.45}$$

6.5. Elektrostatik in Materialien

Wir betrachten

$$\nabla\vec{D} = 4\pi\rho \Rightarrow \nabla\left(\epsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\right) = 4\pi\rho. \tag{6.46}$$

Wenn ϵ konstant bekommt man dieselbe Gleichung wie im Vakuum auch schon, nur um von ϵ geändert. Wir betrachten eine Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika (ϵ_1, ϵ_2). Dies stellt eine typische Situation dar. Ein spezialfall davon ist $\epsilon_1 = 1$ (Vakuum). Die Lösungstrategie dabei ist: Beide Gleichungen in beiden Bereichen entsprechend lösen und die Randbedingungen an den Grenzflächen anwenden. Da $\nabla \times \vec{E}$ gilt gibt es ein Potential, welches stetig ist an der Grenzfläche.

6.5.1. Dielektrikum im Kondensator

```
Bild eines Platten-Kondensators mit Fläche A Ladung Q und Dielektrikum
, welches nicht den gesamten Innenraum ausfühllt
```

Außerhalb des Kondensators $(|z| > d/2)$ ist $\vec{D} = 0$. Für $|z| < d/2$ gilt $\nabla\vec{D} = 0$. Es folgt daraus $\frac{\partial \vec{D}}{\partial z} = 0, D(z) = \text{const}$. Über die Randbedingung gilt $D = 4\pi\sigma = 4\pi Q/A$. Dies gilt mit und ohne dielektrikum, da D stetig ist. Daraus können wir E und P finden:

$$E = \begin{cases} D \\ D/\epsilon \end{cases} \qquad P = \begin{cases} 0 & \text{Vakuum} \\ \frac{1}{4\pi}\frac{\epsilon-1}{\epsilon}D & \text{Dielektrikum} \end{cases} \tag{6.47}$$

9.1.2013

Die Dicke des Dielektrikums beträgt b. Da $\vec{D}$ nur die freien Ladungen erfasst ist dies überall im Kondensator gleich groß. Wir betrachten die Grenzfläche zwischen Vakuum und Dielektrikum. $\vec{P}$ ist nicht stetig für sie gilt

$$\nabla\vec{P} = -\langle\rho_{\text{geb}}\rangle \Rightarrow \sigma_{\text{pol}} = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)\vec{n}. \tag{6.48}$$

Jetzt können wir die Polarisationsflächenladungsdichte σ_{pol} berechnen:

$$\sigma_{\text{pol}} = \pm\frac{\epsilon - 1}{\epsilon}\sigma. \tag{6.49}$$

Dies ist auf den Grenzflächen vorzufinden. Sie entsteht durch eine Verschiebung der gebundenen Elektronen und Protonen. Es ist also ein Atomarer Abstand (Schicht) an den Grenzflächen (eine negativ, eine positiv). Deswegen ist im Dielektrikum keine Ladungsdichte, sondern nur an den Rändern.
Nun betrachten wir den Grenzfall $\epsilon \to \infty$. Dann folgt $\sigma_{\text{pol}} \to \pm\sigma$ und $E \to 0$. Dies wäre gleich dem Fall wie bei einem Metall. Daher eine Vollständige Abschirmung.
Nun wollen wir die Kapazität des Kondensators berechnen. Dazu berechnen wir zuerst die Spannung

$$U = \int_{-d/2}^{d/2} E \,\mathrm{d}z = \left(\frac{b}{\epsilon} + (d-b)\right) \cdot 4\pi\frac{Q}{A} \equiv C^{-1}Q \tag{6.50}$$

daraus folgt

$$C = \frac{1}{4\pi}\frac{A}{b/\epsilon + d - b} = C_0 \cdot \frac{d}{b/\epsilon + b - d}, \tag{6.51}$$

wobei C_0 die Kapazität im Vakuum ist ($C = \epsilon C_0$).

6.5.2. Punktladung und Dielektrikum

Wir betrachten eine Punktladung mit Lotabstand a zu einem unendlichen Dielektrikum mit $\epsilon > 1$. Wir legen die Punktladung auf die x-Achse und das Dielektrikum orthogonal dazu. Es gilt im Vakuum

$$\vec{D} = \vec{E} \Rightarrow \nabla\vec{E} = 4\pi q\delta(\vec{r} - a\vec{e}_x). \tag{6.52}$$

Innerhalb des Dielektrikums gilt

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \Rightarrow \nabla(\epsilon\vec{E}) = 0 \Rightarrow \nabla E = 0. \tag{6.53}$$

Daraus können wir die Randbedingung ($x = 0$) berechnen: $\vec{E}_{\parallel,\mathrm{V}} = \vec{E}_{\parallel,\mathrm{D}}$; $\vec{E}_{\perp,\mathrm{V}} = \vec{\epsilon}E_{\perp,\mathrm{D}}$. Dieses Problem können wir mit Bildladungen bestimmen. Wir legen dazu eine an die Position $(-a, 0, 0)$. Nun löst

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} q\frac{\vec{r}-a\vec{e}_x}{|\vec{r}-a\vec{e}_x|^3} + q'\frac{\vec{r}+a\vec{e}_x}{|\vec{r}+a\vec{e}_x|^3} & x > 0(\mathrm{V}) \\ q''\frac{\vec{r}-a\vec{e}_x}{|\vec{r}-a\vec{e}_x|^3} & x < 0(\mathrm{D}) \end{cases} \tag{6.54}$$

für beliebige q', q''. Zuerst betrachten wir die y-Komponente

$$q\frac{y}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}} + q'\frac{y}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}} = q''\frac{y}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}} \Rightarrow q + q' = q''. \tag{6.55}$$

Dies ist Äquivalent zur z-Komponente. Nun Betrachten wir die orthogonale x-Komponente ($E_\mathrm{V} = \epsilon E_\mathrm{D}$):

$$q\frac{-a}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}}+q'\frac{a}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}}=-\epsilon q''\frac{a}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}}\Rightarrow q-q'=\epsilon q''. \tag{6.56}$$

Daraus ergibt sich

$$q'=-q\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1}\quad q''=\frac{2q}{\epsilon+1} \tag{6.57}$$

Nun betrachten wir wieder die Grenzfälle

- $\epsilon=1\Rightarrow q'=0,q''=q$, überall im Raum das Vektorfeld der Punktladung
- $\epsilon=\infty\Rightarrow q'=-q,q''=0$, wie bei einem Metall, kein elektrisches Feld im Dielektrikum.

Die Linien des E-Feldes werden beim Übergang ins Dielektrikum gekrümmt. Dabei können wir sagen, dass im Dielektrikum die Verlängerung der Feldlinien die Punktladung schneiden würden (da nurnoch ein E-Feld existiert, außen sinds ja zwei).

6.5.3. Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld

Es gebe eine homogenes elektrisches Feld und eine Kugel mit der dielektrischen Konstante ϵ und dem Radius R. Für sehr große Abstände gilt natürlich für das resultierende elektrische Feld $\vec{E}(r\gg R)=\vec{E}_0=E_0\vec{e}_z$. Weil $\nabla\times\vec{E}=0$ gilt $\vec{E}=-\nabla\varphi$, zudem gilt $\nabla\vec{D}=0$ und damit

$$\vec{D}=\begin{cases}\vec{E},r>R(\mathrm{V})\\ \epsilon\vec{E},r>R(\mathrm{D})\end{cases} \tag{6.58}$$

Wir versuchen die Laplacegleichung ($\nabla^2\varphi=0$) für alle drei Bereiche zu lösen:

$$\nabla^2\varphi=0\Rightarrow\varphi(\vec{r})=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(A_{lm}r^l+B_{lm}r^{-r-1})Y_{lm}(\theta,\varphi'). \tag{6.59}$$

Wegen der axialen Symmetrie gilt die Vereinfachung

$$\varphi(\vec{r})=\sum_{l=0}^{\infty}(A_{l0}r^l+B_{l0}r^{-l-1})\cdot\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta). \tag{6.60}$$

Im Innenraum gilt nun ($r<R$)

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_lr^lP_l(\cos\theta), \tag{6.61}$$

im Außenraum hingegen ($r>R$)

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(B_lr^l+C_lr^{-l-1})P_l(\cos\theta). \tag{6.62}$$

Wir analysieren die erste Randbedingung bei $r=\infty$

$$\varphi=-E_0z\equiv-E_0r\cos\theta=-E_0rP_1(\cos\theta) \tag{6.63}$$

damit gilt $B_1=-E_0$ und $B_l=0,l\neq1$. Nun analysieren wir die Randbedingungen bei $r=R$. 11.1.2013

1. $\vec{E}_\parallel$ stetig $\Rightarrow\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}\right|_{r=R+0}=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}\right|_{r=R-0}$
2. φ stetig $\Rightarrow\varphi|_{r=R+0}=\varphi|_{r=R-0}$
3. $\vec{D}_\perp$ stetig $\Rightarrow\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R+0}=\epsilon\cdot\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R-0}$

Aus (2) folgt für $l = 1$: $A_1 = -E_0 + C_1/R^3$ und damit

$$A_l = \frac{C_L}{R^{2l+1}}, l \neq 1. \tag{6.64}$$

Aus (3) folgt für $l = 1$: $\epsilon A_1 = -E_0 - 2C_1/R^3$ und damit

$$\epsilon l A_l = -(l+1)\frac{C_l}{R^{2l+1}}. \tag{6.65}$$

Damit folgt für das innere Feld

$$\varphi = -\frac{3}{\epsilon+2}E_0 r\cos\theta \equiv -\frac{3}{\epsilon+2}\vec{E}_0\cdot\vec{r} \tag{6.66}$$

und für das äußere Feld

$$\varphi = -E_0 r\cos\Theta + \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}E_0\frac{R^3}{r^2}\cos\theta \equiv -\vec{E}_0\cdot\vec{r} + \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}R^3\frac{\vec{E}_0\cdot\vec{r}}{r^3}. \tag{6.67}$$

Innerhalb der Kugel ist somit das Elektrische Feld

$$\vec{E}_i = \frac{3}{\epsilon+2}\vec{E}_0, \text{ für } \epsilon > 1 \tag{6.68}$$

und die Polarisation ist damit

$$\vec{P} = \frac{\vec{D}-\vec{E}}{4\pi} = \frac{\epsilon-1}{4\pi}\vec{E}_i = \frac{3}{4\pi}\cdot\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\vec{E}_0. \tag{6.69}$$

Diese ist homogen über das ganze Volumen der Kugel verteilt. Das Dipolmoment der Kugel kann jetzt darüber bestimmt werden. Es gilt

$$\vec{p} = V\cdot\vec{P} = \frac{4}{3}\pi R^3\cdot\vec{P} = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}R^3\vec{E}_0. \tag{6.70}$$

`Bild einer Kugel mit und ohne Flächenladungsdichte.`

Jetzt betrachten wir den Außenbereich der Kugel.

$$\varphi(\vec{r}) = -\vec{E}_0\vec{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}, \vec{p} = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}R^3\vec{E}_0. \tag{6.71}$$

Wir sehen, dass sich dies aus dem äußeren Feld und dem Feld eines Dipols in der mitte der Kugel zusammensetz.

