

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

KLASSISCHE
THEORETISCHE PHYSIK III
(THEORIE C, ELEKTRODYNAMIK)

KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
PHYSIKALISCHE FAKULTÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK

Ich möchte im folgenden eine Reihe von Büchern benennen, welche ich verwendet habe bei der Erstellung des Skriptes und welche ich für die Vorlesung empfehle:

- D. J. Griffiths *Introduction to Electrodynamics*
- J. D. Jackson *Klassische Elektrodynamik*
- W. Nolting *Grundkurs Theoretische Physik 3*
- W. Greiner *Klassische Elektrodynamik*

Ich habe mir weiterhin die Skripte der folgenden Kollegen bei der Ausarbeitung angesehen und mich an diesen orientiert:

- Prof. Falk Lederer
- Prof. Alexander Shnirman

Weiterhin sind verschiedene Abbildungen aus anderen Quellen übernommen, welche nicht explizit markiert wurden. Das Skript ist damit nur für den internen Gebrauch gedacht und darf in keiner Form weiterverbreitet werden. Ich möchte meinen Mitarbeitern Andreas Vetter und Karim Mnasri für die überaus hilfreiche Durchsicht des Manuskriptes bedanken.

© 2016 Prof. Dr. Carsten Rockstuhl

Skript geschrieben von Prof. Dr. Carsten Rockstuhl

<http://www.tfp.kit.edu>

Version vom February 2016

Inhaltsverzeichnis

I	Elektrodynamik	7
1	Einleitung	9
2	Mathematische Grundlagen der Elektrodynamik	13
2.1	Mathematik der Felder	13
2.2	Die δ -Distribution	18
2.3	Integralsätze der Vektoranalysis	20
3	Elektrostatik im Vakuum	25
3.1	Das Coulombsche Gesetz	25
3.2	Das elektrostatische Feld (Feldstärke)	26
3.3	Das Gaußsche Gesetz (Durchflutungsgesetz)	28
3.4	Das (skalare) oder elektrostatische Potential	29
3.5	Zusammenhang Potential - potentielle Energie	30
3.6	Feldberechnung mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes	32
3.7	Das elektrostatische Feld beim Durchgang durch geladene Flächen	35
3.8	Das elektrostatische Potential - die Poissongleichung	37
3.9	Multipolentwicklung des elektrostatischen Potentials	45
3.10	Potentielle Energie, Energiedichte im Vakuum	54

4	<i>Elektrostatik bei Anwesenheit von Leitern - das Randwertproblem</i>	65
4.1	<i>Die physikalische und mathematische Problemstellung</i>	65
4.2	<i>Berechnung der Ladungsverteilung aus dem Feld</i>	67
4.3	<i>Berechnung des Feldes im Raum und der Ladungsverteilung auf den Leitern</i>	68
4.4	<i>Energie und Kräfte</i>	89
5	<i>Elektrostatik in Dielektrika</i>	93
5.1	<i>Die dielektrische Polarisierung</i>	93
5.2	<i>Die dielektrische Verschiebung</i>	96
5.3	<i>Die Materialgleichungen</i>	97
5.4	<i>Übergangsbedingungen an Grenzflächen dielektrischer Medien</i>	98
5.5	<i>Potentialberechnung in Isolatoren</i>	100
5.6	<i>Raumladungsfreie Probleme</i>	104
5.7	<i>Elektrostatische Energie und Kräfte in dielektrischen Medien</i>	106
6	<i>Magnetostatik</i>	115
6.1	<i>Vorbetrachtung zum elektrischen Strom</i>	115
6.2	<i>Maxwellgleichungen der Magnetostatik</i>	118
6.3	<i>Die Maxwellgleichungen</i>	120
6.4	<i>Das Vektorpotential und Eichfreiheit</i>	123
6.5	<i>Multipolentwicklung des Vektorpotentials einer endlichen Stromverteilung</i>	126
6.6	<i>Das Magnetfeld in Materie</i>	129
6.7	<i>Energie des magnetostatischen Feldes oder einer stationären Stromverteilung</i>	136
6.8	<i>Kraft auf eine eng begrenzte Stromverteilung im äußeren Magnetfeld</i>	137
6.9	<i>Der magnetische Spannungstensor</i>	139
7	<i>Das Induktionsgesetz - langsam veränderliche Felder</i>	141
7.1	<i>Das Faradaysche Gesetz</i>	141
7.2	<i>Grundelemente der Wechselstromtechnik</i>	146

8	<i>Das vollständige System der Maxwellgleichungen</i>	153
8.1	<i>Ladungserhaltung und Maxwellsche Ergänzung</i>	153
8.2	<i>Das System der Maxwellschen Gleichungen</i>	154
8.3	<i>Die Materialgleichungen</i>	158
8.4	<i>Mathematischer Exkurs: die Fourier Transformation</i>	164
8.5	<i>Übergangsbedingungen an den Grenzen zweier Medien</i>	166
8.6	<i>Die elektrodynamischen Potentiale und die Eichtransformationen</i>	167
8.7	<i>Die Energiebilanz – der Poyntingsche Satz</i>	175
8.8	<i>Der Impulssatz der Elektrodynamik</i>	182
9	<i>Elektromagnetische Wellen</i>	185
9.1	<i>Elektromagnetische Wellen im Vakuum</i>	185
9.2	<i>Elektromagnetische Wellen im transparenten homogenen Medium</i>	189
9.3	<i>Wellenerzeugung im Vakuum</i>	191
	<i>II Relativitätstheorie</i>	201
10	<i>Spezielle Relativitätstheorie</i>	203
10.1	<i>Bezugssysteme / Inertialsysteme</i>	203
10.2	<i>Galilei-Transformation</i>	204
10.3	<i>Michelson-Morley Experiment</i>	206
10.4	<i>Lorentz-Transformation</i>	208
10.5	<i>4-Vektoren und Invarianten</i>	211
10.6	<i>Zeitkegel und Kausalität</i>	213
10.7	<i>Relativistische Formulierung der Elektrodynamik</i>	214

Teil I

Elektrodynamik

1 Einleitung

Die Elektrodynamik beschreibt alle beobachtbaren Phänomene, die durch Ladungen und Ströme verursacht werden. Sie sind die Quellen elektromagnetischer Felder und sind Funktionen von Ort und Zeit. Wir werden sehen, dass beliebige zeitlich sich veränderliche Felder, z.B. in einem festen Raumpunkt, beschrieben werden können als Superposition zeitharmonischer Felder. Jedes der zeitharmonischen Felder ist charakterisiert durch eine Frequenz. Sie ist ein Maß für die Anzahl der Oszillationen der Felder pro Zeiteinheit. Diese Frequenzen umspannen viele Dekaden und in Abhängigkeit der Frequenz, begegnen wir ihnen in unterschiedlichen alltäglichen Situationen.

Gewitterwolken sind elektrostatisch geladene Wolken. Sie stellen ein Phänomen des Alltages dar, welches im Rahmen der Elektrostatik beschrieben wird. Mit nur leicht höhere Frequenzen (50 Hz) oszilliert die Wechselspannung in unseren Stromnetzen, welche zu einem Stromfluss führt und mit welcher wir eine Arbeit verrichten können. Frequenzen, welche bei MHz oder GHz oszillieren, werden zur Übertragung von Rundfunk und TV-Signalen (zumindest in klassischen Systemen) genutzt. Frequenzen in diesem Band (oder im speziellen 2.455 MHz) finden auch in Kücheninstrumenten wie der Mikrowelle Verwendung¹. Terahertzstrahlung (der Bereich zwischen 300 GHz bis 3 THz) findet inzwischen vielfach Verwendung in der Spektroskopie, der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung, der Kommunikation und der Sicherheitstechnik. Der Infrarotbereich (grob bis 300 THz) ist der Spektralbereich, der assoziiert ist mit Wärmestrahlung. Es folgt der sichtbare Spektralbereich und schließlich der Bereich der UV Strahlung, der Röntgenstrahlung und schließlich der Gammastrahlung. Alle diese Bereiche haben ganz spezielle Applikationen.

Das faszinierende ist, dass alle Phänomene in allen diesen Frequenzbereichen mit Hilfe einiger weniger Gleichungen beschrieben werden. Die Maxwellschen Gleichungen im Vakuum und in SI Einheiten lauten

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0\end{aligned}$$

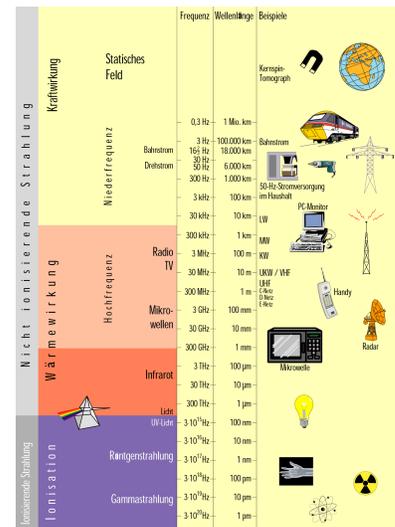


Abbildung 1.1: Spektrum elektromagnetischer Wellen und deren technologische Bedeutung.

¹ Es ist ein Irrglaube, dass diese Frequenz die Resonanzfrequenz von Wasser sei oder in dessen Nähe liegt. Die Resonanzfrequenz von Wasser für einzelne Moleküle liegt in der Nähe von 20 GHz. Die Frequenz von 2.455 MHz liegt in einem eigens für technische Zwecke freigegebenen Frequenzband und wurde deshalb ausgewählt, da bei dieser Frequenz die Funkwellen noch tief genug ins Gargut eindringen und dieses dadurch effektiv erwärmen können.

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\end{aligned}$$

mit der Lichtgeschwindigkeit c als $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0$. Die Größen, die in diesen Gleichungen auftauchen, sind die elektrische Feldstärke $[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ in V/m], die magnetische Flussdichte $[\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ in Vs/m oder Tesla], die Ladungsdichte $[\rho(\mathbf{r}, t)$ in As/m³] und die Stromdichte $[\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ in A/m²]. Weiterhin tauchen die Naturkonstanten der Permittivität ($\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \approx 8.854 \times 10^{-12}$ As/Vm) und der Permeabilität ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Vs/Am) auf. Diese Gleichungen zusammen mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$$

und der Lorentzkraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, q) = q [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]$$

sind völlig ausreichend und bilden das Fundament der Elektrodynamik.

Wie alle Fächer kann man die Elektrodynamik auf zwei unterschiedliche Arten unterrichten. Auf eine deduktive Art, bei der man ausgehend von den fertigen Gleichungen, welche oben stehen, alle einzelnen beobachtbaren Phänomene ableitet; oder auf eine induktive Art, in der man von den physikalischen Beobachtungen ausgeht und daraus nach und nach die zugehörige theoretische Beschreibung aufbaut. Klassisch würde man Ihnen empfehlen, die Elektrodynamik zweimal in Ihrem Leben zu hören. Das erste Mal induktiv, um ausgehend von einfachen Phänomenen, welche sich aus unserer täglichen Erfahrung speisen, die Komplexität der Elektrodynamik und vor allem auch der Maxwellschen Gleichungen zu entwickeln. Um die Theorie in ihrer mathematischen Schönheit und ihrer Klarheiten wertschätzen zu können, sollte Sie sie anschließend noch ein zweites Mal hören; in einer deduktiv angelegten Vorlesung. Dies kann leider hier im Rahmen des ohnehin anspruchsvollen Studiums nicht sichergestellt werden, weshalb dieser Kurs induktiv entwickelt wird. Beachten Sie aber bitte, in Prüfungen jeder Art wird bevorzugt ein deduktiver Ansatz gewählt. Unter Wissen der oben genannten Gleichungen können Sie alle relevanten Gesetze ableiten.

Weiterhin werden Sie in den obigen Gleichungen erkennen, dass die mathematischen Mittel zur Diskussion der elektromagnetischen Felder die der Vektoren² bzw. genauer der Vektorfelder sind (die fett geschriebene Größen in den obigen Gleichungen), die der Skalaren³ bzw. der skalaren Felder (die normal geschriebene Größen in den obigen Gleichungen) und die Sprache der Vektoranalysis. Daher werden wir als erstes die notwendigen elementaren Begriffe wiederholen / uns aneignen, um diese diskutieren zu können.

² Diese besitzen eine Größe und eine Richtung. Bekannte Beispiele sind Beschleunigung und Kraft.

³ Diese besitzen nur eine Größe und keine Richtung. Bekannte Beispiele sind Masse und Ladung.

Anschließend werden wir uns mit der Elektrostatik und der Magnetostatik beschäftigen⁴. Hier können elektrische und magnetische Effekte voneinander entkoppelt werden. In den obigen Gleichungen verschwinden die Zeitableitungen und die Gleichungen können separat gelöst werden. Hier sieht man, dass die elektrischen Ladungen die Quellen der elektrischen Felder sind und die Ströme die Quellen der magnetischen Felder. Zum Schluss beschäftigen wir uns mit den voll dynamischen Gleichungen im Rahmen der Elektrodynamik.

Den überwiegenden Teil der Vorlesung betrachten wir die Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum; also nur in der Anwesenheit von ruhenden oder bewegten Ladungen. Dies ist ein exakter Ansatz, aber viel zu kompliziert, will man die Wechselwirkung von elektromagnetischen Feldern mit Materie beschreiben. Die große Dichte der Atome, aus denen unsere Materie aufgebaut ist (in der Größenordnung von 10^{23} pro cm^3), erlaubt auch gar keine exakte Beschreibung von Materie. Stattdessen werden Materialien phänomenologisch beschrieben und führen zu den gemittelten makroskopischen Maxwellgleichungen. Die Anwesenheit dieser Materie erfordert, dass das elektrische und das magnetische Feld durch zwei zusätzliche Vektorfelder beschrieben werden, der elektrischen Flussdichte $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ (oder auch dielektrische Verschiebung genannt) und der magnetischen Feldstärke $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$. Zur Lösung der Maxwell'schen Gleichung muss dann noch der Zusammenhang zwischen diesen zusätzlichen Feldern und den elektrischen/magnetischen Feldern angegeben werden. Dieser Zusammenhang kann im Rahmen der Elektrodynamik nicht exakt berechnet werden. Dafür sind Methoden der Festkörpertheorie bzw. der Quantenmechanik notwendig. Materialeigenschaften in der Elektrodynamik werden daher im Allgemeinen phänomenologisch eingeführt. Der Zusammenhang zwischen den Feldern und den zusätzlichen Größen wird postuliert und durch physikalische Modelle substantiviert. Ist dieser Zusammenhang richtig, lassen sich damit alle beobachtbaren/messbaren Phänomene theoretisch beschreiben und erklären. Die Prozedur mag kompliziert sein, ist aber in der Praxis für die meisten Situationen völlig ausreichend und passend. Wir werden in den entsprechenden Kapiteln daher auch immer auf die korrekte Berücksichtigung von Materie eingehen.

Als Literatur empfehle ich Ihnen ⁵

- T. Fließbach: Elektrodynamik, Lehrbuch zur Theoretischen Physik II, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg
- W. Nolting: Grundkurs Theoretische Physik III, Elektrodynamik, Verlag Zimmermann-Neufang, Ulmen 1990
- W. Greiner: Theoretische Physik, Bd.3, Klassische Elektrodynamik, Verlag Harri Deutsch, 2002

⁴ Pathologischerweise behandelt ein Kurs der Elektrodynamik zu einem Großteil statische Phänomene

⁵ Glücklicherweise gibt es einen breiten Konsens über die Lehrinhalte der Elektrodynamik. Im Gegensatz zu, z.B. der Quantenmechanik oder der Thermodynamik, sind die Themen kanonisch und die Reihenfolge in der diese unterrichtet werden, wird nicht sehr kontrovers diskutiert. Sie können daher auf eine Vielzahl an Literatur zurückgreifen.

Das sind die Referenzen, welche im deutschsprachigen Raum als Literatur i.A. zu einer Vorlesung empfohlen werden (sprich die Vorlesungen orientieren sich sehr stark an diesen Büchern). Umfassend und vollständig.

- J. D. Jackson: Klassische Elektrodynamik, De Gruyter Verlag
Dies ist die klassische Referenz, aber sicherlich ist es eher ein Nachschlagewerk als ein Buch zum Lernen.
- D. J. Griffiths: Elektrodynamik: Eine Einführung, Pearson Studium - Physik
Im angelsächsischen Bereich eine sehr verbreitete Basis für einen Kurs, sehr leicht verständlich geschrieben, geradezu witzig manchmal und umfassend. Enthält sehr viele Aufgaben und Lösungen angegeben; ideal zum Selbststudium

Ein letzter Kommentar soll dem Einheitensystem gewidmet sein, in welchem in diesem Kurs gearbeitet wird. **In diesem Kurs verwenden wir die SI-Einheiten.** Dies ist ein metrisches Einheitensystem (eine Basiseinheit ist das Meter), es ist dezimal (Einheiten werden nur mit Zehnerpotenzen mit ganzzahligen Exponenten versehen) und es ist ein kohärentes Einheitensystem. Das bedeutet, jede abgeleitete Einheit lässt sich als Potenzprodukt von Basiseinheiten ohne zusätzlichen numerischen Faktor beschreiben. Basiseinheiten sind Meter (m), Kilogramm (kg), Sekunde (s), Ampere (A), Kelvin (K), Mol (mol) und Candela (cd). Beachten Sie bitte, in Deutschland gilt das *Gesetz über die Einheiten im Messwesen und die Zeitbestimmung* welches vorschreibt, dass im geschäftlichen und amtlichen Verkehr nur (gesetzliche) SI Einheiten verwendet werden dürfen (mit einigen in dem Gesetz spezifizierten Ausnahmen). Früher oder später werden Sie sich an das SI-Einheitensystem in jedem Falle gewöhnen müssen.

In der Elektrodynamik selbst und in den entsprechenden Lehrbüchern wird aber nicht immer auf dieses Einheitensystem zurückgegriffen. Ein sehr häufig verwendetes Einheitensystem ist, z.B. das Gaußsche (CGS) System. Achten Sie bitte im speziellen darauf, wenn Sie verschiedene Lehrbücher zum Studium der Elektrodynamik verwenden, in welchem Einheitensystem alle entsprechenden Gleichungen formuliert sind. Welches Einheitensystem benutzt wird lässt sich einfach an den verwendeten Maxwell'schen Gleichungen erkennen. Diese sind meistens auf den ersten Seiten dokumentiert. In Abhängigkeit der auftretenden Vorfaktoren kann man das Einheitensystem erkennen. Lernen Sie vor allem nicht parallel mit zwei Lehrbüchern, welche unterschiedliche Einheitensysteme verwenden. Das führt zu Konfusion. Eine ausführliche Darstellung finden Sie, z.B. im Anhang *Einheiten und Dimensionen* im Buch von J. D. Jackson.

2 Mathematische Grundlagen der Elektrodynamik

Im Folgenden soll ein kurzer Überblick über die mathematischen Grundlagen gegeben werden, welche benötigt werden, um die Eigenschaften von Feldern im Rahmen der Elektrodynamik richtig zu berechnen. Wir fangen damit an, die mathematischen Objekte zu definieren, die wir zur Handhabung benötigen, und führen den Nabla-Operator ein. Die Kombination des Nabla-Operators mit einem skalaren oder einem Vektorfeld führt zu elementaren Operatoren, welche wir in den Maxwell'schen Gleichungen wiederfinden. Weiterhin lernen wir die δ -Distribution kennen und die wichtigsten Integralsätze der Vektoranalysis. Weitere mathematische Elemente werden im Laufe der Vorlesung geeignet eingeführt und besprochen, z.B. die Fouriertransformation.

Hoffentlich werden Sie im Laufe der Vorlesung erkennen, dass die Mathematik die Sprache ist, in der wir theoretisch Physik besprechen. Abstrakt wirkende mathematische Ausdrücke werden uns etwas über die Physik sagen; ohne große Worte.

2.1 Mathematik der Felder

Elektrische und magnetische Felder werden mittels Vektorfeldern beschrieben, welche einen Betrag und Richtung besitzen. Sie sind abhängig von einer Ortskoordinate und können, z.B. in der Elektrodynamik, von der Zeit abhängen. Wir bezeichnen sie allgemein mit einem fetten Buchstaben, z.B. $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$.

Weiterhin können elektrische Vektorfelder im Rahmen der Elektrostatik durch ein skalares Potential ausgedrückt werden. Daher sind solche skalaren Felder ebenfalls wichtige Größen. Wir drücken sie allgemeinen mit einem kursiven Buchstaben aus, z.B. durch $u(\mathbf{r}, t)$.

Der Ortsvektor \mathbf{r} selbst ist spezieller Natur und enthält die drei Ortskoordinaten, $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Ein weiterer wichtiger Vektor ist der Nabla-Operator ∇ . Er ist ein vektorieller Differentialoperator, der auf skalare oder vektorielle Funktionen angewandt wird. Seine vektoriellen Komponenten entsprechen den partiellen räumlichen Ableitungen in den entsprechenden Koordinaten, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$.¹ Der Nabla-Operator angewandt auf eine skalare Größe ergibt einen Vektor. Der Nabla-Operator angewandt auf eine vektorielle Größe ergibt ein Skalar bzw. einen Vektor, je nach-

¹ Wir gehen hier nur auf Kartesische Koordinaten ein. Finden Sie im Online-Depository eine Datei, welche alle wichtigen Ausdrücke der Vektoralgebra für Krümmen-Orthogonale Koordinaten enthält. Häufig verwendete Ausdrücke für Kugel- und Zylinderkoordinaten sind dort ebenfalls zu finden. Dieses Dokument wurde von Christoph Menzel (Uni-Jena) erstellt.

dem, ob diese beiden Vektoren mit einem Skalar- oder Kreuzprodukt miteinander verbunden werden.

Die Kombination des Nabla-Operators mit einem skalaren Feld bzw. einem vektoriellen Feld führt somit zu verschiedenen speziellen Operatoren, welche wir im Folgenden kurz diskutieren wollen.

Der Gradient eines skalaren Feldes $u(x, y, z)$ wird beschrieben durch²

$$\begin{aligned}\nabla u(x, y, z) &= \text{grad } u(x, y, z) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= \mathbf{F}(x, y, z)\end{aligned}$$

Er ist ein Vektor und zeigt in die Richtung der maximalen Änderung der skalaren Größe; und der Betrag gibt die entsprechende Stärke der Änderung an³. In Komponentenschreibweise wird dies auch häufig ausgedrückt als

$$u(x_j)_{,i} = F_i$$

i und j in diesem Ausdruck sind Platzhalter und bezeichnen eine der drei Koordinaten x , y oder z . Der Gesamtausdruck ist zu lesen als das die i^{te} Komponente des Vektors F die i^{te} Ableitung der skalaren Größe u ist. Und dieses skalare Feld hängt von den drei Raumkoordinaten ab.

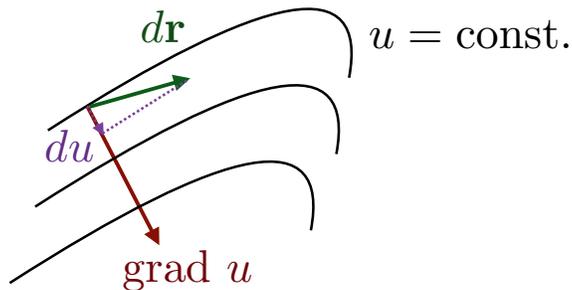
Die Richtung von $\text{grad } u$ bezeichnet die Richtung der größten Änderung des Wertes von u . Die Änderung des skalaren Feldes du in einer bestimmten Richtung, gegeben durch den infinitesimal kleinen Vektor mit einer bestimmten Richtung $d\mathbf{r}$, wird berechnet als

$$du = u(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}) = \nabla u \cdot d\mathbf{r} = \text{grad } u \cdot d\mathbf{r}$$

oder

$$du = u_{,i} dx_i$$

wobei hier die Einsteinsche Summenkonvention angewandt wird. Das bedeutet, dass über doppelt auftretende Indices in Gleichungen summiert wird.



² Beachten Sie bitte die unterschiedliche Schreibweise, mit Hilfe des Nabla-Operators bzw. mit dem Wort 'grad'. Beide Schreibweisen werden im Skript benutzt. Verstehen Sie dies bitte nicht als Inkonsequenz meinerseits, sondern eher als Konsequenz des Wunsches, Sie mit verschiedenen Notationen vertraut zu machen, die Sie auch in der Literatur finden.

³ Stellen Sie sich vor, Sie stehen irgendwo in einer Landschaft, z.B. an einem Berg. Dann zeigt der Gradient in die Richtung des maximalen Anstieges am Berg und die Größe sagt Ihnen, welchen Höhenunterschied Sie in dieser Richtung zurücklegen würden.

Der Gradient kann auch als Grenzwert eines Integrals aufgeschrieben werden

$$\text{grad } u(\mathbf{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{(V)} df u(\mathbf{r})$$

In diesem Oberflächenintegral ist der Vektor $d\mathbf{f}$ der Normalenvektor der Oberfläche. Beachten Sie bitte, dass Integral geht über die Oberfläche des durch V definierten Volumens. Diese Oberfläche bezeichnen wir in dieser Vorlesung mittels (V) . Andere Schreibweisen sind ∂V .

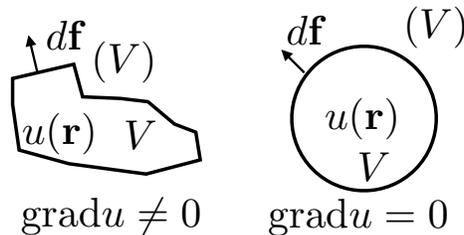


Abbildung 2.1: Visualisierung der Integraldarstellung des Gradienten.

In Abb. 2.1 sehen Sie, dass in der rechten Abbildung das Integral null ergibt, da sich zwei gegenüberliegende Punkte auf der Oberfläche des Integrals kompensieren. Die skalare Funktion u hat den gleichen Wert, aber $d\mathbf{f}$ zeigt in unterschiedliche Richtungen. Der Gradient verschwindet damit. Sie betrachten die Funktion in einem lokalen Minimum/Maximum.

Weiterhin können wir auch die Änderung eines Vektorfeldes in einer bestimmten Richtung berechnen mittels

$$d\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}) = (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

oder

$$dv_i = dx_j v_{i,j}$$

Wird der Nabla-Operator auf ein Vektorfeld $\mathbf{v}(x, y, z)$ mit einem Skalarprodukt angewandt, erhält man die Divergenz des Vektorfeldes.

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(x, y, z) = \text{div } \mathbf{v}(x, y, z) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = f(x, y, z)$$

oder

$$u_i(x_j)_{,i} = f$$

Die Divergenz kann auch als Grenzwert eines Integrals aufgeschrieben werden

$$\text{div } \mathbf{v}(x, y, z) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{(V)} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}(x, y, z)$$

Wird der Nabla-Operator auf ein Vektorfeld $\mathbf{v}(x, y, z)$ mit einem Kreuzprodukt angewandt, erhält man die Rotation des Vektorfeldes.

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v}(x, y, z) = \text{rot } \mathbf{v}(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \text{curl } \mathbf{v}(x, y, z) \end{aligned}$$

Die Rotation eines Vektorfeldes ist wieder ein Vektorfeld, dessen Betrag der maximalen Rotation an diesem Punkt entspricht und dessen Richtung senkrecht auf der Ebene der Rotation steht.