6.6. Dielektrische Funktion, Lorentz-Modell

Wir betrachten schwache Felder in homogener Materie und untersuchen die Polarisation

$$\vec{P}(\vec{r},t) = \int \mathrm{d}^3r'\mathrm{d}t'\ \chi_e(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t')\cdot\vec{E}(\vec{r}\,',t'). \tag{6.72}$$

Das χ ist die elektrische Suszeptibilität. Dieses Integral können wir nun Fouriertransformieren. Es handelt sich um eine Faltung und es gilt

$$\vec{P}(\vec{k},\omega) = \chi_e(\vec{k},\omega)\cdot\vec{E}(\vec{k},\omega). \tag{6.73}$$

Jetzt betrachten wir die dielektrische Verschiebung $\vec{D}$

$$\vec{D}(\vec{k},\omega) = \vec{E}(\vec{k},\omega) + 4\pi\vec{P}(\vec{k},\omega) = \left[1+4\pi\chi(\vec{k},\omega)\right]\vec{E}(\vec{k},\omega) = \epsilon(\vec{k},\omega)\vec{E}(\vec{k},\omega). \tag{6.74}$$

Damit haben wir die dielektrische Funktion $\epsilon(\vec{k},t)$ definiert. Nun betrachten wir ein Modell, welches dies näher beschreibt. Wir betrachten die Elektronen und Kerne des Materials.

`Bild von Elektronenwolke und Kern, die durch eine E-Feld verschoben werden`

Die Elektronen sind verschiebbar, wir wollen die Bindung zwischen Kern und Elektron, als harmonischer Oszillator modellieren.

$$m(\ddot{\vec{a}} + \gamma\dot{\vec{a}} + \omega_0^2\vec{a}) = q\vec{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{a}-\omega t)}. \tag{6.75}$$

Wir nutzen $\lambda = 2\pi/k \ll a \propto$ Abstand zwischen Atomen. Somit gilt $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\vec{a}} \approx 1$ und es folgt wiederum $\vec{a}(t) = \vec{a}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$. Dies setzen wir in die DGL ein:

$$m(-\omega^2 - \mathrm{i}\omega\gamma + \omega_0^2)\vec{a}_0 = q\vec{E}_0 \Rightarrow \vec{a}_0 = \frac{q\vec{E}_0}{m(-\omega^2 - \mathrm{i}\omega\gamma + \omega_0^2)}. \tag{6.76}$$

Dies können wir zur Bestimmung des Dipolmoment nutzen

$$\vec{p}(t) = q\vec{a}(t) = \vec{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \text{ mit } \vec{p}_0 = \frac{q^2\vec{E}_0}{m(-\omega^2 - \mathrm{i}\omega\gamma + \omega_0^2)} \tag{6.77}$$

oder transformiert

$$\vec{p}_0 = \alpha_e(\omega)\vec{E}_0, \alpha_e(\omega) = \frac{q^2\vec{E}_0}{m(-\omega^2 - \mathrm{i}\omega\gamma + \omega_0^2)}. \tag{6.78}$$

Damit ist die Polarisation $\vec{P}(\vec{r},t) = \vec{P}_0(r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ oder so allgemein wie möglich

$$\vec{P}_0(\vec{r}) = \left\langle \sum_k \frac{q_k^2\delta(\vec{r} - \vec{r}_k)}{m_k(\omega_{0k}^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\gamma_k)} \right\rangle \vec{E}_0(\vec{r}). \tag{6.79}$$

Wir nehmen nun an, alle Oszillatoren seien identisch, also $q_k = q$, $\gamma_k = \gamma$, $m_k = m$, $\omega_{0k} = \omega$. Damit gilt mit der Dichte η

$$\vec{P}_0 = fracq^2\eta m((-\omega^2 - \mathrm{i}\omega\gamma + \omega_0^2))\vec{E}_0 \equiv \chi_e\vec{E}_0. \tag{6.80}$$

Im fall von Elektronen gilt $q = -e$, damit gilt für die dielektrische Funktion

$$\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi_e(\omega) = 1 + \frac{4\pi\eta e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\gamma)}. \tag{6.81}$$

`Bild der Dieelektrischen Funktion (Realteil und Imaginärteil)`

Bei mehreren Arten von Oszillatoren gilt einfach

$$\epsilon(\omega) = 1 + \sum_j 4\pi\chi_e^{(j)}(\omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{m}\sum_j \frac{\eta_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\gamma_j}. \tag{6.82}$$

Wir wollen die abhänigkeit von ϵ aufschrieben

$$\epsilon = 1 + 4\pi\eta\alpha_e. \tag{6.83}$$

Diese ist Modellabhängig, deswegen wollen wir noch die Lorenz-Lorentz-Beziehung aufschreiben aber nicht ableiten

$$\epsilon = \frac{1 + 8\pi/3\eta\alpha_e}{1 - 4\pi/3\eta\alpha_e} \tag{6.84}$$

diese kann im Jackson (4.5) nachgeschlagen werden. Wir betrachten jetzt ϵ in der imaginären Ebene für $\mathrm{Im}\omega > 0$ ist $\epsilon(\omega)$ analytisch. Diese Eigenschaft heißt Kausalität. Dies heißt

$$P(t) = \int \mathrm{d}t'\chi_e(t - t')\vec{E}(t') \Rightarrow \chi_e(t) = 0, t < 0. \tag{6.85}$$

Über die Kramers-Kroning Disppersionsrelation gilt

$$\mathrm{Re}\epsilon|_{\omega\in\mathbb{R}} \leftrightarrow \mathrm{Im}\epsilon|_{\omega\in\mathbb{R}}. \tag{6.86}$$

6.7. Elektromagnetische Wellen in Materie

Wir betrachten ein homogenes, isotropes Medium mit $\epsilon(\omega), \mu(\omega)$. Wir nutzen zuerst die Maxwellgleichungen. Darin beschreiben wir das E- und B-Feld als Potentiale und transformieren danach alle Gleichungen per Fouriertransformation.

$$\mathrm{i}\vec{k}\vec{D} = 4\pi\rho, \qquad \mathrm{i}\vec{k}\times\vec{H} + \frac{\mathrm{i}\omega}{c}\vec{D} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{6.87}$$

$$\vec{B} = \mathrm{i}\vec{k}\times\vec{A}, \qquad \vec{E} = -\mathrm{i}\vec{k}\varphi + \frac{\mathrm{i}\omega}{c}\vec{A} \tag{6.88}$$

Wir machen die Annahme, dass es keine Quellen gibt $(\rho, \vec{j} = 0)$. Der Zusammenhang zwischen den Feldern ist $\vec{D}(\vec{k},\omega) = \epsilon(\vec{k},\omega)\vec{E}(\vec{k},\omega)$ und $\vec{B}(\vec{k},\omega) = \mu(\vec{k},\omega)\vec{H}(\vec{k},\omega)$. Aus den Gleichungen folgt nun. 16.01.2013

$$\Rightarrow \mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{D} = 0 \Rightarrow \mathrm{i}\epsilon\vec{k}\left(-\mathrm{i}\vec{k}\varphi + \frac{\mathrm{i}\omega}{c}\vec{A}\right) = 0 \tag{6.89}$$

$$\Rightarrow \mathrm{i}\vec{k}\times\vec{H} + \frac{\mathrm{i}\omega}{c}\vec{D} = 0 \Rightarrow \mathrm{i}\mu^{-1}\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{A}) + \frac{\mathrm{i}\omega\epsilon}{c}\left(\mathrm{i}\vec{k}\varphi + \frac{\mathrm{i}\omega}{c}\vec{A}\right) = 0 \tag{6.90}$$

Über die Coloumb-Eichung folgt daraus mit $(\vec{k}\cdot\vec{A} = 0)$, dass $\varphi = 0$ ist. Wenn wir die zweite Zeile wieder Rückfouriertransformieren erhalten wir eine modifizierte Wellengleichung

$$\left(\nabla^2 - \frac{\epsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}(\vec{r},t) = 0. \tag{6.91}$$