Die Rotation kann auch als Grenzwert eines Oberflächenintegrals aufgeschrieben werden

$$\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e} = \lim_{F \rightarrow 0} \frac{1}{F} \int_{(F)} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r})$$

wobei \mathbf{s} der Vektor in tangentialer Richtung zur Oberfläche ist und \mathbf{e} die Vektorkomponente ist, in welcher Richtung die Rotation berechnet wird; \mathbf{s} und \mathbf{e} stehen also senkrecht aufeinander.

Die Rotation kann auch einfach mit Hilfe des Levi-Cevita-Pseudotensors ε_{ijk} berechnet werden. Hier gilt

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} v_k = \varepsilon_{ijk} v_{k,j} = F_i$$

Allgemein gilt für das Kreuzprodukt

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

Zur vollständigen Definition des Levi-Cevita-Pseudotensors geht man i.A. davon aus, dass $\varepsilon_{123} = 1$ und wendet die folgenden Rechenregeln an:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{2 identische Indices} \\ 1 & \text{wenn } i, j, k \text{ eine gerade Permutation von } 1, 2, 3 \text{ sind} \\ -1 & \text{wenn } i, j, k \text{ eine ungerade Permutation von } 1, 2, 3 \text{ sind} \end{cases}$$

Der Levi-Cevita-Pseudotensor ist damit anti-symmetrisch für jedes Indexpaar. Er besteht aus 27 Komponenten, von denen 21 null sind und jeweils 3 Komponenten sind ± 1 . Rechnungen mit Hilfe des Levi-Cevita-Pseudotensors sind besonders dann attraktiv (im Rahmen der

Elektrodynamik), wenn Ihnen z.B. doppelte Kreuzprodukte begegnen. Es gilt:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

Speziell für uns relevant ist das Produkt von Levi-Cevita-Pseudotensoren mit einem identischen Index. Es gilt:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{kl}\delta_{jm}$$

Einige wichtige Rechenregeln der Vektoranalysis:

$$\nabla \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \nabla \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}_c) + \nabla \otimes (\mathbf{A}_c \otimes \mathbf{B})$$

In dieser Gleichung ist der Ausdruck \otimes ein Platzhalter für \cdot , oder auch \times . Wenn skalare Größen anstelle von vektoriellen Größen berücksichtigt werden, können sie ebenfalls verbunden werden. Weiterhin ist zu beachten, dass der Nabla-Operator auf der rechten Seite der Gleichung immer nur angewandt wird auf die Größe ohne den Subscript. \mathbf{A}_c und \mathbf{B}_c sollen immer links stehen, so dass der Operator nicht auf diese Größen wirkt. Bei der Umstellung helfen die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} \end{aligned}$$

Wichtige Beispiele für die Anwendung der obigen Rechenregel:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \text{rot grad } u = \nabla \times (\nabla u) = 0 \\ c_i &= \varepsilon_{ijk}u_{,k,j} = \varepsilon_{ijk}u_{,j,k} = -\varepsilon_{ikj}u_{,j,k} = -\varepsilon_{ijk}u_{,k,j} = 0 \end{aligned}$$

Der Gradient einer skalaren Funktion ist ein wirbelfreies Vektorfeld. Oder anders gelesen, zur Erzeugung eines wirbelfreien Vektorfeldes soll der Gradient einer beliebigen skalaren Funktion berechnet werden. Sie werden diesen Satz in der Elektrostatik benutzen, um die Einführung eines skalaren Potentials zu rechtfertigen.

$$\begin{aligned} c &= \text{div rot } \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \\ c &= \varepsilon_{ijk}A_{k,j,i} = \varepsilon_{ijk}A_{k,i,j} = -\varepsilon_{jik}A_{k,i,j} = -\varepsilon_{ijk}A_{k,j,i} = 0 \end{aligned}$$

Ein Wirbelfeld ist ein divergenzfreies Vektorfeld. Oder anders gelesen, zur Erzeugung eines divergenzfreien Vektorfeldes muss die Rotation eines beliebigen Vektorfeldes genommen werden. Sie werden diesen Satz in der Magnetostatik benutzen, um die Einführung eines Vektorpotentials zu rechtfertigen.

Eine vergleichbare Operation kann auch auf eine skalare Größe angewandt werden.

$$c = \text{div grad } u = \nabla \cdot (\nabla u) = (u_{,i})_{,i} = u_{,i,i} = \Delta u$$

Hier wurde ein weiterer wichtiger Operator eingeführt, der Laplace-Operator, $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$. Er besteht, wie man sieht, aus der Summer der zweiten Ableitungen. Angewandt auf eine skalare Größe ergibt er wieder ein Skalar. Auf einen Vektor wird er komponentenweise angewandt, so dass man wieder einen Vektor erhält, z.B.

$$\Delta \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}.$$

Das letzte wichtige noch zu benennende Beispiel ist die doppelte Rotation angewandt auf ein Vektorfeld. Eine solche Operation taucht z.B. später bei der Herleitung der Wellengleichung auf. Man kann zeigen, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \text{rot rot} \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \text{grad div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \\ c_i &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} A_{m,l,j} = -\varepsilon_{kji} \varepsilon_{klm} A_{m,l,j} = \delta_{jm} \delta_{il} A_{m,l,j} - \delta_{jl} \delta_{im} A_{m,l,j} = A_{m,m,i} - A_{i,j,j} \end{aligned}$$

2.2 Die δ -Distribution

Die δ -Distribution stellt eine Erweiterung des Funktionenbegriffs auf unstetige Funktionen dar, die nicht im Riemannschen Sinne zu integrieren ist. Im Rahmen der Elektrodynamik ist die δ -Distribution wichtig, um Punktladungen (im 3D), Flächenladungen (im 2D) und Linienladungen (im 1D) darzustellen.

Die δ -Distribution ist definiert mit der folgenden Gleichung:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x - x') dx'$$

Sie ist damit ein Funktional, welche eine Funktion auf eine Zahl abbildet. Wir tasten sozusagen den Funktionswert an der Stelle x ab. Einige Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \delta(x - x') &= \begin{cases} 0 & x \neq x' \\ \infty & x = x' \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') dx' &= 1 \\ \delta(x) &= \delta(-x) \end{aligned}$$

δ -Distributionen existieren ebenfalls in höheren Dimensionen.

$$\begin{aligned} \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') &\stackrel{!}{=} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \stackrel{!}{=} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' dz' \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') &= \int_{-\infty}^{\infty} dV' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 1 \\ f(\mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' \end{aligned}$$

Wir können diese δ -Distributionen auch anders darstellen, was unter Umständen eine Vereinfachung ist.

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dV_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$$

Eine häufig benutzte Darstellung erfolgt mit Hilfe des Laplace-Operators

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$$

Die δ -Distribution kann natürlich auch in anderen Koordinatensystemen beschrieben werden. Zum Beispiel in 3D mit $\delta(r) = 0$ für $r \neq 0$ in Kugelkoordinaten und $\delta(\rho) = 0$ für $\rho \neq 0$ in Zylinderkoordinaten. Es gilt

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}$$

in Kugelkoordinaten, da

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dV \delta(\mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} dr d\phi d\theta r^2 \sin\theta \delta(\mathbf{r}) \\ &= 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} dr r^2 \delta(\mathbf{r}) \\ &= 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} dr r^2 \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dr \delta(r) = 1 \end{aligned}$$

Alternativ kann sie auch in Zylinderkoordinaten dargestellt werden als

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{\delta(\rho)\delta(z)}{2\pi\rho}$$

Im Speziellen gilt in 2D:

$$\delta^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}$$

Einige wichtige Rechenregeln mit δ -Distributionen:

- Ableitung einer δ -Distribution $\frac{\partial}{\partial x} \delta(x)$

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x - x') dx' \\ &= f(x') \delta(x - x') \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x'} f(x') \delta(x - x') dx' \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} f(x) \end{aligned}$$

- δ -Distribution einer Funktion $g(x)$: $\delta[g(x)]$

$$\delta[g(x)] = \sum_i \frac{1}{\left| \frac{\partial}{\partial x} g(x) \right|_{x_i}} \delta(x - x_i)$$

In dieser Gleichung bezeichnen x_i die Nullstellen der Funktion, so dass $g(x_i) = 0$ gilt. Als Beispiel mag dienen

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$$

oder

$$\delta(\sin(x)) = \sum_m \frac{\delta(x - n\pi)}{|\cos n\pi|} = \delta(x - n\pi)$$

Es ist häufig nützlich, die δ -Distribution als Grenzübergang aus stetigen Funktionen darzustellen. Zum Beispiel

$$f(x, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$$

Diese Funktion hat die Eigenschaft, dass ihr Integral immer 1 ist, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, \sigma) dx = 1$ und es gilt $f(x, \sigma) = 0$ für $x \neq 0$ wenn $\sigma \rightarrow 0$. Weiterhin gilt für diesen Grenzfall:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f(x, \sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} = \delta(x)$$

Diese Funktion multipliziert mit einer beliebigen analytischen Testfunktion (mit kompaktem Träger) und über den ganzen Raum integriert, ergibt im Grenzfall den Wert der Testfunktion, dort wo die Distribution lokalisiert ist. Damit sind alle Eigenschaften der δ -Distribution erfüllt.

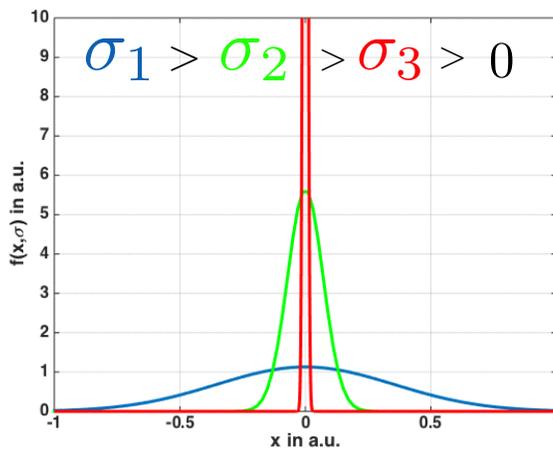


Abbildung 2.2: Gaussfunktion als Funktion des Parameters σ . Wir sehen, dass für kleiner werdende Parameter die Funktion schmäler und größer wird in ihrer Amplitude um den Koordinatenursprung. Das Integral über die gesamte x -Achse bleibt dabei immer konstant und ist normiert auf eins.

2.3 Integralsätze der Vektoranalysis

- Linienintegral des Gradienten:

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \text{grad } u \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} du = u(\mathbf{r}_2) - u(\mathbf{r}_1)$$

Das Linienintegral des Gradienten entspricht der Differenz der Funktion.

- Der Gaußsche Satz

$$\int_{(V)} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A} = \int_V dV \operatorname{div} \mathbf{A}$$

Das Flächenintegral der Normalkomponente eines Vektorfeldes über eine geschlossene Fläche entspricht dem Integral der Divergenz des Feldes über das von der Fläche eingeschlossene Volumen. Die Divergenz des Feldes selbst ist ein Maß für das Vorhandensein von Quellen/Senken des Feldes, je nachdem, ob die Divergenz des Vektorfeldes größer oder kleiner ist als null. Für ein quellenfreies Feld, für das also $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ im gesamten Volumen gilt, verschwindet das Integral. Damit das Oberflächenintegral verschwindet, muss demnach genau so viel in das Volumen durch die Oberfläche einwie ausdringen.

Dieser Satz kann auch verallgemeinert werden zu

$$\int_{(V)} d\mathbf{f} \otimes \mathbf{A} = \int_V dV \operatorname{div} \otimes$$

Als Beispiele mögen hier dienen

$$\begin{aligned} \int_{(V)} d\mathbf{f} u &= \int_V dV \nabla u = \int_V dV \operatorname{grad} u \\ \int_{(V)} d\mathbf{f} \times \mathbf{A} &= \int_V dV \nabla \times \mathbf{A} = \int_V dV \operatorname{rot} \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

- Der Stokesche Satz

$$\int_{(F)} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \int_F d\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

Das Linienintegral der Tangentialkomponente eines Vektorfeldes über den Rand einer Fläche entspricht dem Flächenintegral der Normalkomponente des Rotors dieser Fläche. Im Speziellen gilt

$$\int_{(V)} d\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0.$$

Dieser Satz kann auch verallgemeinert werden zu

$$\int_{(F)} d\mathbf{r} \otimes \mathbf{A} = \int_F (d\mathbf{f} \times \nabla) \otimes$$

Als Beispiele mögen hier dienen

$$\begin{aligned} \int_{(F)} d\mathbf{r} u &= \int_F (d\mathbf{f} \times \nabla u) = \int_F (d\mathbf{f} \times \operatorname{grad} u) \\ \int_{(F)} d\mathbf{r} \times \mathbf{A} &= \int_F (d\mathbf{f} \times \nabla) \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

- Erster Greenscher Satz

Aus dem vorher gesagten wissen wir, dass

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [\psi(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r})] &= \psi(\mathbf{r})\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \nabla\psi(\mathbf{r}) \\ \operatorname{div} [\psi(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r})] &= \psi(\mathbf{r})\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad}\psi(\mathbf{r})\end{aligned}$$

Wenden wir den Gaußschen Satz auf den Ausdruck $\psi(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r})$ an, erhalten wir

$$\int_{(V)} d\mathbf{f} \cdot \psi(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int_V dV [\psi(\mathbf{r})\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \nabla\psi(\mathbf{r})]$$

Der erste Greensche Satz lautet mit $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla\phi(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned}\int_{(V)} d\mathbf{f} \cdot \psi(\mathbf{r})\nabla\phi(\mathbf{r}) &= \int_V dV [\psi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r}) + \nabla\phi(\mathbf{r}) \cdot \nabla\psi(\mathbf{r})] \\ \int_{(V)} d\mathbf{f} \cdot \psi(\mathbf{r})\operatorname{grad} \phi(\mathbf{r}) &= \int_V dV [\psi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r}) + \operatorname{grad} \phi(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} \psi(\mathbf{r})]\end{aligned}$$

- Zweiter Greenscher Satz

Den zweiten Greenschen Satz erhält man, wenn man in der Gleichung $\int_{(V)} d\mathbf{f} \cdot \psi(\mathbf{r})\nabla\phi(\mathbf{r})$ einmal ϕ mit ψ vertauscht und beide Ausdrücke voneinander abzieht.

$$\begin{aligned}\int_{(V)} d\mathbf{f} \cdot [\psi(\mathbf{r})\nabla\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r})\nabla\psi(\mathbf{r})] &= \int_V dV [\psi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r})\Delta\psi(\mathbf{r})] \\ \int_{(V)} d\mathbf{f} \cdot [\psi(\mathbf{r})\operatorname{grad} \phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r})\operatorname{grad} \psi(\mathbf{r})] &= \int_V dV [\psi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r})\Delta\psi(\mathbf{r})]\end{aligned}$$

Als letztes wollen wir den Eindeutigkeitsatz besprechen. Unter Annahme von natürlichen Randbedingungen, welche implizieren, dass ein Vektorfeld im Unendlichen gegen null abklingt ($\mathbf{a}(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ für $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$), gibt es eine eindeutige Lösung, wenn für alle Raumpunkte die Quellen $[\operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{r})]$ und die Wirbel $[\operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r})]$ bekannt sind.

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir zwei Vektorfelder $[\mathbf{a}_1(\mathbf{r})]$ und $[\mathbf{a}_2(\mathbf{r})]$, welche die gleichen Quellen $[\operatorname{div} \mathbf{a}_1(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \mathbf{a}_2(\mathbf{r})]$ und Wirbel $[\operatorname{rot} \mathbf{a}_1(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{a}_2(\mathbf{r})]$ haben. Wir wollen die Differenz $\mathbf{d}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_1(\mathbf{r}) - \mathbf{a}_2(\mathbf{r})$ der beiden Vektorfelder ausrechnen und zeigen, dass sie null ist.

Aus der Identität der Quellen und der Wirbel der Vektorfelder wissen wir, dass $\operatorname{div} \mathbf{d}(\mathbf{r}) = 0$ ist und dass $\operatorname{rot} \mathbf{d}(\mathbf{r}) = 0$. Die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet immer, so dass wir auch schreiben können $\mathbf{d}(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} \phi(\mathbf{r})$. In Kombination mit der Quellenfreiheit müssen wir schlussfolgern, dass $\Delta\phi(\mathbf{r}) = 0$ gilt. Im weiteren Verlauf verwenden wir den ersten Greenschen Satz mit $\psi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r})$.

$$\int_{(V)} d\mathbf{f} \cdot \phi(\mathbf{r})\operatorname{grad} \phi(\mathbf{r}) = \int_V dV [\phi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r}) + (\operatorname{grad} \phi(\mathbf{r}))^2] = 0$$

Die linke Seite der Gleichung verschwindet, da

$$\text{grad } \phi(\mathbf{r}) = \mathbf{d}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_1(\mathbf{r}) - \mathbf{a}_2(\mathbf{r}) \rightarrow 0 \text{ für } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty$$

gilt. Da weiterhin $\Delta\phi(\mathbf{r}) = 0$ gilt, verbleiben wir mit

$$\int_V dV (\text{grad } \phi(\mathbf{r}))^2 = 0 \rightarrow \text{grad } \phi(\mathbf{r}) = \mathbf{d}(\mathbf{r}) = 0$$

Daraus folgt, dass $\mathbf{a}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_2(\mathbf{r})$ gelten muss, da wegen der natürlichen Randbedingungen keine konstanten Felder als Lösung möglich sind.

3 Elektrostatik im Vakuum

Das Ziel der Elektrostatik ist die Beschreibung des Zusammenhanges zwischen unbeweglichen Ladungen, Ladungsverteilungen und deren Feldern. Die Phänomene der Elektrostatik finden ihren Ursprung in den Kräften, welche elektrostatische Ladungen aufeinander ausüben. Diese werden mit dem Coulombschen Gesetz beschrieben und können aus experimentellen Beobachtungen deduziert werden. Dies können Sie z.B. beobachten, indem Sie einen Luftballon nehmen und ihn mit beiden Händen über dem Kopf halten. Reiben Sie den Luftballon heftig, aber ohne dass er gleich platzt, an Ihren Haaren. Halten Sie den Ballon nun gegen die Decke. Mit etwas Glück bleibt er nun wie von Zauberhand an der Decke hängen (der Versuch wird nicht mit jeder Person klappen). Diesen Effekt werden Sie mit Hilfe der Elektrostatik erklären können.

Elektrostatische Kräfte dominieren das Verhalten geladener Teilchen und sind wesentlich größer als z.B. die Gravitationskraft. So ist die elektrische Kraft zwischen einem Elektron und einem Proton ungefähr 40 Größenordnungen größer als ihre gegenseitige Anziehung aufgrund der Gravitationskraft.

3.1 Das Coulombsche Gesetz

Benannt nach Charles Augustin de Coulomb, lebte von 1736-1806. Die Formulierung des Zusammenhangs der elektrostatischen Kraft führte er 1784/1785 durch. Dieses besagt, dass Materie aus positiven und negativen Ladungen besteht. Diese sind im Allgemeinen in einer Balance. Eine kleine Störung des Systems würde zu einer Kraftwirkung führen. Diese Kraft führt zu einer Beschleunigung der Ladungen, welche wiederum einen Gleichgewichtszustand anstreben, so dass keine Kraft mehr wirkt. Experimentell gesichert ist der Zusammenhang

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

Dieses Gesetz beschreibt die Kraft, die eine Ladung q_2 auf eine Ladung q_1 ausübt ¹. Es gilt $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Der Vorfaktor kann unterschiedlich sein, abhängig von dem benutzten Maßsystem. Der zweite Term beschreibt den Betrag der Kraft, der letzte die Richtung. Die wichtigsten Eigenschaften der Coulombkraft sind:

- Die Kraft ist indirekt proportional zum Abstandsquadrat, $\propto \frac{1}{r^2}$
- Für $q_1 q_2 > 0$ ist die Kraft abstoßend; für $q_1 q_2 < 0$ ist die Kraft anziehend.

¹ Ladungen können positiv oder negativ sein. Es ist eine außergewöhnliche Tatsache, dass positive und negative Ladung zu exakten Anteilen in Volumenmaterialien vorkommen und sie sich dadurch nahezu neutralisieren. Falls sie ungleichmäßig verteilt wären, würden wir unglaubliche Kräfte spüren. Eine Kartoffel z.B. würde implodieren, wenn die Neutralisierung der Ladungen nur zu einem Faktor von 10^{-10} abweichen würde.

- Es ist eine Zentralkraft; es existiert also ein Potential, mit welchem die Kraft beschrieben werden kann.
- Es ist eine Zweikörperkraft, eine zusätzliche Ladung beeinflusst die Wechselwirkung nicht.
- Zur Abschätzung der Größe der Kraft beachten Sie, dass der Vorfaktor $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ungefähr 10^{10} Vm/As beträgt. Für eine Größe der Ladung von $q_1 = q_2 = 1$ As und einem Abstand von $r = 1$ m würde der Betrag der Kraft ungefähr $|\mathbf{F}_{12}| = 10^{10}$ N betragen.

Mikroskopisch wird die Kraft vermittelt durch den Austausch virtueller Teilchen; diese verbinden die Kraftzentren. Die Austauschteilchen der Coulomb-Wechselwirkung sind Photonen. Photonen haben eine verschwindende Ruhemasse ($m_{v=0} = 0$) und die Kraft ist langreichweitig, $\propto 1/r^2$. Dies ist im Gegensatz zu, z.B., Kernkräfte. Hier sind die Austauschteilchen Gluonen und die Reichweite der Kräfte sehr gering; in der Größenordnung von $2 \cdot 10^{-15}$ m.

Für den Fall, dass es mehrere Punktladungen gibt, gilt das Superpositionsprinzip, die einzelnen Kräfte addieren sich²:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_i \sum_{j \neq i} q_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}$$

Abschliessend soll gesagt werden, dass die Ladung eine Erhaltungsgröße ist. Sie kann nicht erzeugt oder zerstört werden. Eine positive Ladung kann annihiliert werden durch eine negative Ladung, aber eine negative Ladung kann aus sich selbst heraus nicht zerstört werden. Die Gesamtladung im Universum ist damit fixiert für alle Ewigkeit. Dies ist eine Eigenschaft, die man als globale Erhaltungsgröße bezeichnet. Die Erhaltung kann sogar noch wesentlich strenger gefasst werden; als eine lokale Erhaltung. Diese Eigenschaft werden wir später als Ladungserhaltung diskutieren.

Weiterhin ist die Ladung quantisiert. Auch wenn nichts im Rahmen der Theorie der Elektrodynamik darauf hindeutet, dass eine Quantisierung notwendig ist, sagt uns das doch die tägliche Erfahrung. Ladung existiert nur als Vielfaches einer Elementarladung. Wenn wir die Ladung eines Protons mit $+e$ bezeichnen, dann beträgt die Ladung eines Elektrons $-e$, ein Neutron ist neutral und der Kern eines Kohlenstoffatoms hat die Ladung $6e$. Wir werden keine Ladung antreffen wie $3.423e$ oder $1/2e$. Nichtsdestotrotz, die Elementarladung selbst ist sehr klein, so dass der diskrete Charakter vernachlässigt werden kann.

² Beachten Sie bitte, diese Gleichung ist in den SI Einheiten aufgeschrieben (mks). Andere Einheitensysteme, welche in der Literatur verwendet werden, sind die Gaußschen Einheiten (dort würde der Vorfaktor verschwinden) oder das Heaviside-Lorentz-Einheitensystem in dem der Vorfaktor lediglich $\frac{1}{4\pi}$ beträgt.

3.2 Das elektrostatische Feld (Feldstärke)

Im Folgenden wollen wir zum Begriff des elektrischen Feldes kommen. Dieses Feld ist eine Eigenschaft des Raumes und wird durch eine

Ladung bzw. Ladungsverteilung hervorgerufen. Unter der Annahme, dass eine der beiden Punktladungen sehr klein ist (wir betrachten dafür q_1), werden wir sie im Folgenden als Probeladung bezeichnen mit der Ladung q . Zu besserer Unterscheidung benennen wir die uns interessierende Ladung q_2 im Folgenden mit Q . Die Probeladung muss wirklich als solches verstanden werden. Wir benutzen sie, um das Feld zu vermessen, welches durch eine andere für uns relevante Ladungsverteilung erzeugt wird. Das verlangt, dass die Probeladung das Feld nicht beeinflusst.

Wenn wir die Probeladung abstrahieren, projizieren wir die Kraft, die auf diese wirkt, auf eine Eigenschaft des Raumes. Dies ist dann unser elektrisches Feld.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q}$$

Das elektrische Feld einer Punktladung ergibt sich damit zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}$$

Für eine positive Ladung zeigt das elektrische Feld von der Ladung weg. Für eine negative Ladung zeigt das Feld zur Ladung hin. Das elektrische Feld ist damit eine Eigenschaft des Raumes. Feldlinien beginnen bei positiven Ladungen und enden in negativen.

Für mehrere Ladungen gilt auch hier wieder das Superpositionsprinzip. Befinden sich mehrerer Punktladungen Q_i jeweils in den Raumpunkten \mathbf{R}_i , so gilt

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_i|} = \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r})$$

Den Übergang zur kontinuierlichen Ladungsverteilung gehen wir, indem wir eine Ladungswolke dQ im infinitesimalen Volumenelement dV' beschreiben; und über alle Volumenelemente integrieren. Betrachten wir also $dQ = \rho(\mathbf{r}')dV'$ bei $\mathbf{r}' = \mathbf{R}_i$, wobei hier $\rho(\mathbf{r}')$ eine Ladungsdichte beschreibt, also die Ladung pro Volumen, dann geht die Summe in ein Integral über und wir können schreiben

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Das Integral selbst erstreckt sich formal über das gesamte Volumen. In der Realität wird das Integral nur durchgeführt über den Raum, in welchem sich die Ladung befindet.

Diese Ausdruck ist allgemein gültig und enthält im speziellen auch den Fall einer oder mehrerer diskreter Punktladungen. Dies können wir zeigen, wenn für die Beschreibung einer solchen Ladung auf die δ -Distribution zurückgreifen. Eine Punktladung mit der Gesamtladung Q positioniert bei $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_1$ können wir dann beschreiben mittels

$\rho(\mathbf{r}') = Q\delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1)$. Dann ist mit der Gesamtladung $\int_V dV'\rho(\mathbf{r}') = Q \int_V dV\delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1) = Q$ das Feld

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{Q\delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\end{aligned}$$

Diese Art der Betrachtung kann auch auf mehrere Punktladungen erweitert werden. Wir beschreiben diese lediglich mit Hilfe von $\rho(\mathbf{r}') = \sum_i Q_i \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)$. Auch können wir die Betrachtungen auf bewegte Punktladungen erweitern, wenn wir diese beschreiben als $\rho(\mathbf{r}', t) = \sum_i Q_i \delta^{(3)}[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i(t)]$. Eine solche Beschreibung wird aber nicht im Rahmen der Elektrostatik durchgeführt, in der wie nur statische Phänomene diskutieren.