Dies entspricht der Wellengleichung im Vakuum. Jedoch gilt $c' = c/\sqrt{\epsilon\mu}$. Für die Lösung der Wellengleichung können wir eine ebene Welle ansetzen: $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$. Es gilt

$$\omega^2 = c'^2\vec{k}^{\,2} = \frac{c^2}{\epsilon\mu}\vec{k}^{\,2} = \frac{c^2}{n^2}\vec{k}^{\,2}, \tag{6.92}$$

wobei n der komplexe Brechungsindex ist $(n_r(\omega) + \mathrm{i}n_k(\omega))$. Der Summand n_k bezeichnet den Absorptionskoeffizienten, n_r der Brechungsindex. Die direkte Folge daraus ist

$$\vec{k}^{\,2} = \frac{n^2\omega^2}{c^2},\ \vec{k} = \vec{k}_r + \mathrm{i}\vec{k}_i. \tag{6.93}$$

Im Allgemeinen zeigen k_r und k_i nicht in die gleiche Richtung (Ebenen der konstanten Phase und konstanter Amplitude nicht parallel). Jetzt sollen sie dies aber.

$$\vec{k} = k\vec{e}_k,\ k = \frac{n\omega}{c} = \frac{\omega}{c'}. \tag{6.94}$$

Damit kommen wir über $\vec{A}\cdot\vec{k} = 0$ auf $\vec{A}\perp\vec{e}_k$. Es gibt also zwei Polarisationen, wie im Vakuum. Es gilt also

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)},\ \vec{A}_0 = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2. \tag{6.95}$$

Darüber erhalten wir

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = \vec{A}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{n_r\omega}{c}\vec{e}_k\vec{r}-\omega t)}\mathrm{e}^{-\frac{n_k\omega}{c}\vec{e}_k\vec{r}} = \vec{A}_0\cdot T. \tag{6.96}$$

Damit gilt

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cdot T \quad \vec{E}_0 = \frac{\mathrm{i}\omega}{c}\vec{A}_0 \tag{6.97}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \cdot T \quad \vec{B}_0 = \mathrm{i}\vec{k} \times \vec{A}_0 = n\vec{e}_k \times \vec{E}_0 \tag{6.98}$$

Wir betrachten nun die Eigenschaften

- Transversalität: $\vec{E}_0 \perp \vec{k}$, $\vec{B}_0 \perp \vec{k}$ wie im Vakuum
- zwei lineare Polarisationen, im allgemeinen elliptische Polarisation. Für lineare Polarisationen ist $\vec{E}_0 \perp \vec{B}_0$, wie im Vakuum.
- Phasengeschwindigkeit $v_p = c/n_r$
- Wellenlänge $\lambda = (2\pi c)/(n_r\omega) = \lambda_0/n_r$
- Aplitudenverhältnis und Phasenverschiebung $n = |n|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$ mit $\delta = \arctan(n_k/n_r)$. Darüber ergibt sich $\vec{B}(\vec{r},t) = |n|\vec{e}_k \times \vec{E}(\vec{r}, t - \delta/\omega)$
- $|n| = |\vec{B}(\vec{r}, t + \delta/\omega)|/|\vec{E}(\vec{r},t)|$

Der Dämpfungsfaktor ist

$$\mathrm{e}^{-\frac{n_k \omega}{c}\vec{e}_k \vec{r}} \Rightarrow d = \frac{c}{N_k \omega}. \tag{6.99}$$

Wir nennen d die Eindringtiefe. Wir können annähern

$$d^{-1} = \frac{\omega}{c}\,\mathrm{Im}\sqrt{\epsilon\mu} \approx \frac{\omega}{c}\,\mathrm{Im}\sqrt{\epsilon} \approx \frac{\omega}{2c}\frac{\mathrm{Im}\,\epsilon}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\epsilon}}. \tag{6.100}$$

6.8. Reflexion und Brechung

Wir betrachten eine Welle, die auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien auftrifft. Diese wird nun teilweise reflektiert und teilweise gebrochen.

`Bild von Grenzfläche zweier Medien`

Wir definieren α_e als den Winkel zwischen einfallender Welle und Flächennormale, α_r zwischen reflektierter Welle und Flächennormalen und α_g der Winkel zwischen gebrochener Welle und Flächennormale. Wir vernachlässigen nun den Imaginärteil des komplexen Brechungsindex. Es gilt

$$\vec{A}_e(\vec{r},t) = \vec{A}_{e0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}_e\vec{r} - \omega_e t)} \tag{6.101}$$

und damit analog dies für $\vec{A}_r$ und $\vec{A}_g$. Die Winkelbeziehungen erhalten wir aus folgenden überlegungen bei den Randbedingungen. Bei $z = 0$ gilt:

- $\vec{E}_\parallel(z = -0) = \vec{E}_\parallel(z = +0)$
- $\vec{H}_\parallel(z = -0) = \vec{H}_\parallel(z = +0)$
- $\epsilon_1\vec{E}_\perp(z = -0) = \epsilon_2\vec{E}_\perp(z = +0)$
- $\mu_1\vec{H}_\perp(z = -0) = \mu_2\vec{H}_\perp(z = +0)$

Es folgt

$$\vec{A}_e(z=-0,x,y,t) = \vec{A}_{e0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{ex}x+k_{ey}y-\omega_e t)},\ \vec{E}_e, \vec{H}_e(z=-0) \propto \vec{A}_e. \tag{6.102}$$

Dies gilt wiederrum analog für r und g. Zudem gilt $\omega_e = \omega_r = \omega_g = \omega$ und $k_{ex} = k_{rx} = k_{gx} = k_x$ und $k_{ey} = k_{ry} = k_{gy} = k_y$. Die Vektoren $\vec{k}_e$, $\vec{k}_r$ und $\vec{k}_g$ liegen in einer Ebene, die durch $\vec{k}_e$ und $\vec{e}_z$ definiert wird. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass $k_y = 0$ wird. Nun benutzen wir die allgemeine Formel: $k = n\omega/c$:

$$k_x = \begin{cases} k_{e,x} = k_e \sin\alpha_e = n_1\omega/c \sin\alpha_e \\ k_{r,x} = k_r \sin\alpha_r = n_1\omega/c \sin\alpha_r \\ k_{g,x} = k_g \sin\alpha_g = n_2\omega/c \sin\alpha_g \end{cases} \tag{6.103}$$

Daraus folgt

$$\alpha_r = \alpha_e \equiv \alpha_1 \quad \text{und} \quad n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2,\ \alpha_g \equiv \alpha_2 \tag{6.104}$$

Dies nennt man Snellius-Gesetz. Für die z-Komponenten gilt

$$k_{e_z} = k_e \cos\alpha_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \cos\alpha_1 \tag{6.105}$$

$$k_{r,z} = -k_r \cos\alpha_1 = -n_1 \frac{\omega}{c} \cos\alpha_1 \tag{6.106}$$

$$k_{g,z} = k_g \cos\alpha_2 = n_2 \frac{\omega}{c} \cos\alpha_2 = n_2 \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2\alpha_1} \tag{6.107}$$

Für $n_1/n_2 \sin\alpha_1 > 1$ ist $k_{g,z}$ imaginär. Dies ist der Fall der Totalreflexion. Jetzt wollen wir die Intensiätsbeziehung aufstellen. Wir benutzen die Beziehungen:

$$\vec{E} = \frac{\mathrm{i}\omega}{c}\vec{A} \| \vec{A},\ \vec{B} = \mathrm{i}\vec{k} \times \vec{A},\ \vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k},\ \vec{E} \perp \vec{B} \tag{6.108}$$

Es gibt zwei Polarisationen. Im ersten Fall gilt: $\vec{H}\|$ Einfallsebene und $\vec{E} \propto \vec{A}\perp$ Einfallsebene. Im zweiten Fall ist dies einfach umgekehrt. Der allgemeine Fall ist die Superposition beider Fälle, wir betrachten sie einzeln. Wir wollen den ersten Fall explizit lösen:

`Schaubild zur ersten Polarisation (Das E-Feld zeigt in die Papierebene, da H-Feld in die Einfallsebene)`

Wir schreiben alle Randbedingungunen auf. Es gilt

$$E_y(z=-0) = E_y(z=0) \Rightarrow A_{e,y} + A_{r,y} = A_{g,y} \tag{6.109}$$

und

$$\mu_1 H_z(z=-0) = \mu_2 H_z(z=0) \Rightarrow \mu H_z = \mathrm{i}k_x A_y,\ k_{ex} = k_{rx} = k_{gr}. \tag{6.110}$$

Damit folgt das Gleiche und wir erhalten keine neunen Informationen. Die Bedingung der stetigkeit der senkrechtkomponente des E-Feldes ist trivial erfüllt, da es keine senkrechtkomponente in der Polarisation 1 gibt. Nun gilt für die letzte Randbedingung

$$\mu H_x = -\mathrm{i}k_z A_y \Rightarrow \mu_1^{-1}\left(k_{e,z}A_{e,y} + k_{r,z}A_{r,y}\right) = \mu_2^{-1} k_{g,z} A_{g,y}. \tag{6.111}$$

Nun haben wir zwei Gleichungen für zwei Unbekannte. Wir betachten zuerst die Beziehungen zwischen den Wellenvektoren:

$$k_{e,z} = -k_{r,z} = \frac{n_1 \cos\alpha_1}{n_2 \cos\alpha_2} k_{g,z}. \tag{6.112}$$

Damit folgt für die Gleichung (6.111)

$$\frac{n_1}{\mu_1}\cos(\alpha_1)(A_{e,y} - A_{r,y}) = \frac{n_2}{\mu_2}\cos(\alpha_2)A_{g,y}. \tag{6.113}$$

Wir nutzen nun den Zusammenhang

$$\frac{E_{g,y}}{E_{e,y}} = \frac{A_{g,y}}{A_{e,y}} = \frac{2n_1\cos\alpha_1}{n_1\cos\alpha_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}n_2\cos\alpha_2} \tag{6.114}$$

und

$$\frac{E_{r,y}}{E_{e,y}} = \frac{A_{r,y}}{A_{e,y}} = \frac{n_1\cos\alpha_1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}n_2\cos\alpha_2}{n_1\cos\alpha_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}n_2\cos\alpha_2} \overset{snellius,\mu_t\approx 1}{\approx} \frac{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}. \tag{6.115}$$