Damit ist das Bild im Prinzip vollständig. Mit dieser Art der Betrachtung, können wir das Feld von beliebigen Ladungsverteilungen berechnen. Falls dies nicht mehr analytisch möglich ist, kann dies im Zweifel mit Hilfe von Computern durchgeführt werden.

Es bleibt abschliessend zu betonen, dass Ladungsverteilung auch auf Flächen oder Linien begrenzt sein können. Man spricht dann von Flächenladungsdichte $\eta(\mathbf{r}')$ oder einer Linienladungsdichte $\zeta(\mathbf{r}')$. Das ist dann die entsprechende Ladung pro Oberflächenelement [$dQ = \eta(\mathbf{r}')df'$] oder pro Linienelement [$dQ = \zeta(\mathbf{r}')dl'$].

Bisher haben wir nur das Coulomb-Gesetz und das Superpositionsprinzip ausgenutzt um das elektrische Feld einer Ladungsverteilung zu berechnen. Jetzt werden wir ein eleganteres Verfahren kennen lernen, die Maxwell'schen Gleichungen.

3.3 Das Gauß'sche Gesetz (Durchflutungsgesetz)

Das Gauß'sche Gesetz ist die erste der vier Maxwell'schen Gleichungen. Es lässt sich herleiten, in dem wir den Feldfluss verursacht durch eine räumlich begrenzte Ladungsverteilung durch die Oberfläche berechnen.

$$\begin{aligned}\int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV'\rho(\mathbf{r}') \int_{(V)} d\mathbf{f} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV'\rho(\mathbf{r}') \int_{(V)} d\mathbf{f} \cdot \text{grad}_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV'\rho(\mathbf{r}') \int_V dV \text{div} \cdot \text{grad}_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV'\rho(\mathbf{r}') \int_V dV \Delta_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dV'\rho(\mathbf{r}') \int_V dV \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dV'\rho(\mathbf{r}') = \frac{1}{\epsilon_0} Q_V\end{aligned}$$

Beachten Sie bitte, dass wir in dieser Herleitung eine Reihe von mathematischen Schritten benötigt haben, welche im Detail im Tutorium besprochen werden. Im speziellen haben wir benutzt, dass:

$$\text{grad}_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

gilt. Der Subscript im Gradienten bezeichnet hier die Anwendung des Gradienten auf das Argument \mathbf{r} . Dann haben wir den Gaußschen Satz verwendet. Und schließlich haben wir verwendet, dass die δ -Distribution geschrieben werden kann als $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \Delta_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$.

Der gefundene funktionelle Zusammenhang

$$\epsilon_0 \int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = Q_V$$

ist das Gaußsche Gesetz. Es besagt, dass der Fluss des elektrischen Feldes durch die Oberfläche eines (mathematischen) Volumens gleich ist der im Volumen enthaltenen Ladung. Er stellt die integrale Formulierung der 1. Maxwellischen Gleichung dar.

Die differentielle Formulierung erhalten wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} &= Q_V \\ \epsilon_0 \int_V \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV &= \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \\ \rightarrow \int_V dV [\epsilon_0 \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \rho(\mathbf{r})] &= 0 \end{aligned}$$

Da das gewählte Integrationsvolumen beliebig sein darf, muss gelten

$$\epsilon_0 \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$

Dies ist die 1^{te} Maxwellische Gleichung. Beachten Sie bitte, diese Gleichung wird hier im Rahmen der Elektrostatik betrachtet; sie behält aber Ihre Form in der Elektrodynamik, wo elektrische und magnetische Felder (verursacht durch bewegte Ladungen) gemeinsam betrachtet werden müssen. Diese 1^{te} Maxwellische Gleichung besagt, dass die Ladungsdichte die Quelle des elektrostatischen Feldes ist. Es existiert ein lokaler Zusammenhang. Mathematisch ist dies eine partielle Differentialgleichung zur Bestimmung von 3 Komponenten des Feldes.

3.4 Das (skalare) oder elektrostatische Potential

Unter Betrachtung des skalaren bzw. elektrostatischen Potentials gelangen wir zu der 2^{ten} Maxwellischen Gleichung. Diese gilt in der Form, wie wir sie im Folgenden ableiten werden, nur in der Elektrostatik. Im Folgenden benutzen wir nochmals die quellenmäßige Darstellung des Feldes, da dieser Ausdruck mehr liefern kann als die 1^{te} Maxwellische Gleichung.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \operatorname{grad}_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
 &= -\operatorname{grad}_r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\operatorname{grad} \phi(\mathbf{r})
 \end{aligned}$$

Hier ist das elektrostatische Potential eingeführt worden

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Damit ergibt sich also

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \phi(\mathbf{r})$$

Diese Gleichung sagt uns, dass das elektrostatische Feld ein Potential besitzt. Potential und elektrisches Feld sind damit Synonyme. Dabei ist der Potentialgradient entgegengesetzt zum Feld. Da $\operatorname{grad} \phi \perp \phi = \text{const}$ und $\mathbf{E} \perp \phi = \text{const}$, kann man schlussfolgern, dass das Feld senkrecht auf den Äquipotentialflächen steht.

Die Berechnung des Potentials erfolgt mit Hilfe des Poissonschen Integrals

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Die weiteren Vorschriften zur Berechnung von elektrostatischen Feldern sind analog zu dem vorher entwickelten. Ausgehend von einer gegebenen Ladungsverteilung können wir mit dem oben genannten Poissonschen Integral das Potential berechnen. Mit Hilfe des Ausdruckes $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \phi(\mathbf{r})$ können wir dann das elektrische Feld berechnen. Das Ergebnis ist, ja muss, physikalisch identisch zur Gleichung für die explizite Berechnung des elektrischen Feldes, jedoch ist die Rechnung mathematisch einfacher durchzuführen.

Das Potential einer endlichen Ladungswolke befriedigt die natürlichen Randbedingungen: $\phi(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$.

3.5 Zusammenhang Potential - potentielle Energie

Beim Verschieben der Ladung q von \mathbf{r}_1 nach \mathbf{r}_2 wird Arbeit verrichtet. Arbeit wird dabei geleistet gegen die elektrostatische Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ verursacht durch das elektrische Feld. Die geleistete Arbeit berechnet sich somit zu

$$\begin{aligned}
 W &= -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -q \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = q \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \operatorname{grad} \phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\
 &= q \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\phi(\mathbf{r}) = q [\phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1)] = qU
 \end{aligned}$$

Die geleistete Arbeit ist dabei unabhängig vom Integrationsweg und nur abhängig von der Spannung U . Diese bezeichnet die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten.

Daraus lässt sich eine Vorschrift ableiten, wie das Potential zu berechnen ist.

$$U = [\phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1)] = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

Mit den natürlichen Randbedingungen ergibt sich mit

$$\phi(\infty) = 0 \rightarrow \phi(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$$

Da Arbeit einer Änderung der potentiellen Energie entspricht

$$W_{\text{pot}} = q\phi(\mathbf{r})$$

verschwindet das Integral bei einer Integration über einen geschlossenen Weg. Es wird keine Arbeit verrichtet. Das bedeutet aber auch, dass

$$\int_{(F)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Das ist die zweite Maxwellsche Gleichung der Elektrostatik in seiner integralen Form. Um zu einer differentiellen Formulierung zu gelangen, wenden wir den Stokeschen Satz an:

$$\int_{(F)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_F \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = 0$$

Da die Fläche für die Integration wieder beliebig gewählt werden kann, muss gelten:

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

Alternativ kann man auch eine zweite Argumentationskette, mathematisch elementarer, bemühen. Wir wissen, dass wir das elektrische Feld schreiben können als den (negativen) Gradienten eines skalaren Potentials $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \phi(\mathbf{r})$. Wenden wir auf diese Gleichung die Rotation an, erkennen wir, dass diese immer null sein muss, da der Gradient einer skalaren Funktion ein wirbelfreies Vektorfeld sein muss: $\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{rot grad } \phi(\mathbf{r}) = 0$. Daher gilt also

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

Die zwei Maxwellgleichungen in differentieller Formulierung lauten also

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \rho(\mathbf{r}) \\ \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned}$$

Dies sind die Maxwellgleichungen der E-Statik. Hier gibt es noch kein B-Feld. Die Ladungen sind die Quellen des wirbelfreien Feldes.

3.6 Feldberechnung mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes

3.6.1 Das elektrostatische Feld einer geladenen Kugelschale

Die integrale Form der Maxwellgleichungen kann man sehr vorteilhaft bei Problemen mit hoher Symmetrie (Kugel, Zylinder, Ebene) anwenden. Ein ausgewähltes Beispiel, das elektrostatische Feld einer geladenen Kugelschale, soll im Folgenden berechnet werden. Die Kugelschale besteht aus einer konstanten Ladungsdichte ρ_0 , die sich innerhalb einer Kugelschale mit dem Innenradius R_1 und dem Außenradius R_2 befindet.

Dies ist ein kanonisches Beispiel, welches wir in Kugelkoordinaten rechnen würden.

Zunächst einmal, würden wir das Durchflutungsgesetz in Kugelkoordinaten aufschreiben.

$$\epsilon_0 \int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = Q_V = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

In Kugelkoordinaten sind das Volumenelement $dV = r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta$ und der Oberflächennormalenvektor $d\mathbf{f} = r^2 \sin\theta d\phi d\theta \hat{r}$. Weiterhin wissen wir, dass auf Grund der Kugelsymmetrie nur eine Komponente im elektrischen Feld auftritt: $E_r \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_r \hat{r}$.

Die linke Seite der Gleichung oben beschreibt den Fluss durch eine Fläche:

$$\epsilon_0 \int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = \epsilon_0 E_r r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta = 4\pi\epsilon_0 E_r r^2$$

Die rechte Seite der Gleichung ist eine Integration über die Ladung in dem eingeschlossenem Volumen. Diese Integration müssen wir abhängig von den drei Raumgebieten durchführen.

- Gebiet 1: $r < R_1$ (bis knapp unter R_1), dort verschwindet die Ladungsdichte [$\rho(\mathbf{r}) = 0$]. In Folge verschwindet auch das Feld

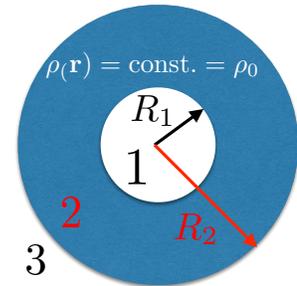
$$4\pi\epsilon_0 E_r r^2 = \int_V \rho(\mathbf{r}') dV' = 0 \rightarrow E_r = 0$$

- Gebiet 2: $R_1 < r < R_2$ (das Gebiet der Kugelschale), dort ist die Ladungsdichte konstant [$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0$]

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 E_r r^2 &= \int_{V_2} \rho(\mathbf{r}') dV' = \rho_0 4\pi \int_{R_1}^r dr' r'^2 \\ &= \rho_0 4\pi \left. \frac{r'^3}{3} \right|_{R_1}^r = \rho_0 \frac{4\pi}{3} (r^3 - R_1^3) \end{aligned}$$

Damit ist also

$$E_r(r) = \frac{\rho_0 (r^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r)}{r^2}$$



mit $Q(r) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 (r^3 - R_1^3)$ als eingeschlossene Ladung der Kugelschale bis zum betrachteten Radius.

- Gebiet 3: $r > R_2$, wir sind also außerhalb der Kugelschale, dort verschwindet die Ladungsdichte [$\rho(\mathbf{r}) = 0$]

Die obige Gleichung kann zur weiteren Rechnung unmittelbar verwendet werden, wenn im Ladungsintegral $r \rightarrow R_2$ geht. Das führt zum elektrischen Feld in der Außenschale

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

mit $Q = \frac{4\pi}{3}\rho_0 (R_2^3 - R_1^3)$, der Gesamtladung der Kugelschale.

Die Gesamtlösung lautet so

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & r > R_2 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r)}{r^2} & R_1 < r < R_2 \text{ mit } Q(r) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 (r^3 - R_1^3) \\ 0 & r < R_1 \end{cases}$$

Damit ist das Feld im Außenraum identisch zum Feld einer Punktladung Q bei $r = 0$. Weiterhin verschwindet das Feld im ladungsfreien Innenraum (das Volumen schließt keine Ladung ein).

Grenzfälle, z.B. einer homogenen Kugel oder einer geladenen Kugelschale sind in der Betrachtung enthalten. Im ersten Falle muss der Innenradius einfach auf null gesetzt werden. Mit $R_1 = 0$ und $R_2 = R$ erhält man im Innenraum der Kugel

$$\begin{aligned} E_r(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r)}{r^2} \quad \text{mit } Q(r) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3 \\ &= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \quad \text{mit } Q = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3 \end{aligned}$$

Im Außenraum ist das Feld identisch zur Kugelschale.

Für eine geladene Kugelschale betrachtet man den Grenzfall, dass der Innenradius gegen den Außenradius strebt. Im letzten Falle beobachten wir einen Sprung des elektrischen Feldes von null im Inneren der Kugelschale auf einen endlichen Wert im Äußeren der Kugelschale, welcher identisch ist zur endlichen Kugelschale oder der Kugel. Das Feld im Außenraum ist damit proportional zur Gesamtladung der Kugelschale. Wir können hier erkennen, dass das elektrostatische Feld un stetig ist beim Durchgang durch geladene Flächen.