Üblicherweise vereinfachen sich diese beiden Gleichungen, da $\mu_1 \approx \mu_2 \approx 1$ ist. Wir wollen die Intesitäten berechnen. Es gilt ($|\vec{S}| \propto n/\mu E^2 \approx nE^2$). Es ergibt sich der Reflexionskoeffizient von

$$R = \frac{|S_{r,z}|}{|S_{e,z}|} = \frac{S_{r,z}^2}{E_{e,z}^2} \overset{\mu=1}{=} \frac{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)}{\sin^2(\alpha_2+\alpha_1)} \tag{6.116}$$

und einen Transmissionskoeffizient von

$$T = \frac{|S_{g,z}|}{|S_{e,z}|} = \frac{n_2\cos\alpha_2}{n_1\cos\alpha_1}\frac{S_{g,z}^2}{E_{e,z}^2} = \frac{4n_1n_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{(n_1\cos\alpha_1 + n_2\cos\alpha_2)^2} = \frac{\sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2}{\sin^2(\alpha_1+\alpha_2)}. \tag{6.117}$$

Es gilt $R+T = 1$, da Energieerhaltung angenommen werden kann und die Absoption vernachlässigt wurde. Für die Polarisation 2 gilt hingegen

$$\frac{H_{r,y}}{H_{e,y}} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2\cos\alpha_1 - n_1\cos\alpha_2}{\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2\cos\alpha_1 + n_1\cos\alpha_2} \overset{\mu_t=1}{=} \frac{n_2\cos\alpha_1 - n_1\cos\alpha_2}{n_2\cos\alpha_1 + n_1\cos\alpha_2} = \frac{\tan(\alpha_1-\alpha_2)}{\tan(\alpha_1+\alpha_2)} \tag{6.118}$$

und

$$\frac{H_{g,y}}{H_{e,y}} = \frac{2\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2\cos\alpha_1}{\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2\cos\alpha_1 + n_1\cos\alpha_2} \overset{\mu_t=1}{=} \frac{2n_2\cos\alpha_1}{n_2\cos\alpha_1 + n_1\cos\alpha_2} = \frac{2\sin 2\alpha_1}{\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2}. \tag{6.119}$$

Damit folgt für den Reflexionskoeffizient

$$R = \frac{|S_{r,y}|}{|S_{e,y}|} = \frac{H_{r,y}^2}{H_{e,y}^2} = \frac{\tan^2(\alpha_1-\alpha_2)}{\tan^2(\alpha_1+\alpha_2)}. \tag{6.120}$$

Dieser unterscheidet sich elementar von der Polarisation 1. Wenn $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2$ so kommt es zu $R = 0$ und damit zu keiner Reflexion bei Polarisation 2. Es gilt

$$\cos\alpha_1 = \sin\alpha_2 \text{ mit } \sin\alpha_1 = \frac{n_2}{n_1}\sin\alpha_2 \Rightarrow \tan\alpha_1 = \frac{n_2}{n_1}. \tag{6.121}$$

Den Winkel α_1 nennt man dabei Brewsterwinkel.

```
Schaubild von R in Abhängigkeit zum Winkel für
Polarisation 1 und 2 (n1<n2) (Brewsterwinkel!)
```

```
Schaubild von R in ... (n1>n2) (Brewsterwinkel totalreflexion)
```

Für $\alpha_1 = 0$ gilt $R_\perp = R_\parallel = \left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2$.

6.9. Brechung und Reflexion an der Grenze absorbierendem Medium

Wir nehmen an $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $n_1 = \sqrt{\epsilon_1} \in \mathbb{R}$ und $n_2 = \sqrt{\epsilon_2} = n_{2r} + \mathrm{i}n_{2i} \in \mathbb{C}$. Für den Wellenvektor gilt nun

$$\vec{k}^{\,2} = \frac{n^2\omega^2}{c^2} \overset{\mu=1}{=} \epsilon\frac{\omega^2}{c^2}. \tag{6.122}$$

Wenn ϵ komplex ist ist auch der Wellenvektor $\vec{k}$ komplex ($\vec{k} = \vec{k}\,' + \mathrm{i}\vec{k}\,''$). Im allgemeinen zeigen dabei die beiden Komponenten von $\vec{k}$ in unterschiedliche Richtungen.

$$k_{e,x} = k_{r,x} = k_{g,x} = k_x \quad k_{e,y} = k_{r,y} = k_{g,y} = k_y = 0 \text{ (Einfallsebene!)} \tag{6.123}$$

Daraus folgt, dass $k''_{g,x} = 0$ und damit ist $\vec{k}_g\,''\|\vec{e}_z$. Über de Zusammenhang $k = n\omega/c$ folgt nun

$$k_x = \left\{\begin{array}{l} k_{e,x} = k_e \sin\alpha_e = n_1\frac{\omega}{c}\sin\alpha_e \\ k_{r,x} = k_r \sin\alpha_r = n_1\frac{\omega}{c}\sin\alpha_r \\ k_{g,x} = n_1\frac{\omega}{c}\sin\alpha_1 \end{array}\right| \Leftarrow \alpha_1 \equiv \alpha_r = \alpha_e \tag{6.124}$$

Es gilt für die z-Komponente

$$k_{g,z} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1\sin^2\alpha_1} \in \mathbb{C}. \tag{6.125}$$

Die Eindringtiefe ist nun

$$d = \frac{1}{k''_{g,z}} \xrightarrow{\alpha_1=0} \frac{c}{\omega}\frac{1}{\operatorname{Im}\sqrt{\epsilon_2}} = \frac{c}{\omega n_{2i}}. \tag{6.126}$$

Wir betrachten nun die Intensitätsbeziehungen. Für die Polarisation 1 gilt nun

$$R_\perp = \left|\frac{n_1\cos\alpha_1 - \sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\alpha_1}}{n_1\cos\alpha_1 + \sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\alpha_1}}\right|^2. \tag{6.127}$$

Für $\alpha_1 = 0$ vereinfacht sich R zu

$$R = \left|\frac{\sqrt{\epsilon}_1 - \sqrt{\epsilon}_2}{\sqrt{\epsilon}_1 + \sqrt{\epsilon}_2}\right|^2 = \left|\frac{n_1 - n_{2r} - \mathrm{i}n_{2i}}{n_1 + n_{2r} + \mathrm{i}n_{2i}}\right|^2. \tag{6.128}$$

6.10. Elektromagnetische Wellen in Metallen

Wir betrachten nun Materialien mit frei beweglichen Elektronen. Die Leitfähigkeit sei $\sigma(\omega)$ und die Stromdichte damit $\vec{j}(\omega) = \sigma(\omega)\vec{E}(\omega)$. Wir betrachten nun die Maxwell-Gl.

$$\mathrm{i}\vec{k}\times\vec{H}(\vec{k},\omega) + \frac{\mathrm{i}\omega}{c}\vec{D}(\vec{k},\omega) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{k},\omega) \tag{6.129}$$

$$\mathrm{i}\vec{k}\times\vec{H}(\vec{k},\omega) + \frac{\mathrm{i}\omega}{c}\left[\epsilon(\omega - \frac{4\pi}{\mathrm{i}\omega}\sigma(\omega)\right]\vec{E}(\vec{k},\omega) = 0 \tag{6.130}$$

Wir definieren

$$\epsilon_\Sigma(\omega) = \epsilon(\omega) - \frac{4\pi}{\mathrm{i}\omega}\sigma(\omega). \tag{6.131}$$

Wenn $\epsilon \to \epsilon(0) = \text{const.}$, aber wenn $\epsilon_\Sigma(\omega) \to -\frac{4\pi\sigma(0)}{\mathrm{i}\omega} \to \mathrm{i}\infty$. Wir betrachten nun $\epsilon_\Sigma(\omega)$ als diel. Funktion eines leitenden Mediums. Wir bezeichnen nun ϵ_Σ als ϵ und das Alte ϵ als ϵ_{geb}. Wir verallgemeinern nun das Lorentz-Modell, sodass es auch für ein Metall gilt.

Drude-Modell Wir betrachten weitere Oszillatoren, die den freien Elektronen entsprechen. Daher ihre Frequenz $\omega_f = 0$, die Dämpfung sei $\gamma_f = 1/\tau$:

$$m\left(\ddot{\vec{r}} + \frac{1}{\tau}\dot{\vec{r}}\right) = q\vec{E}(t) \tag{6.132}$$

Daher gilt

$$\epsilon(\omega) = \underbrace{1 + \sum_j \frac{4\pi n_j e^2}{m_j(\omega_j^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\gamma_j)}}_{\epsilon_{\text{geb}}(\epsilon)} + \frac{4\pi n_f e^2}{m(-\omega^2 - \mathrm{i}\omega/\tau)}. \tag{6.133}$$

Wir vergleichen, dies mit den Ergebnissen aus den Maxwell-Gleichungen:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\text{geb}}(\omega) - \frac{4\pi\sigma(\omega)}{\mathrm{i}\omega}. \tag{6.134}$$

Daraus folgt für $\sigma(\omega)$, aus der vorletzten Gleichung:

$$\sigma(\omega) = \frac{n_f e^2}{m}\frac{1}{1/\tau - \mathrm{i}\omega}. \tag{6.135}$$

Dieser Zusammenhang nennt man Drude-Formel. Im Grenzfall kleiner Frequenzen $\omega\tau \ll l$ folgt bei Nährung

$$\sigma(\omega) \approx \frac{n_f e^2 \tau}{m} \equiv \sigma_D \tag{6.136}$$

die Drude-Leitfähigkeit. Für $\omega\tau \ll 1$ können wir

$$\epsilon(\omega) \approx \epsilon_{\text{geb}} - \frac{4\pi\sigma_D}{\mathrm{i}\omega} \overset{\omega \ll \sigma_D}{\approx} -\frac{4\pi\sigma_D}{\mathrm{i}\omega} \tag{6.137}$$

annähern. Für gute Leiter gilt $\sigma_D\tau \gg 1$. Daher folgt aus $\omega\tau \ll 1$ $\omega \ll \sigma_D$. Wir betrachten als Beispiel Kupfer:

$$1/\tau = 3.7\ \cdot 10^13\,1/\text{s} \quad \sigma_D = 5.8\ \cdot 10^17\,1/\text{s} \Rightarrow \sigma_D\tau = 1.6 \cdot 10^4 \gg 1. \tag{6.138}$$

Wir definieren

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_f e^2}{m}} \tag{6.139}$$

als Plasmafrequenz. Bei niedrigen Frequenzen ist ϵ_{geb} eine reelle Konstante bei niedrigen Frequenzen. Es folgt

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\text{geb}} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \mathrm{i}/\tau)} = \left(\epsilon_{\text{geb}} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \tau^{-2}}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\omega_p^2\tau^{-1}}{\omega(\omega^2 + \tau^{-2})}\right). \tag{6.140}$$

`Schaubilder dafür...`

Es ergeben sich drei interessante Bereiche: $\omega \ll 1/\tau$, $1/\tau \ll \omega < \omega_p/\sqrt{\epsilon_{\text{geb}}}$ und $\omega > \omega_p/\sqrt{\epsilon_{\text{geb}}}$. Den ersten Fall nennen wir Skin-Effekt es folgt $\omega \ll \sigma_D$ und damit $\epsilon \approx -4\pi\sigma_D/(\mathrm{i}\omega)$. Wir berechnen den Reflexionskoeffizient

$$R = \left|\frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}\right|^2 = \left|\frac{1 - \sqrt{\epsilon}}{1 + \sqrt{\epsilon}}\right|^2 \approx 1 \tag{6.141}$$

Daher erhalten wir volle Reflexion, da

$$\sqrt{\epsilon} = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4\pi\sigma_D}{\omega}}, |\sqrt{\epsilon}| = \sqrt{|\epsilon|} \gg 1. \tag{6.142}$$

Die Eindringtiefe erhalten wir dann über

$$d = \frac{c}{\omega}\frac{1}{\mathrm{Im}\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{2\pi\sigma\omega} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\sigma_D\nu}}. \tag{6.143}$$

Beispielswese bei Kupfer $\nu = 10^9$ Hz folgt eine Eindringtiefe von $d = 2\ \cdot 10^{-4}$ cm. Der nächste Fall ermöglicht Reflexivität im Sichtbaren, aber Transparenz im Ultravioletten ($\omega\tau \gg 1$). Es folgt

$$\epsilon(\omega) \approx \epsilon_{\text{geb}} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \tag{6.144}$$

Damit können wir den BRechungsindex betrachten

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)} = \begin{cases} \mathrm{i}n_i = \mathrm{i}\sqrt{\omega_p^2/\omega^2 - \epsilon_{\text{geb}}}, & \omega < \omega_p/\sqrt{\epsilon_{\text{geb}}} \\ \mathrm{n}_r = \sqrt{\epsilon_{\text{geb}} - \omega_p^2/\omega^2}, & \omega > \omega_p/\sqrt{\epsilon_{\text{geb}}} \end{cases} \tag{6.145}$$

Im ersten Fall haben wir dann volle Reflexivität, da der Brechungsindex rein imaginär ist. im letzteren wird Metall im Ultravioletten durchlässig.

7. Spezielle Relativitätstheorie, kovariante Formulierung der ED

7.1. Einstein'sches Relativitätsprinzip

Die „gewöhnliche" Mechanik: Galilei-Invarianz. Gesetze der Newton-Mechanik gelten in gleicher Form in allen Inertialsystemen (IS'). Wir betrachten die zwei IS k und k':

`Bild zweier relativ zueinander Bewegender IS.`

Teilchen $i = 1, 2, \dots$ bei einem zwei Körper-Potential $V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$:

$$K : m_i \ddot{\vec{r_i}} = -\nabla_i \sum_{j \neq i} V(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \tag{7.1}$$

$$K' : m_i \ddot{\vec{r_i}}' = -\nabla_i' \sum_{j \neq i} V(|\vec{r}_j{}' - \vec{r}_i{}'|) \tag{7.2}$$

Beide haben bei Galileitransformation ($t' = t, \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t$) diesselbe Form, deswegen sind sie unter der Transformation invariant. Die Wechselwirkung durch $V(\{\vec{r}\})$ lässt auf augenblicklicher Ausbreitung der Wirkung schließen. Bei Wellenphänomenen gibt eskeine Galilei-Invarianz (Änderung der Form bei Transformation der Gleichung). Wir nehmen an es gebe eine Wellengleichung:

$$K : \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(\vec{r}, t) = 0 \tag{7.3}$$

Nun führen wir eine Galileitransformation durch. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \vec{v}\nabla', \nabla = \nabla'. \tag{7.4}$$

Daraus folgt

$$K' : \left(\nabla'^2 - \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\vec{v}\,\nabla' \frac{\partial}{\partial t'} + (\vec{v}\,\nabla')^2 \right] \right) f'(\vec{r}\,', t') = 0 \tag{7.5}$$

Andere Form, also keine Invarianz. Bei Schallwellen beispielsweise ist dies klar, sie breiten sich in einem Medium aus und besitzen daher ein ausgezeichnetes System (K) in dem das Medium ruht (daher sind rechtslaufende und linkslaufende Wellen von gleichem Geschwindigkeitsbetrag). Während im transformierten Bezugssystem dies nicht mehr gilt ($c_L' = c+v, c_R' = c-v$). Da die Maxwell-Gleichungen zu den elektromagnetischen Wellengleichungen führen, sind die Maxwell-Gleichungen nicht Galilei-Invariant. Vor Einstein (T<1905) gab es dafür verschiedene Erklärungsmöglichkeiten:

1. Maxwell-Gleichungen sind nicht korrekt. Die richtige Theorie des Elektromagnetismus ist Galilei-Invariant.

2. Galilei-Relativitätsprinzip ist nur auf die Mechanik anwendbar. Für den Elektromagnetismus gibt es ein ausgezeichnetes Bezugssystem in dem sich die Lichttragende Substanz (Äther) in Ruhe befindet.

3. Es gibt ein neues, allgemeines Relativitätsprinzip, welches sowohl für die Mechanik, als auch für den Elektromagnetismus gilt. Daraus folgt, dass die Gesetze der Mechanik modifiziert werden müssen.

Die erste Möglichkeit wurde über Experimente „widerlegt“ (Maxwellleichungen bestätigt). Die zweite Möglichkeit wurde von den meisten Physikern damals akzeptiert. Es wurde angenommen, es gäbe ein Äther in welchem sich die Elektromagnetischen Wellen verbreiten. Es wurden Bemühungen angestellt die Bewegung der Erde relativ zum „Äther“ zu beobachten (Michelson,Morley (1887)). Es ergab sich dabei ein Null-Resultat. Geschwindigkeit des Lichts unabhänig von der Ausbreitungsrichtung. Damit musste die letzte Möglichkeit stimmen. Es folgt das Einsteinsche-Relativitätsprinzip (dritte Möglichkeit).

Postulate:

1. Die physikalischen Gesetze sind in allen IS identisch.
2. Lichtgeschwindigkeit ist gleich in allen IS und unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle.

7.2. Lorentz-Transformation

Wir betrachten zwei Bezugssysteme, die sich mit einer relativen Geschwindigkeit v zueinander bewegen.

`Zwei Bezugssysteme bewegen sich relativ zueinander`

Wir wollen nun die Koordinaten beider Systeme miteinander verbinden. Wir nehmen an, dass bei $t = t' = 0$ $\vec{r} = \vec{0}$ und $\vec{r}' = \vec{0}$. Punkte im vierdimensionalen Raum nennt man *Ereignis*. Wir betrachten nun zwei Ereignisse:

- Ereignis 1: vom Punkt $\vec{r} = 0$ wird zum Zeitpunkt 0 ein Signal mit Lichtgeschwindigkeit abgesendet
- Ereignis 2: das Signal gelangt zur Zeit t zum Punkt $\vec{r} = (x, y, z)$

Die Lichtgeschwindigkeit ist konstant und besitzt den Wert c. Daraus folgt für den Abstand

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \tag{7.6}$$

Im System K' gilt demnach

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \tag{7.7}$$

Im Allgemienen gilt für den Abstand zwischen zwei Ereignissen

$$s^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2. \tag{7.8}$$

Wenn in einem System $s^2 = 0$, dann muss dies auch in einem anderen System gelten: $s'^2 = 0$. Das Raum-Zeit-Kontinuum ist homogen und isotrop (da egal von wo aus betrachtet die Lichtgeschwindigkeit konstant ist). Der Zusammenhang zwischen beiden Koordinatensystemen ist linear: $s^2 = \lambda s'^2$. Der Abstand zwischen Ereignissen muss erhalten bleiben, daher ist $\lambda = 1$ und $s^2 = s'^2$. Wir betrachten nun die Geschwindigkeit $\vec{v}$ in x-Richtung von K'

$$x' = Ax + Bct \qquad \Rightarrow s^2 = s'^2 \Rightarrow x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2 \tag{7.9}$$
$$y' = y \tag{7.10}$$
$$z' = z \tag{7.11}$$
$$ct' = CX + Dct \qquad ct = \mathrm{i}\tau, ct' = \mathrm{i}\tau' \tag{7.12}$$