3.6.2 *Das elektrostatische Feld eines unendlichen langen homogen geladenen Drahtes*

Als ein zweites Beispiel soll uns das elektrostatische Feld eines unendlichen langen homogen geladenen Drahtes dienen. Dieser Draht hat

einen infinitesimal kleinen Radius. Es wird beschrieben mit Hilfe einer Linienladungsdichte. Dies ist ein Problem, welches sehr schön in Zylindersymmetrie gerechnet werden kann. Allerdings besitzt die Struktur die hohe Symmetrie auch nur wegen der unendlichen Ausdehnung. Ausgangspunkt der Betrachtung ist wieder das Durchflutungsgesetz.

$$\epsilon_0 \int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = Q_V = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

In Zylinderkoordinaten ist der Oberflächennormalenvektor $d\mathbf{f} = r d\phi dz \hat{r}$. Das Volumenintegral über die Ladungsdichte reduziert sich zu

$$\int_V \rho(\mathbf{r}) dV = \zeta \int_{-\infty}^{\infty} dz$$

mit ζ der Linienladungsdichte. Integrieren wir wieder die linke Seite der Gleichung erhalten wir:

$$\epsilon_0 \int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} dz d\phi r E_r(r) = 2\pi r \epsilon_0 E_r(r) \int_{-\infty}^{\infty} dz$$

Kombiniert mit der rechten Seite der Gleichung erhalten wir so

$$2\pi r \epsilon_0 E_r(r) \int_{-\infty}^{\infty} dz = \zeta \int_{-\infty}^{\infty} dz$$

Daraus erkennen wir, dass

$$E_r(r) = \frac{\zeta}{2\pi r \epsilon_0}$$

beträgt.

3.6.3 Das elektrostatische Feld unendlich ausgedehnter ebener homogener geladener Flächen

Als ein drittes Beispiel betrachten wir das elektrostatische Feld einer unendlich ausgedehnten ebenen homogen geladenen Fläche. Dies ist ein Problem mit einer ebenen Symmetrie. Wir gehen wieder vom Durchflutungsgesetz aus

$$\epsilon_0 \int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = Q_V = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

und beschreiben die Ladungsdichte mit Hilfe einer Oberflächenladungsdichte η . Die rechte Seite der Gleichung wird so

$$\int_V \rho(\mathbf{r}) dV = \eta \int_{-\infty}^{\infty} df$$

Die linke Seite der Gleichung setzt sich zusammen als Summe zweier unendlich ausgedehnter Oberflächen

$$\epsilon_0 \int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = \epsilon_0 \int_F \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f}_1 + \epsilon_0 \int_F \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f}_2$$

$$= \epsilon_0 \int_F (E_1 + E_2) df$$

Wenn keine weiteren Ladungen in der Umgebung sind, ist der Betrag des Feldes auf der linken und rechten Seite identisch, also $E_1 = E_2 = E$. Gleichsetzen der linken und rechten Seite des Durchflutungsgesetzes ergibt somit

$$E = \frac{\eta}{2\epsilon_0}$$

Das Feld ist konstant im Raum, wegen der unendlichen Ladung.

3.6.4 *Das elektrostatische Feld zweier benachbarter Flächen: Plattenkondensator*

Eine einfache, aber technologisch interessante Erweiterung ist das Feld zwischen zwei benachbarten Flächen die betragsmäßig die gleiche, aber im Vorzeichen eine unterschiedliche Oberflächenladungsdichte besitzen sollen. Dies ist nichts weiter als ein einfacher Plattenkondensator. Hier ist das Feld links von der Gesamtanordnung $E^+ - E^- = 0$ und das Feld rechts von der Gesamtanordnung $E^- - E^+ = 0$ ist ebenfalls null. Auf Grund des Superpositionsprinzipes heben sich also die Felder verursacht durch die beiden benachbarten Flächen gegenseitig auf. Im Inneren des Kondensators hingegen beträgt das Feld

$$E^+ + E^- = \frac{\eta}{\epsilon_0}$$

Das Feld im inneren ist also proportional zur Oberflächenladungsdichte.

Aus diesen drei Beispielen sollten Sie zusammenfassend erkennen und behalten, dass das Abklingverhalten des statischen elektrischen Feldes von der Oberfläche geladener Körper in den unterschiedlichen Dimensionen einen unterschiedlichen funktionellen Zusammenhang besitzt. Im drei-dimensionalen Raum fällt das elektrische Feld mit $1/r^2$ ab (Beispiel Kugel), im zwei-dimensionalen Raum mit $1/r$ (Beispiel Zylinder) und im 1-dimensionalen Raum ist es konstant (Beispiel Fläche).

3.7 *Das elektrostatische Feld beim Durchgang durch geladene Flächen*

Wie wir gerade diskutierten, beobachten wir einen Sprung im elektrischen Feld beim Durchgang durch eine geladenen Oberfläche. Dies tauchte am Beispiel der Kugeloberfläche auf aber auch am Beispiel des Plattenkondensators. Im Folgenden wollen wir uns den allgemeinen Fall einer geladenen Oberfläche ansehen und diskutieren, wie diese Oberflächenladung die Felder auf den beiden Grenzen der Oberfläche

miteinander verbindet. Dazu beschreiben wir die geladene Fläche mit Hilfe einer inhomogenen Oberflächenladungsdichte $\eta(\mathbf{r})$. Zur weiteren Betrachtung zerlegen wir das Feld in Komponenten normal und tangential zur Fläche:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_t(\mathbf{r})$$

Weiterhin indizieren wir die Felder vor der Oberfläche mit dem Subskript 1 [$\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$] und mit dem Subskript 2 nach der Oberfläche [$\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$]. Wir diskutieren im Folgenden die erste bzw. zweite Maxwellsche Gleichung für ein kleines Volumen, welche die Grenzfläche einschliesst. Dieses soll in seiner Dicke vernachlässigbar sein. Weiterhin soll das Volumen ausreichend klein sein, um eine Variation des Feldes und der Oberflächenladungsdichte innerhalb des Volumens zu vernachlässigen. Als Gedankenstütze für dieses Volumen können Sie sich eine Schuhcremedose vorstellen³, durch welche die Grenzfläche verläuft. Durch diese Betrachtung gelangen wir zu einer Übergangsbedingung für die Normal- und die Tangentialkomponente.

3.7.1 Normalkomponente

Aus dem Satz von Gauss wissen wir, dass

$$\epsilon_0 \int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = Q_V = \int_{\Delta F} \eta(\mathbf{r}) df$$

Die linke Seite der Gleichung schreiben wir für die Einzelnen Oberflächen auf, so dass das Integral zu einer Summe wird. In der gegebenen Geometrie haben wir genau drei Terme. Hätten wir die Schuhcremedose nicht mit einer runden Grundfläche sondern mit einer rechteckigen oder quadratischen gewählt, hätten wir sechs diskrete Flächen, über die wir summieren müssen. In jedem Falle soll die Dose aber so klein sein, dass die exakte Geometrie keine Rolle spielen soll. Wir nehmen daher an, dass die Grundfläche der Schuhcremedose ΔF so klein ist, dass das Feld und die Oberflächenladungsdichte konstant im Betrachteten Volumen sind. Weiterhin lassen wir die Dicke gegen null gehen⁴, sodass wir keinen Betrag in der Integration von Komponenten in tangentialer Richtung zur Oberfläche haben. Dadurch reduziert sich die Gleichung auf eine Summe der Beiträge, welche durch den Boden bzw. den Deckel der Schuhcremedose stammen.

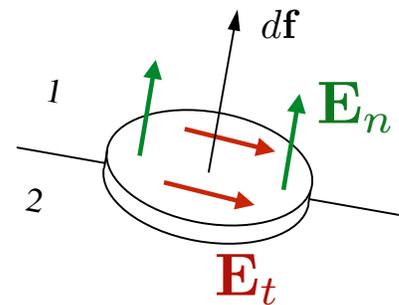
$$-\epsilon_0 E_{1n} \Delta F + \epsilon_0 E_{2n} \Delta F = \eta \Delta F$$

Das lässt sich leicht umstellen und wir erhalten

$$E_{2n}(\mathbf{r}) - E_{1n}(\mathbf{r}) = \frac{\eta(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

Wir erkennen an dieser Gleichung, dass beim Durchgang durch eine inhomogen geladene Fläche sich die Normalkomponente um die lokale

³ Im Englischen findet man in der Literatur häufig auch den Ausdruck der 'pill-box'.



⁴ Wir wollen die Maxwellschen Gleichungen in unmittelbarer Nähe zur Oberfläche evaluieren.

Flächenladungsdichte ändert. Dies ist die erste Randbedingung der Elektrostatik.

3.7.2 *Tangentialkomponente*

Ähnliche Betrachtungen können wir für die zweite Maxwellsche Gleichung anstellen

$$\int_{(\Delta F)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = [E_{t1}(\mathbf{r}) - E_{t2}(\mathbf{r})] \Delta l = 0$$

Hier haben die Normalkomponenten im Grenzfall einer Schuhcremedose mit vernachlässigbarer Dicke keinen Einfluss, da das Feld tangential zur Oberfläche integriert wird. Dadurch erhalten wir die Übergangsbedingung für die Tangentialkomponente

$$E_{t1}(\mathbf{r}) = E_{t2}(\mathbf{r})$$

Beim Durchgang durch eine inhomogen geladene Fläche ändert sich die Tangentialkomponente nicht. Dies ist die zweite Randbedingung der Elektrostatik.

3.8 *Das elektrostatische Potential - die Poissongleichung*

3.8.1 *Grundaufgabe der Elektrostatik*

Bisher konnten wir zeigen, dass jedem elektrischen Feld eindeutig ein Potential zugeordnet werden kann, welches sich berechnet mittels $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \phi(\mathbf{r})$. Mit Hilfe der ersten Maxwellschen Gleichung $\epsilon_0 \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$ erhalten wir so $-\epsilon_0 \text{div grad } \phi(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$. Das führt zur Poissongleichung

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

Das ist eine partielle Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung zur Bestimmung des Potentials bei vorgegebener Ladungsverteilung und Randwerten. Aus dem Potential kann dann leicht mit obiger Gleichung $[\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \phi(\mathbf{r})]$ das elektrische Feld berechnet werden. Beachten Sie bitte, das Potential ist nur bis auf eine Konstante bestimmt, dies führt aber immer zu dem gleichem E-Feld. Im Zweifel kann diese Konstante geeignet gewählt werden, um die Rechnung zu vereinfachen. Für eine verschwindende Ladungsdichte im gesamten Raum $[\rho(\mathbf{r}) = 0]$ erhält man die Laplace-Gleichung.

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = 0$$

Die Lösung der Poissongleichung kann als die Grundaufgabe der Elektrostatik verstanden werden. Bei natürlichen Randbedingungen

(Potential soll im Unendlichen verschwinden) und einer begrenzten Ladungsverteilung haben wir die Lösung bereits kennengelernt. Diese lautet

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Dies lässt sich einfach beweisen:

$$\begin{aligned} \Delta\phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') [-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \\ &= -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Wir wollen im Folgenden einen allgemeineren Lösungsweg beschreiben, welcher auf den Greenschen Funktionen basiert. Diese Greenschen Funktionen

- sind ein probates Mittel zur Lösung inhomogener partieller Differentialgleichungen,
- bezeichnen die Responsefunktion eines Systems,^{5,6}
- sind eindeutig, wenn zu der Differentialgleichung die Rand- oder Anfangswerte bekannt sind und
- reflektieren nur Differentialoperator und Geometrie; Quellen können immer noch abstrakt berücksichtigt werden.

Im Folgenden betrachten wir immer natürlich Randbedingungen. Wir fordern, dass das Potential im Unendlichen verschwindet.

In einem abstrakten Zugang kann man zeigen, dass die Greensche Funktion benutzt werden kann zur Lösung einer Differentialgleichung der Form

$$\hat{\mathbf{L}}\phi(\mathbf{r}) = s(\mathbf{r})$$

Hier ist $\hat{\mathbf{L}}$ ein beliebiger linearer Differentialoperator. Die Lösung für eine gegebene Quelle $s(\mathbf{r})$ ist dann gegeben durch

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V dV' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') s(\mathbf{r}')$$

mit der Greenschen Funktion (aufgeschrieben hier für translationsinvariante Systeme, in denen die Greensche Funktion nur von der Ortsdifferenz abhängt und nicht vom Ort selbst)

$$\hat{\mathbf{L}}G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Die Richtigkeit dieser Lösung lässt sich einfach beweisen durch

$$\hat{\mathbf{L}}\phi(\mathbf{r}) = \int_V dV' \hat{\mathbf{L}}G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') s(\mathbf{r}')$$

⁵ In unserem Falle ist dies das Potential für eine punktförmige Anregung im Raum.

⁶ Im (räumlich/zeitlichen) Fourierraum gibt es eine Analogie zur Greenschen Funktion. Die räumlich/zeitliche Fouriertransformation der Greenschen Funktion ist die Übertragungsfunktion. Sie beschreibt, wie eine bestimmte Raumfrequenz/Frequenz durch das System übertragen wird.

$$= \int_V dV' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') s(\mathbf{r}') = s(\mathbf{r})$$

Im Speziellen führt das für natürliche Randbedingungen und für die Poissongleichung mit dem Differentialoperator

$$\hat{\mathbf{L}} = -\epsilon_0 \Delta$$

und mit der Quellverteilung

$$s(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$

zu einer Differentialgleichung für die Greensche Funktion, die wie folgt aussieht:

$$-\epsilon_0 \Delta G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Daraus folgt, dass die Greensche Funktion

$$G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

lautet. Das Potential kann dann als Lösung der Gleichung

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V dV' G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}')$$

angegeben werden.

Diese konzeptionelle Einfachheit tritt nur zu Tage für den homogenen Raum. Im Allgemeinen ist die Suche der Greenschen Funktion wesentlich komplizierter bei Randbedingungen im Endlichen. Dies werden wir später betrachten.

Alternativ kann man diese Lösung auch aus dem zweiten Greenschen Satz ableiten

$$\int_{(V)} d\mathbf{f} \cdot [\psi(\mathbf{r}) \text{grad } \phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) \text{grad } \psi(\mathbf{r})] = \int_V dV [\psi(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) \Delta \psi(\mathbf{r})]$$

Jede der beiden Potentiale soll hier eine Lösung der gleichen Differentialgleichung sein. Wegen der natürlichen Randbedingungen soll das Potential im Unendlichen verschwinden, so dass die linke Seite der Gleichung keinen Beitrag liefert

$$0 = \int_V dV [\psi(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) \Delta \psi(\mathbf{r})]$$

Weiterhin identifizieren wir mit $\Delta \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$, $\psi(\mathbf{r}) = \epsilon_0 G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ und $\Delta \psi(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \Delta G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Dies alles eingesetzt in die obige Gleichung, Umbenennung der Variablen von $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ und $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$, sowie dem Ausnutzen der Tatsache, dass immer gelten muss $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$, erhalten wir:

$$0 = \int_V dV' \left[\phi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \epsilon_0 \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\epsilon_0} \right]$$

Die Integration des ersten Terms auf der rechten Seite gibt das Potential am Raumpunkt \mathbf{r} . Das Gesamtergebnis ergibt sich damit zu

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V dV' G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}')$$

3.8.2 Lösung ausgewählter Potentialprobleme

Die folgende Methode kann angewandt werden für stückweise konstante Ladungsverteilungen und natürliche Randbedingungen. Dazu geht man wie folgt vor:

1. Man löse die Poissongleichung in jedem Gebiet mit natürlichen Randbedingungen.
2. Man schließe die Lösung an den Grenzflächen an unter Verwendung der entsprechenden Übergangsbedingungen.

Diese Übergangsbedingungen für die Potentiale lassen sich aus denen der Felder ableiten. Für die Normalkomponente des Feldes gilt $E_n = \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_n = -\text{grad}\phi \cdot \mathbf{e}_n = -\frac{\partial\phi}{\partial n}$. Daher gilt als erste Übergangsbedingung

$$E_{n2}(\mathbf{r}) - E_{n1}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial\phi_2}{\partial n} + \frac{\partial\phi_1}{\partial n} = \frac{\eta(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

Für die zweite Übergangsbedingung betrachten wir die Kontinuität der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes. Diese lässt sich reduzieren auf die Forderung der Stetigkeit des Potentials entlang der Grenzfläche, da so auch der Gradient des Potentials stetig ist. Daher gilt als zweite Übergangsbedingung

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \phi_2(\mathbf{r})$$

Potential eines homogen geladenen unendlich ausgedehnten Zylinders Wir wollen dieses Verfahren exemplarisch auf die Berechnung des Potentials eines homogen geladenen unendlich ausgedehnten Zylinders anwenden. Dieses Problem würden wir wieder in einem problemangepassten Koordinatensystem formulieren, in diesem Falle einem zylindrischen Koordinatensystem. Zunächst müssen wir die Poissongleichung $\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$ in jedem der beiden Raumgebiete berechnen.

Im Inneren des Zylinders soll gelten $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0$. Daraus folgt

$$\Delta\phi(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\phi(r, \theta, z)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi(r, \theta, z)}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi(r, \theta, z)}{\partial z^2}$$

Die letzten beiden Terme fallen hier raus, da das System unendlich ausgedehnt in z Richtung ist; das Potential mithin invariant gegenüber Translation in diese Richtung sein muss. Jeder Punkt ist ununterscheidbar. Das gleiche gilt für die Winkelabhängigkeit. Das System ist rotationsinvariant. Daher reduziert sich das Problem zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\phi(r)}{\partial r} \right) &= -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\phi(r)}{\partial r} \right) &= -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} &= -\frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} r^2 + C_1 \\ \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} &= -\frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} r + \frac{C_1}{r} \\ \phi(r) &= -\frac{1}{4} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \end{aligned}$$

Auf Grund der Regularität der Lösung im Koordinatenursprung, fordern wir für eine physikalisch sinnvolle Lösung, dass $C_1 = 0$ ist⁷. Damit vereinfacht sich die Gesamtlösung zu

$$\phi_i(r) = -\frac{1}{4} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} r^2 + C_2 \quad \text{für } r < R$$

Im Folgenden führen wir die gleiche Rechnung noch einmal durch für den Außenraum. In diesem gilt $\rho(\mathbf{r}) = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} \right) &= 0 \\ r \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} &= C_3 \\ \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} &= \frac{C_3}{r} \end{aligned}$$

Die Gesamtlösung für den Außenraum ergibt sich damit zu

$$\phi_a(r) = C_3 \ln r + C_4 \quad \text{für } r \geq R$$

Das sind zunächst 3 Konstanten, die zu bestimmen sind. Wir haben aber nur zwei Gleichungen zu deren Bestimmung, die Übergangsbedingungen für das Potential bzw. deren Normalableitung an der Grenzfläche. Daran erkennen wir, dass das Potential nicht eindeutig bestimmt ist. Dies ist im Zweifel aber auch nicht wichtig, da das Potential selbst keine beobachtbare Größe ist, sondern nur das elektrische Feld. Dieses ergibt sich aus dem Gradienten des Potentials. Ein konstanter Offset kann daher beliebig gewählt werden. Das Potential selbst ist aber nicht eindeutig bestimmt.

Im Speziellen nehmen wir im Folgenden an, dass die Oberflächenladungsdichte verschwindet, $\eta = 0$. Die Übergangsbedingung für die Normalableitung des Potentials an der Grenzfläche lautet

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi_i(\mathbf{r})}{\partial r} \right|_R &= \left. \frac{\partial \phi_a(\mathbf{r})}{\partial r} \right|_R \\ -\frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R &= \frac{C_3}{R} \\ \rightarrow C_3 &= -\frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R^2 \end{aligned}$$

Die Forderung nach Kontinuität des Potentials an der Grenzfläche übersetzt sich zu

$$\phi_i(\mathbf{r})|_R = \phi_a(\mathbf{r})|_R$$

⁷ Beachten Sie bitte das Generische und allgemein gültige in dieser Diskussion. Sie erhalten eine mathematisch richtige Lösung aus der mathematischen Diskussion von Gleichungen, die ein konkretes Problem beschreiben sollen. Sie müssen aber anschließend diese Lösung in Bezug auf ihre physikalische Sinnhaftigkeit überprüfen und entsprechend weiter berücksichtigen oder verwerfen. Im speziellen Fall würden wir im Koordinatenursprung eine unendliche hohe Energiedichte erhalten, die nicht physikalisch ist.

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{4} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R^2 + C_2 &= -\frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R^2 \ln R + C_4 \\
 \rightarrow C_2 &= \frac{1}{4} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R^2 - \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R^2 \ln R + C_4
 \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wurde das Ergebnis für C_3 bereits eingesetzt. Setzen wir die Ergebnisse für C_2 und C_3 in die Ursprungsgleichungen ein, erhalten wir für das Potential im Innen- und im Außenraum

$$\begin{aligned}
 \phi_i(r) &= \frac{1}{4} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} (R^2 - r^2) - \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R^2 \ln R + C_4 \quad \text{für } r < R \\
 \phi_a(r) &= -\frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R^2 \ln r + C_4 \quad \text{für } r \geq R
 \end{aligned}$$

Die verbliebene Konstante C_4 ist hier an sich noch frei verfügbar. Wir können sie aber nicht benutzen, um natürliche Randbedingungen zu forcieren und das Potential im Außenraum auf null abklingen zu lassen. Dies ist nicht zu erreichen wegen der unendlich hohen Gesamtladung im System. Mathematisch würde der natürliche Logarithmus gegen unendlich divergieren. Wir fordern daher, dass das Potential beim Radius des Zylinders null sein soll [$\phi(R) = 0$] und können so die Konstante C_4 bestimmen. Die Konstante berechnet sich so zu

$$C_4 = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R^2 \ln R$$

Das Endergebnis lautet so

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} (R^2 - r^2) & r < R \\ -\frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R^2 \ln \frac{r}{R} & r \geq R \end{cases}$$

Das elektrische Feld lässt sich dann als Gradienten des Potentials berechnen zu

$$E_r(r) = -\frac{\partial \phi(r)}{\partial r} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} r & r < R \\ \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{R^2}{r} & r \geq R \end{cases}$$

Der elektrische Dipol Als zweites wichtiges Problem wollen wir uns das Potential eines elektrischen Dipols ansehen. Dies ist ein Baustein der Elektrostatik (später auch Elektrodynamik) und wird uns auf verschiedene Arten begegnen. So wird er wichtig sein, wenn wir die elektrostatischen Eigenschaften der Felder in Materie beschreiben wollen (bisher nur Vakuum). Die Wechselwirkung des elektrischen Feldes mit Materie wird zu einer Induzierung von elektrischen Dipolen führen, welche ein Feld erzeugen, dass sich mit dem anregenden überlagert. Aus dieser Superposition lässt sich anschließend effektiv die Eigenschaften der Materie als eine induzierte Dipoldichte beschreiben. Andererseits wird uns das Feld eines Dipols begegnen, wenn wir die elektrostatischen Eigenschaften von polaren Molekülen diskutieren wollen (mit einem

permanenten elektrischen Dipolmoment). Auch in der modernen Forschung spielen Dipole immer noch eine große Rolle, zum Beispiel in der Beschreibung einfacher (optischer) Antennen.

Ein Dipol besteht dabei aus einer Anordnung zweier entgegengesetzter Punktladungen im Abstand \mathbf{a} . Die Gesamtladung der Anordnung verschwindet. Das Dipolmoment der Anordnung beträgt hier

$$\mathbf{p} = q\mathbf{a}$$

Konzeptionell führt das zu einem Punktdipol. Das Potential des Punktdipols betrachten wir als den Grenzfall der Summe der Potentiale der Einzelladungen im Grenzfall einer unendlich hohen Ladung und eines unendlich kleinen Abstandes. Wir stellen dabei sicher, dass das Dipolmoment konstant und endlich bleibt.

$$\mathbf{p} = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty}} q\mathbf{a}$$

Wir berechnen zunächst das System mit einem endlichen Abstand und nehmen an, dass eine der beiden Ladungen sich im Koordinatenursprung befindet, z.B. die negative Ladung. Dann besitzen beide Ladungen das Gesamtpotential

$$\phi_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{q}{r} + \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \right)$$

Da der Abstand \mathbf{a} sehr klein ist, im Zweifel sogar gegen null gehen soll, können wir diesen zu Grunde liegenden Wurzelterm in eine Taylorreihe entwickeln

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})^2 - r^2 a^2}{r^5} + \dots$$

Dies eingesetzt in den Ursprungsausdruck für das Potential ergibt

$$\phi_D(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})^2 - r^2 a^2}{r^5} + \dots \right)$$

Wird nun im Sinne der oben formulierten Forderung nach Konstanz des Dipolmomentes bei wachsender Ladung der Abstand der Ladungen immer kleiner, so verschwindet in der Taylorreihe der Term zweiter Ordnung und auch alle höheren Terme. Das Potential des Dipols ist damit gegeben als

$$\phi_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3}$$

Unter Annahme, dass der Winkel zwischen der Dipolachse \mathbf{p} und des Koordinatenvektors \mathbf{r} gegeben ist als θ , vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\phi_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

Das Potential des Dipols fällt damit proportional zum Quadrat des Abstandes ab. Dies ist im Gegensatz zum Potential einer Ladung, welche proportional zum Abstand abklagt. Für einen beliebig gewählten Raumpunkt des Dipols (der nicht mehr mit dem Koordinatenursprung übereinstimmen muss) ergibt sich

$$\phi_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}|^3} = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \text{grad}_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}|}$$

Das elektrische Feld des Dipols berechnet sich ganz normal als Gradient des Potentials. Mit dem Dipolmoment \mathbf{p} als konstantem Vektor gilt

$$\mathbf{E}_D(\mathbf{r}) = -\text{grad}\phi_D(\mathbf{r}) = -\text{grad} \left[-\frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \text{grad} \frac{1}{r} \right]$$

Der Ausdruck lässt sich vereinfachen mittels Methoden der Vektoralgebra. Es gilt

$$\text{grad} \left(\mathbf{p} \cdot \text{grad} \frac{1}{r} \right) = (\mathbf{p} \cdot \text{grad}) \text{grad} \frac{1}{r} + \left(\text{grad} \frac{1}{r} \cdot \text{grad} \right) \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \text{rot} \text{grad} \frac{1}{r} + \text{grad} \frac{1}{r} \times \text{rot} \mathbf{p}$$

Der zweite und der vierte Term fallen hier weg, da der Gradient bzw. die Rotation des konstanten Vektors \mathbf{p} verschwinden. Der dritte Term verschwindet, da die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet. Damit bleibt nur der erste Term übrig und das elektrische Feld des Dipols kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_D(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{p} \cdot \text{grad}) \text{grad} \frac{1}{r} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{p} \cdot \text{grad}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i p_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i p_i \left(\frac{\mathbf{n}_i}{r^3} + \frac{3\mathbf{r} x_i}{r^4} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right] \end{aligned}$$

Das Feld des elektrischen Dipols fällt damit proportional zur dritten Potenz des Abstandes im Raum ab.