Es gilt also

$$x' = Ax + \mathrm{i}B\tau \tag{7.13}$$
$$\tau' = -\mathrm{i}Cx + D\tau \tag{7.14}$$

Dies erinnert an eine Rotation im zweidimensionalen. Es muss gelten $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Damit muss der Drehwinkel α imaginär sein, $\gamma = \mathrm{i}\alpha \in R$. Wir vergleichen mit der zweidimensionalen Rotationsmatrix:

$$A = D = \cos\alpha = \cosh\gamma \tag{7.15}$$
$$B = C = -\mathrm{i}\sin\alpha = -\sinh\gamma \tag{7.16}$$

Damit folgt

$$x' = x\cosh\gamma - ct\sinh\gamma \tag{7.17}$$
$$ct' = -x\sinh\gamma + ct\cosh\gamma \tag{7.18}$$

Ursprung von K' bewegt sich in K mit der Geschwinigkeit v:

$$x' = 0 \Leftrightarrow x = vt \Rightarrow x\cosh\gamma - ct\sinh\gamma = 0 \Rightarrow c\tanh\gamma = v \tag{7.19}$$

Damit können wir nun $\cosh\gamma$ und $\sinh\gamma$ bestimmen:

$$\cosh\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \sinh\gamma = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{7.20}$$

Damit kommen wir auf die Endformel:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{7.21}$$

Die Rücktransformationen sind dann

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad t = \frac{t' + x'v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{7.22}$$

Zeitdilatation Wir betrachten eine Uhr, die in K' ruht. Wir betrachten nun zwei Zeitpunkte und betrachten den Unterschied:

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{7.23}$$

Dies nennt man Zeitdilatation: $\Delta t > \Delta t'$. Die vergangene Zeit im ruhenden System ist größer. Eine bewegte Uhr geht langsamer.

`Bild beider Systeme mit vergleichendnen Uhren.`

Man kann den Uhrenvergleich durch eine dritte Uhr durchführen. Wir synchronisieren die beiden Uhren (bzw. alle Uhren in allen Systemen) im System K und lassen das System K' sich in Richtung von der dritten Uhr bewegen. Der Vorgang ist nicht symmetrisch. Es gibt demnach keinen Widerspruch. Wenn man nun erlaubt, dass das System K' eine endliche Beschleunigung erfahren kann kann man die Uhr auch wieder zur ersten Uhr bringen (was bei normalen Inertialsystemen nicht möglich ist). Wir wollen den Begriff *Eigenzeit* definieren: Wir betrachten eine Uhr, die sich mit einer beliebigen Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ (i.A. kein Inertialsystem) relativ zum IS K bewegt. Zu jedem Zeitpunkt gibt es ein Inertialsystem K' in dem sich die Uhr momentan in Ruhe befindet.

$$d\tau \equiv dt' = \sqrt{1 - v^2/c^2}dt, v = v(t) = |\vec{v}(t)|. \tag{7.24}$$

Dabei ist τ der Eigenwert. Es gilt

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{(1)}^{(2)} dt \, \sqrt{1 - v^2/c^2} < t_2 - t_1. \tag{7.25}$$

Die Uhr wird, wenn sie eine geschlossene Bewegung ausführt geht im verlgiech zur ruhenden Uhr nach.

`Bilder von Weltlinien.`

Längenkontraktion: Wir betrachten einen Maßstab, der in K' ruht und in der Richtung der Bewegung (K' relativ zu K) ausgedehnt ist:

$$\Delta x' = x_2' - x_1' \quad \Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow \Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{7.26}$$

Die Entfernungen senkrecht zur Bewegungsrichtung bleiben unverändert.

7.2.1. Raum- und zeitartige Abstände

Wir nehmen ein Ereignis zum Zeitpunkt $t = 0$ und $\vec{r} = \vec{0}$ und können nun alle anderen Ereignise klassifizieren.

`x, t Diagramm... mit zwei Geraden, die durch das Schaubild gehen.`

Man nennt

$$s^2 = c^2t^2 - \vec{r}^2 > 0 \tag{7.27}$$

zeitartige Abstände. Es existiert ein System K' in dem die beiden Ereignisse am selben Ort stattfinden. In diesem System wird $\vec{r}\,' = 0$ und $c^2t'^2 = s^2$. Dieser Ereignisse kann manin absolute Zukunft und absolute Vergangenheit einteilen, wir wir immer sagen können, welches Ereignis früher/später war (in allen Systemen). Man nennt

$$s^2 = c^2t^2 - \vec{r}^2 < 0 \tag{7.28}$$

raumartiger Abstand. Es existiert ein System K' an dem beide Ereignisse gleichzeitig sind. Man kann also nichts mehr über den start der Ereignisse sagen: $t' = 0$, $\vec{r}^{\,2} = -s^2$. Man nennt

$$s^2 = 0 \tag{7.29}$$

Lichtartiger Abstand. Beide Ereignisse sind mit Lichtausbreitung verbunden. Zwei Ereignisse können nur dann Kausal verbunden sein, wenn der Abstand ein zeitartiger Abstand ist.

30.01.2013

7.2.2. Transformation der Geschwindigkeit

Wir nehmen an K' bewegt sich mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung relativ zu K. Sei $\vec{u}$ die Geschwindigkeit eines Teilchens in K und $\vec{u}\,'$ in K'. Wir betrachten eine infinitisimale Verschiebung des Teilchens

$$dx = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, dy = dy', dz = dz', dt = \frac{dt' + v/c^2 dx'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{7.30}$$

Es folgt

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x' + v\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t' + v/c^2\mathrm{d}x'} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, u_y = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}. \tag{7.31}$$

Die Transformation für u_z verläuft analog zu u_y. Im Grenzwert von kleinen Geschwindigkeiten folgt die „übliche“ Addition der Geschwindigkeiten. Für den speziellen Fall $\vec{u}'\|$ x-Achse folgt

$$u'_x = u, u'_y = u'_z = 0 \Rightarrow u_x = u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}. \tag{7.32}$$

Zudem folgt $|\vec{u}\,'| \leq c, |\vec{v}| \leq c \Rightarrow |\vec{u}| \leq c$ und $|\vec{u}\,'| = c, |\vec{v}|$ beliebig $\Rightarrow |\vec{u}| = c$

7.3. Viervektoren, Tensoren und Lorentz-Gruppe

Wir definieren

$$(x^\mu), \mu = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow (x^\mu) \equiv (ct, \vec{r}), \tag{7.33}$$

dabei ist wichtig, dass das μ oben steht. Solche Vektoren, nennen wir kontravariante Vierervektoren, dabei sind

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z \tag{7.34}$$

die kontravarianten Komponenten des 4-Vektor. Nun definieren wir

$$(x_\mu) : x_0 = ct, x_1 = -x, x_2 = -y, x_3 = -z. \tag{7.35}$$

Solche Vierervektoren nennen wir kovariante Vierervektoren. Es gilt nun

$$s^2 = c^2t^2 - \vec{r}^{\,2} = \sum_{\mu_0}^{3} x_\mu x^\mu \equiv x_\mu x^\mu. \tag{7.36}$$

Ab jetzt nutzen wir die Einsteinsche Summenkonvention (Summation über doppelt auftretende Indizes). Darüber ist nun

$$s^2 = x_\mu x^\mu \quad \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu. \tag{7.37}$$

Nun machen wir eine weitere Definition

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7.38}$$

Dies nennt man den metrischen Tensor. Darüber können wir nun

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \tag{7.39}$$

schreiben. Es gilt

$$s^2 = x_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu \tag{7.40}$$

und darüber

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu. \tag{7.41}$$

Dies nennt man Minkonski-Raum.

Lorentz-Gruppe Allgemein gilt für eine Gruppe g, $g \in G$

- Multiplikation/lineare Operation: $G \times G \to G : (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 \in G$
- Assoziativität: $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3 \equiv g_1 g_2 g_3$
- Es gibt ein neutrales Element e: $eg = ge = g$
- Es gibt ein inverses Element: $g \mapsto g^{-1}, gg^{-1} = g^{-1}g = e$

Wir bezeichnen nun

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \text{ und } x'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} x_{\nu} \tag{7.42}$$

als Lorentztransformationen. Es gilt

$$s^2 \equiv x_{\mu} x^{\mu} = s'^2 = x'_{\mu} x'^{\mu}. \tag{7.43}$$

daraus folgt

$$g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} x^{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} x^{\beta} \stackrel{!}{=} g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}. \tag{7.44}$$

Durch den Vergleich erhalten wir

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}. \tag{7.45}$$

Damit ergibt sich (mit $(\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}) = \Lambda$ und $(g_{\alpha\beta}) = g$)

$$\Lambda^T g \Lambda = g \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1 \tag{7.46}$$

Wir wollen nun zeigen, dass dies Gruppeneigenschaften besitzt:

- Λ_1, Λ_2 sind Lorentztransformationen, $\Lambda_1 \Lambda_2$ ist eine L-Tra.
- $(\Lambda_1 \Lambda_2)^T g \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^T \Lambda_1^T g \lambda_1 \lambda_2 = g$

Man kann dies für alle Eigenschaften zeigen. SO(3) bezeichnet die Gruppe der Rotation in 3-dim.Raum (3-parametrisch). Das O steht dabei für orthogonal, daher $R^T R = \mathbb{1}$ Die Lorentz-Gruppe dagegen ist 6-parametrisch (3 Rotationen, 3 Lorentz-Boosts). Für Rotationen gilt

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.47}$$

für die Rotation um die z-Achse

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{7.48}$$

für eine Rotation um die y-Achse und

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{7.49}$$

für eine Roation um die z-Achse. Für die Boosts schreiben wir

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh\gamma & -\sinh\gamma & 0 & 0 \\ -\sinh\gamma & \cosh\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.50}$$

in x-Richtung,

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh\gamma & 0 & -\sinh\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh\gamma & 0 & \cosh\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.51}$$

in y-Richtung und

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh\gamma & 0 & 0 & -\sinh\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\gamma & 0 & 0 & \cosh\gamma \end{pmatrix} \tag{7.52}$$

in z-Richtung. Dabei ist zu beachten das dies nur die L-Trans (γ ist bekannt!). für die mit der Identität stetig zusammenhängen. Die Volle Lorentzgruppe besteht aus 4 Zusammenhängenden Komponenten

1. eigentliche L-Gruppe, beinhalet I
2. beinhaltet zeitliche Spiegelung: $p_{ab} = \delta ab \cdot k, k$ für $a = 0 = b$ -1 ansonsten 1
3. beinhaltet räumliche Spiegelung: $p_{ab} = \delta ab \cdot i, i$ für $a = 1 = b$ -1 ansonsten 1
4. beides

Eigentliche L-G; $\Lambda^T g\Lambda), \ \det 1\Lambda_0^0 > 0$.

1.2.2012

Tensordefinition Wir wollen die Objekte mit mehreren Idizes definieren. Tensor N-ter Stufe ist eine Größe mit mehreren Indizes.

$$T^{\alpha_1,\ldots\alpha_N} \quad \text{kontravarianter Tensor,} \tag{7.53}$$

wenn T such bei Lorentz-Transformationen wie folgt transformiert

$$T^{\alpha_1,\ldots,\alpha_N} = \Lambda^{\alpha_1}{}_{\beta_1} \cdot \ldots \Lambda^{\alpha_N}{}_{\beta_N} T^{\beta_1,\ldots,\beta_N}. \tag{7.54}$$

Eine ähnliche definition finden wir auch für kovariante Komponenten von Tensoren

$$T_{\alpha_1,\alpha_2} = g_{\alpha_1,\beta_1} g_{\alpha_2,\beta_2} T^{\beta_1,\beta_2}. \tag{7.55}$$

Man kann ko- und kontravariante Komponenten mischen

$$T_{\alpha_1}{}^{\alpha_2} = g_{\alpha_1,\beta_1} T^{\beta_1,\alpha_2}. \tag{7.56}$$

Jetzt wollen wir herausfinden, was $g^{\mu}{}_{\nu}$ ist.

$$g^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu,\alpha} g_{\alpha,\nu} = \mathbb{1} = \delta^{\nu}_{\mu} = g_{\mu}{}^{\nu}. \tag{7.57}$$

Wir betrachten nun

$$T'_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N} = \Lambda_{\alpha_1}{}^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot \Lambda_{\alpha_N}{}^{\beta_N} T_{\beta_1\ldots\beta_N}. \tag{7.58}$$

Damit können wir auch die Lorentzmatricen transformieren

$$\Lambda_{\alpha}{}^{\beta} = g_{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\nu}. \tag{7.59}$$

Wir betrachten

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}. \tag{7.60}$$

Damit ergibt sich

$$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda_{\mu}{}^{\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha},\ \Lambda^{T} \overline{\Lambda} = \mathbb{1}. \tag{7.61}$$

Wir suchen nun den 4er-Gradient.

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}. \tag{7.62}$$

Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu} \Rightarrow \partial'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \partial_{\nu} \tag{7.63}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv \partial^{\mu} \Rightarrow \partial'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \partial^{\nu}. \tag{7.64}$$

Besonders wichtig ist die Transformation des D'Alembert-Operator

$$\Box \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \partial^{\alpha} \partial_{\alpha} = \partial_{\alpha} \partial^{\alpha}. \tag{7.65}$$

Dies ist ein Lorentzskalar. Es gilt

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \tag{7.66}$$

$$\partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \tag{7.67}$$

Vierergeschwindigkeit: Es gilt

$$x^{\mu}(t) = (ct, \vec{r}(t)),\ \vec{v} \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{7.68}$$

Damit erhalten wir

$$u^{\nu} = \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (c, \vec{v}). \tag{7.69}$$

Wir sehen, dass u^{μ} wie $\mathrm{d}x^{\mu}$ ein 4er-Vektor ist mit $u'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} u^{\nu}$

$$u^{\mu} u_{\mu} = \frac{\mathrm{x}^{\mu} \mathrm{d}x_{\mu}}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{\mathrm{d}s^2}{\tau^2} = c^2. \tag{7.70}$$

Operationen mit Tensoren:

- Addition: $aS^{\alpha_1 \dots \alpha_N} + bT^{\alpha_1 \dots \alpha_N}$ ist eine Tensor der Stufe N
- Multiplikation: $S^{\alpha_1 \dots \alpha_N} T^{\beta_1 \dots \beta_N}$ ist ein Tensor der Stufe N+M
- Kontraktion: $g_{\alpha\beta} T^{\gamma_1 \dots \alpha \dots \beta \dots \gamma_N}$ Tensor der Stufe N-2
- Tensorgleichungen: z.B. $S^{\alpha} = U^{\alpha\beta} T_{\beta}$

7.4. Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

„Kovarianz“ bedeutet hier „Forminvarianz“. Nun wollen wir alle Größen der Maxwellgleichung, als Lorentztensoren definieren um diese dann umzuschreiben:

Ladungs- und Stromdichte als Vierervektor: Wir betrachten die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{7.71}$$

Wir definieren zunächst nur

$$j^\mu \equiv (c\rho, \vec{j}). \tag{7.72}$$

Jetzt wollen wir zeigen, dass dies ein Vierervektor ist. Aus der Kontinuitätsgleichung folgt

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{7.73}$$

Dies ist ein Hinweis auf die 4-Vektor-Eigenschaft

$$j^\mu = (c\rho, \vec{v}\rho) = \rho(c, \vec{v}) = \rho\sqrt{1 - v^2/c^2}u^\nu. \tag{7.74}$$

Nun betrachten wir die Ladungsdichte

$$\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V_0}. \tag{7.75}$$

Diese muss daher ein Lorentzskalar sein (dabei wurde die Invarianz der Ladung angenommen, Experimentel bestätigt).

4er-Potential: Wir definieren wieder zuerst im vorraus

$$A^\mu \equiv (\varphi, \vec{A}). \tag{7.76}$$

Wir wollen wieder zeigen, dass A^μ ein Vierervektor ist. Wir wollen Lorenz-Eichung annehmen

$$\nabla \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \partial_\mu A^\mu = 0. \tag{7.77}$$

Nun wollen wir die Maxwellgleichungen umschreiben.

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -4\pi\rho \tag{7.78}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{7.79}$$

Daraus folgt

$$-\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \tag{7.80}$$

bzw.

$$\Box A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \tag{7.81}$$

Dies sind die Maxwellgleichungen kovarianter Form.

7.5. El/mag. Feldtensor, Maxwell-Gl für E- und B-Feld in kov. Form

Es gilt

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{7.82}$$

und darüber den antisymmetrischen Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{7.83}$$

Für ihn gilt

$$F^{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \tag{7.84}$$

und

$$F_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & B_z & 0 & B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \tag{7.85}$$

und

???

$$F^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}. \tag{7.86}$$

Nun gilt

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \to \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} j^\nu. \tag{7.87}$$

Daraus folgt

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu. \tag{7.88}$$

Dies sind de inhomogenen Maxwellgleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in kovarianter Form.

- $\nu = 0 \Rightarrow \nabla\vec{E} = 4\pi\rho$
- $\nu = 1,2,3 \Rightarrow \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

Die homogenen Gleichungen folgen automatisch aus $F^{\nu\mu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Somit folgt der duale Feldstärketensor (Pseudotensor), der völlig antisymmetrisch ist:

$$\tilde{F}^{\nu\mu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \tag{7.89}$$

Wir wollen uns das an einem Beispiel näher klar machen: 6.2.2013

$$\tilde{F}^{01} = \frac{1}{2}\left(\epsilon^{0123} F_{23} + \epsilon^{0132} F_{32}\right) = F_{23}, \tag{7.90}$$

für $\tilde{F}^{\mu\nu}$ folgt

$$\tilde{F}^{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & E_x & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.91}$$

Wegen

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu \left(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha\right) = 0 \tag{7.92}$$

folgt

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{7.93}$$

Dies entspricht für $\nu = 0$

$$\nabla \vec{B} = 0 \tag{7.94}$$

und für $\nu = 1, 2, 3$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \tag{7.95}$$

Es gilt

$$\partial^\mu F^{\alpha\beta} + \partial^\alpha F^{\beta\mu} + \partial^\beta F^{\alpha\mu} = 0. \tag{7.96}$$

Falls es magnetische Monopole gäbe müsste

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu_{\mathrm{mag}} \tag{7.97}$$

gelten.

7.6. Lorentz-Transformationen der elektromagnetischen Felder

Wir betrachten einen bewegung in x-Richtung:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}. \tag{7.98}$$

mit

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \cosh\gamma & -\sinh\gamma & 0 & 0 \\ -\sinh\gamma & \cosh\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.99}$$

und

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.100}$$

Beispielsweise würde jetzt gelten

$$E'_2 = F'^{20} = \Lambda^2{}_\alpha \Lambda^0{}_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^2{}_2 \Lambda^0{}_\beta F^{2\beta} = \Lambda^0{}_0 F^{20} + \Lambda^0{}_1 F^{21} = \cosh\gamma E_2 - \sinh\gamma B_3. \tag{7.101}$$

Nur die senkrechten Komponenten bleiben dabei erhalten: $E'_1 = E_1$ und $B'_1 = B_1$ bzw. $\vec{E}_\parallel{}' = \vec{E}_\parallel, \vec{B}_\parallel{}' = \vec{B}_\parallel$. Die Transformationen sind damit für die anderen Komponenten

$$E_2' = \cosh\gamma E_2 - \sinh\gamma B_3 \tag{7.102}$$
$$E_3' = \cosh\gamma E_3 + \sinh\gamma B_2 \tag{7.103}$$
$$B_2' = \cosh\gamma B_2 + \sinh\gamma E_3 \tag{7.104}$$
$$B_3' = \cosh\gamma B_3 - \sinh\gamma E_2. \tag{7.105}$$

Wir können dies verallgemeinern

$$\vec{E}_\perp{}' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\vec{E}_\perp + \frac{\vec{v}\times\vec{B}_\perp}{c}\right) \quad \vec{E}_\perp{}' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\vec{B}_\perp - \frac{\vec{v}\times\vec{E}_\perp}{c}\right). \tag{7.106}$$

Für die Rücktransformationen gilt

$$\vec{E}_\perp = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\vec{E}_\perp{}' - \frac{\vec{v}\times\vec{B}_\perp{}'}{c}\right) \quad \vec{E}_\perp = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\vec{B}_\perp{}' + \frac{\vec{v}\times\vec{E}_\perp{}'}{c}\right). \tag{7.107}$$

7.7. Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung

Wir nehmen an im System K bewegt sich eine Ladung mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ parallel zur x-Achse. Im System K' ruht diese Ladung ($\vec{E}\,' = q\vec{r}\,'/r'^3, \vec{B}\,' = 0$). Es gilt für das ungestrichene E-Feld

$$E_x = E_x' = \frac{qx'}{r'^3} = \frac{q(x-vt)}{r'^3\sqrt{1-v^2/c^2}}, \text{ mit } r'^3 = \left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2/c^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}. \tag{7.108}$$

für die beiden anderen Felder gilt

$$E_y = \frac{E_y'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{fy'}{r'^3\sqrt{\dots}} \quad E_z = \frac{E_z'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{fz'}{r'^3\sqrt{\dots}}. \tag{7.109}$$

Damit gilt insgesamt

$$\vec{E} = \frac{q}{r'^3\sqrt{\dots}}(x-vt, y, z). \tag{7.110}$$

Für das B-Feld gilt nun mit $B_x = B_x' = 0$:

$$B_y = -\frac{qvz'}{cr'^3\sqrt{\dots}} \quad B_z = \frac{qvy}{cr'^3\sqrt{\dots}} \tag{7.111}$$

und damit insgesamt

$$\vec{B} = \frac{qv}{cr'^3\sqrt{\dots}}(0, -z, y). \tag{7.112}$$

Für $v \ll c$ folgt

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}\,'_{nr}}{r'^3_{nr}} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right), \vec{r}\,'_{nr} = (x-vt, y, z) \tag{7.113}$$

und

$$\vec{B} = \frac{q}{c}\frac{\vec{v}\times\vec{r}\,'_{nr}}{r'^3_{nr}} + \mathcal{O}\left(\frac{v^3}{c^3}\right). \tag{7.114}$$

Es gilt also $\vec{B}, \vec{E} \propto v/c$. Würde man die Kraft in beiden Systemen berechnen wäre diese Gleich.

7.8. Beschleunigte Ladungen, Liénard-Wichert-Potential, Strahlung

Wir werden die Rechnung hier nicht durchführen. Sie ist nachzulesen im Kapitel 23 vom Fließbach II.

7.9. Dopplereffekt

Wir betrachten zuerst den nichtrelativisten Fall (beispielsweise Schall). Es gilt

$$\delta\rho = \delta\rho_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi},\ \varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r}. \tag{7.115}$$

Die Schallfrequenz im Ruhesystem sei ω. Jetzt bewegt sich der Beobachter mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ und der Sender ist in Ruhe im System K (Beobachter ruht in K'):

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t. \tag{7.116}$$

Es gilt

$$\varphi = \omega t - \vec{k}(\vec{r} + \vec{v}t) = \omega' t - \vec{k}\vec{r}\,' \tag{7.117}$$

mit

$$\omega' = \omega - \vec{k}\vec{v} = \omega\left(1 - \frac{v}{c_{\text{Schall}}}\cos\Theta\right). \tag{7.118}$$

Wenn der Beobachter in K ruht und der Sender in System K' dann gilt dagegen:

$$\omega' = \frac{\omega}{1 - v/c_{\text{Schall}}\cos\Theta}. \tag{7.119}$$

Nun führen wir die Betrachtung für die El/mag-Welle durch (Licht). Es gilt

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}, \varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r} = k_\mu x^\mu, k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \vec{k}) \tag{7.120}$$

Die Phase ist ein Lorentz-Skalar. Damit ist k_μ ein 4-Vektor. Eine Argumentation warum dies gilt ist, dass bei der Fouriertransformtaion $k_\mu \Leftrightarrow -\mathrm{i}\partial_\mu$. Es gilt

$$k^\mu k_\mu = \frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^{\,2} = 0. \tag{7.121}$$

Nun wollen wir mit der Betrachtung beginnen. Es gebe eine relative Geschwindigkeit $\vec{v}$ relativ zum Beobachter. K sei das Ruhesystem des Senders und K' das Ruhesystem des Beobachters. Wir erwarten, dass $\omega = c|\vec{k}|$ die Frequenz der Quelle ist und $\omega' c|\vec{k}\,'|$ die Frequenz, die der Beobachter misst ist. Nun transformieren wir die Größen:

$$k_x = \frac{k'_x - \frac{v\omega'}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \omega = \frac{\omega' - vk'_x}{\sqrt{\cdots}} \tag{7.122}$$

Für die restlichen gilt: $k_y = k'_y, k_z = k'_z$ und

$$vk'_x = vk'\cos\Theta = \frac{v\omega'}{c}\cos\Theta. \tag{7.123}$$

Es gilt damit für die Frequenz

$$\omega = \frac{\omega'(1 - v/c\cos\Theta)}{\sqrt{\Theta}}. \tag{7.124}$$

Dies kann nach ω' umgestellt werden. Dies ist der Dopplereffekt für elektromagnetische Wellen.

A. Formelsammlung

A.1. Maxwell-Gleichungen

Mikroskopische Maxwell-Gleichungen: Links SI- und rechts Gauß-System:

$$\nabla\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad\qquad \nabla\vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\nabla\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad\qquad \nabla\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad\qquad \nabla\times\vec{B} = 4\pi\frac{\vec{j}}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Die mikroskopischen Maxwell-Gleichungen gelten theoretisch gesehen in jedem Fall. Man muss nur immer beachten, wie welche Größen zu welchen Zeiten in den Gleichungen Beachtung finden müssen. Dies ist in den makroskopischen Maxwell-Gleichungen direkt „berücksichtigt“. Sie geben gute Näherungen für die Gesamtprozesse an, indem sie statistisch im makroskopischen über den Raum und die Zeit mitteln.

Makroskopische Maxwell-Gleichungen: Ab jetzt stehen alle Gleichungen nur noch im Gauß-System. Damit wir das makroskopische Feld erhalten können wir das mikroskopische Feld $\vec{E}_m$ über den Raum mitteln (die hohe Anzahl an Teilchen führt zur indirekten Zeitmittelung). Dazu verwenden wir eine Glättungsfunktion f (ähnlich wie in der Thermodynamik). Im ersten Fall schreiben wir dies noch einmal zur Veranschaulichung explizit. In den anderen lassen wir sie weg:

$$\vec{E}_{\text{makro}} = \left\langle \vec{E}_m \right\rangle = \int \mathrm{d}r'^3 f(\vec{r}-\vec{r}\,')E_m(\vec{r}\,',t), \text{ mit } 1 = \int \mathrm{d}r'^3 f(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Ab jetzt schreiben wir für das makroskopische Feld $\vec{E}$. Nun gilt

$$\nabla\vec{E} = 4\pi\rho_{\text{makro}} = 4\pi(\rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{pol}}).$$

Daraus können wir elektrische Flussdichte $\vec{D}$ bestimmen

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \epsilon\vec{E},\ \epsilon \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und darüber die *erste* Maxwell-Gleichung über diese in einer ähnlichen Form ausdrücken:

$$\nabla\vec{D} = 4\pi\rho_{\text{frei}}. \tag{A.1}$$

Es gibt keine magnetischen Monopole. Daher können wir die *zweite* Maxwell-Gleichung direkt aus dem mikroskopischen übernehmen

$$\nabla\vec{B} = 0. \tag{A.2}$$

Ebenso die *dritte* Maxwell-Gleichung. Es erfolgt keine Betrachtung externer, umgebungsabhäniger Parameter. Daher gilt

$$\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0. \tag{A.3}$$

Für die übrige Maxwell-Gleichung müssen wir diese Parameter wieder betrachten. Im Allgemeinen gilt

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{makro}} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}_{\text{frei}} + \vec{j}_{\text{pol}} + \vec{j}_{\text{mag}}\right).$$

Über die Kontinuitätsgleichung können wir direkt $\vec{j}_{\text{pol}} = c \cdot \dot{\vec{P}}$ setzen. Es gilt

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} = \mu\vec{H}, \text{ mit } \nabla \times \vec{M} = \vec{j}_{\text{mag}} \text{ und } \mu \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Darüber erhalten wir die *vierte* Maxwell-Gleichung

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{frei}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{A.4}$$

Skalares Potential und Vektorpotential: Wegen Gleichung (A.2) ist die magnetische Flussdichte für jegliche Feldkonfiguration quellenfrei. Wir können also ein Vektorpotential für sie definieren. Es gilt

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \tag{A.5}$$

Aus Gleichung (A.3) folgt damit

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0$$

und daraus

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{A.6}$$

Für eine beliebige Funktion $\chi(\vec{r}, t)$ gilt nun

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \quad \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

Dies nennt man *Eichtransformation* und verändert die Vektorfelder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ nicht.