Das Letzte was wir ausrechnen wollen ist die Ladungsdichte eines Punktdipols. Mit der vergleichbaren Methodik wie vorher (Taylorreihenentwicklung um den Ursprung der Summe der beiden Einzelladungsdichten) ergibt sich

$$\begin{aligned} \rho_D(\mathbf{r}) &= \lim_{\substack{\mathbf{a} \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty}} \left\{ q \left[\delta \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{a}}{2} \right) - \delta \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{a}}{2} \right) \right] \right\} \\ &\approx \lim_{\substack{\mathbf{a} \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty}} \left\{ q \left[\delta(\mathbf{r}) - \text{grad}\delta(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{a}}{2} + \dots \right] - q \left[\delta(\mathbf{r}) + \text{grad}\delta(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{a}}{2} + \dots \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty}} [-q\mathbf{a} \cdot \text{grad}_r \delta(\mathbf{r})] \\
&= -\mathbf{p} \cdot \text{grad}_r \delta(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

Unter Einführung einer Dipoldichte können wir die Ladungsdichte auch noch schreiben als die Divergenz dieser Dipoldichte. Diese Ausdrücke werden uns später helfen, das elektrische Feld in Medien ausrechnen zu können. Dazu führen wir zunächst die Dipoldichte \mathbf{P} in Analogie zur Ladungsdichte ein und schreiben

$$\int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}) dV = \mathbf{p}$$

Für die Dipoldichte eines Dipols ergibt sich so

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \delta(\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}})$$

bzw. für mehrere Dipole können wir schreiben

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{p}_i \delta(\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}_i)$$

Andererseits kann die Ladungsdichte mehrerer Dipole beschrieben werden als

$$\begin{aligned}
\rho_D(\mathbf{r}) &= -\sum_i \mathbf{p}_i \cdot \text{grad}_r \delta(\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}_i) \\
&= -\text{div} \left[\sum_i \mathbf{p}_i \delta(\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}_i) \right]
\end{aligned}$$

Mit der oben genannten Definition der Dipoldichte als eine Summe von Dipolen können wir auch schreiben

$$\rho_D(\mathbf{r}) = -\text{div} \mathbf{P}(\mathbf{r})$$

Hier haben wir zum ersten Mal den Zusammenhang zwischen Ladungsdichte und Dipoldichte gefunden, welcher später wichtig sein wird bei der Betrachtung der Elektrodynamik in Medien. Mithin sehen wir hier, dass die Dipole die Quellen eines Polarisationsfeldes sind.

3.9 Multipolentwicklung des elektrostatischen Potentials

In Zusammenfassung der bisherigen Betrachtungen können wir schlussfolgern, dass die Lösung des Potentialproblems eigentlich bekannt ist.

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int_V dV' G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}')$$

Hier ist $G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ die Greensche Funktion des Freiraums. Die Gleichung ist trotzdem problematisch, denn die Integration ist kompliziert. Sie enthält den Abstand zum Ladungselement $\rho(\mathbf{r}') dV'$ und verlangt eine explizite Berücksichtigung zwischen Aufpunkt (der Punkt,

an dem wir das Potential bestimmen möchten) und dem Quellpunkt (der Ort des Ladungselementes). Bei einer sehr großen Entfernung zwischen beiden Punkten und bei einer räumlich möglichst eng begrenzten Ladungsverteilung kann postuliert werden, dass die exakten Details des Potentials nicht mehr das Wissen um jedes einzelne Ladungselement benötigen, sondern dass diese Ladungsverteilung als effektiv wahrgenommen werden kann. Diese Ladungsverteilung erzeugt ein Potential, welches erzeugt wird von einem diskreten Raumpunkt und welches kompliziert, also nichttrivial, in seiner räumlichen Verteilung ist. Dieses führt zu einer Entkopplung von Quelleigenschaften und Aufpunkt. Ziel ist weiterhin dieses Potential zurückzuführen auf bekannte Potentiale, welche analytisch gut verstanden sind. Wir werden sehen, dass dies die Potentiale der Multipolmomente der Ladungsverteilung sind. Es gibt eine diskrete Anzahl dieser Potentiale, z.B. das Monopolmoment, das Dipolmoment, das Quadrupolmoment usw. Die genauen Details dieser verbal formulierten Schritte wollen wir im Folgenden mathematisch exakt skizzieren.

Diese Diskussion in Form von Multipolmomenten ist allgemein methodisch interessant, da sie uns eine Sprache zur Verfügung stellt, komplizierte Ladungsverteilung zu diskutieren. Weiterhin erlaubt es eine Reduktion der Komplexität, da wir die Beschreibung der räumlich ausgedehnten Ladungsverteilung reduzieren können auf einige wenige Zahlen; den sogenannten Multipolmomenten. Alles was wir benötigen ist die Forderung, dass uns das Potential der Ladungsverteilung nur in großer Entfernung zu dieser Ladungsverteilung interessiert und dass diese endlich groß sein muss. Je näher wir in unmittelbarer Nähe zur Ladungsverteilung das Potential beschreiben möchten, desto ungenügender wird die Darstellung und desto mehr Entwicklungskoeffizienten benötigen wir.

Sie können diese Entwicklung in Multipolmomente auch in formaler Analogie zur Fouriertransformation betrachten. Dort werden beliebige Funktionen auf einen Satz orthonormaler Basen projiziert. In der Fouriertransformation sind das ebene Wellen. Diese sind unendliche ausgedehnt und bis auf einen Phasenfaktor translationsinvariant. In der Multipolentwicklung wähle ich ebenfalls eine Basis orthonormale Funktionen. Diese sind aber assoziiert zu einem festen Raumpunkt, dem Zentrum des Koordinatensystems bzw. der Ladungsverteilung. In diesem Raumpunkt divergieren diese Funktionen. Praktisch ist das kein Problem, da ich sowieso nur das Potential in großer Entfernung zu diesem Punkt berechnen möchte. In der Fouriertransformation müssen Sie die Amplituden der ebenen Wellen finden, welche die Entwicklungskoeffizienten der beliebigen Funktion sind. In der Multipolentwicklung einer konkreten Ladungsverteilung müssen Sie dessen Multipolmomente bestimmen. Diese sind dann die Amplituden der entsprechenden

Funktionen (den Multipolpotentialen). Superposition der ebenen Wellen gewichtet mit den Amplituden gibt das entsprechende Funktion in der Fouriertransformation. Superposition der Multipolpotentiale gewichtet mit den entsprechenden Multipolmomenten der Ladungsverteilung gibt das gesamte Potential.

Solche Betrachtungen sind nicht antiquiert, sondern spielen auch im Kontext moderner Entwicklungen der Optik und Elektrodynamik eine wichtige Rolle. Zum Beispiel können wir mit Hilfe einer Multipolentwicklung künstliche Materialien beschreiben, welche Eigenschaften besitzen, die keine natürliche Medien haben. Die Elementarbausteine dieses Metamaterialien sind die sogenannten Metaatome.

Ausgehend von diesen Grundüberlegungen, besteht die Kernaufgabe darin, die Greensche Funktion in eine Reihe für kleine Argumente \mathbf{r}' zu entwickeln und einzelne Terme individuell zu diskutieren. Da die Ladungsverteilung räumlich begrenzt ist und wir das Potential in großer Entfernung berechnen wollen, ist dieses Ansatz gerechtfertigt. Was wir eigentlich im Freiraum machen ist die Taylor Entwicklung des inversen Abstandes $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ in einer Reihe bei $\mathbf{r}' = 0$. Der hier entwickelte Ansatz unter expliziter Berücksichtigung der Greenschen Funktion ist aber universeller und allgemein gültiger, so lange die Greensche Funktion rauminvariant ist⁸. Aus dieser Rauminvarianz folgt, dass die Ableitung relativ zur ungestrichenen Koordinate identisch ist zur Ableitung relativ zur gestrichenen Koordinate, wenn wir noch einen passenden Vorzeichenwechsel in jedem Term beachten. Diesen Schritt gehen wir in der zweiten Zeile der folgenden Gleichung.

Wir schreiben also

$$\begin{aligned} G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left. \frac{\partial^l G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial x'_{k_1} \partial x'_{k_2} \dots \partial x'_{k_l}} \right|_{\mathbf{r}'=0} x'_{k_1} x'_{k_2} \dots x'_{k_l} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{\partial^l G_0(\mathbf{r})}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \dots \partial x_{k_l}} x'_{k_1} x'_{k_2} \dots x'_{k_l} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} G_{0,k_1,k_2,\dots,k_l}(\mathbf{r}) x'_{k_1} x'_{k_2} \dots x'_{k_l} \end{aligned}$$

wobei in diesen Gleichungen jedes k_i jeweils für x , y , z steht. Damit gilt für das Potential

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V dV' G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} G_{0,k_1,k_2,\dots,k_l}(\mathbf{r}) \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') x'_{k_1} x'_{k_2} \dots x'_{k_l}$$

In gewisser Weise sind in dieser Gleichung Aufpunkt und Quellpunkt schon separiert, aber noch nicht in der gewünschten Form. Idealerweise sollte der Aufpunkt explizit erscheinen und nicht in Form der Ableitung der Greenschen Funktion. Dies lässt sich aber noch verbessern. Dazu nutzen wir aus, dass der folgende Zusammenhang gilt

$$r^{2l+1} G_{0,k_1,k_2,\dots,k_l}(\mathbf{r}) x'_{k_1} x'_{k_2} \dots x'_{k_l} = (r')^{2l+1} G_{0,k_1,k_2,\dots,k_l}(\mathbf{r}') x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_l}$$

⁸ Allgemein gilt immer, dass $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r})$. Hier gilt also, dass $G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$

Die Richtigkeit dieses Zusammenhanges lässt sich zeigen, z.B. am Beispiel $l = 1$.

$$\begin{aligned} r^3 \left(\frac{1}{r} \right)_{,i} x'_i &= r'^3 \left(\frac{1}{r'} \right)_{,i} x_i \\ -r^3 \left(\frac{x_i}{r^3} \right) x'_i &= -r'^3 \left(\frac{x'_i}{r'^3} \right) x_i \\ x_i x'_i &= x'_i x_i \end{aligned}$$

Damit gilt allgemein

$$G_{0,k_1,k_2,\dots,k_l}(\mathbf{r}) x'_{k_1} x'_{k_2} \dots x'_{k_l} = \frac{(r')^{2l+1}}{r^{2l+1}} G_{0,k_1,k_2,\dots,k_l}(\mathbf{r}') x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_l}$$

Einsetzen dieses Ausdrucks in die Gleichung für das Potential ergibt

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} G_{0,k_1,k_2,\dots,k_l}(\mathbf{r}) \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') x'_{k_1} x'_{k_2} \dots x'_{k_l} \\ \phi(\mathbf{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! r^{2l+1}} x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_l} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') (r')^{2l+1} G_{0,k_1,k_2,\dots,k_l}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Q_{k_1 k_2 \dots k_l}}{l! r^{2l+1}} x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_l} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \phi_l(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Hierbei sind die Multipolmomente das erste Mal explizit eingeführt wurden. Diese sind Tensoren der Stufe l und berechnen sich zu

$$Q_{k_1 k_2 \dots k_l} = 4\pi\epsilon_0 (-1)^l \int_{V_\rho} dV' \rho(\mathbf{r}') (r')^{2l+1} G_{0,k_1,k_2,\dots,k_l}(\mathbf{r}')$$

Diese Multipolmomente charakterisieren die Ladungsverteilung. Einmal berechnet, können sie zur Berechnung des Potentials verursacht durch die Ladungsverteilung herangezogen werden, wobei hier das Potential explizit als Funktion des Aufpunktes berechnet wird. Dies ist ein großer Vorteil und eine Vereinfachung. Das entwickelte Potential ist exakt für $l \rightarrow \infty$. Die große Stärke entfaltet die Multipolentwicklung aber erst, wenn einige wenige Terme in großer Entfernung zur lokalisierten Ladungsverteilung ausreichen, das Potential hinreichend exakt auszurechnen. Das Potential ist somit vollständig abhängig von den Eigenschaften der Ladungsverteilung, den Multipolmomenten, und dem Aufpunkt. Alles, was im Folgenden geschehen, soll ist die individuelle Analyse einzelner Potentialterme und der entsprechenden Momente.

$l = 0$, Moment 0^{ter} Ordnung, \rightarrow die Ladung Betrachten wir nur den niedrigsten Term in der oben beschriebenen Entwicklung, so berechnet sich das Potential zu

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

wobei sich das Multipolmoment niedrigster Ordnung berechnet zu

$$\begin{aligned} Q &= 4\pi\epsilon_0 \int_{V_\rho} dV' \rho(\mathbf{r}') r' G_0(\mathbf{r}') \\ &= 4\pi\epsilon_0 \int_{V_\rho} dV' \rho(\mathbf{r}') r' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'} \\ &= Q \end{aligned}$$

Der erste Term ist assoziiert mit dem sogenannte Monopolmoment. Das Ladungsintegral evaluiert sich einfach zur Gesamtladung und wir benutzen

$$Q = \int_V dV' \rho(\mathbf{r}')$$

Aus sehr sehr großer Entfernung betrachtet sehen alle Potentiale gleich aus in ihrer Form; nur die Stärke ändert sich. Sie entsprechen dem Potential einer Punktladung Q im Koordinatenursprung.

$l = 1$, Moment 1^{ter} Ordnung, \rightarrow Dipolmoment Betrachten wir nur den nächst höheren Term in der oben beschriebenen Entwicklung, so berechnet sich das Potential zu

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i x_i}{r^3}$$

wobei sich das Multipolmoment erster Ordnung berechnet zu

$$\begin{aligned} Q_i &= -4\pi\epsilon_0 \int_{V_\rho} dV' \rho(\mathbf{r}') r'^3 G_{0,i}(\mathbf{r}') \\ &= -4\pi\epsilon_0 \int_{V_\rho} dV' \rho(\mathbf{r}') r'^3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r'}\right)_{,i} \\ &= \int_{V_\rho} dV' \rho(\mathbf{r}') r'^3 \frac{x'_i}{r'^3} \\ &= \int_{V_\rho} dV' \rho(\mathbf{r}') x'_i \\ &= p_i \end{aligned}$$

Hier wurde das Dipolmoment der Ladungsverteilung \mathbf{p} eingeführt, welches sich berechnet zu

$$\mathbf{p} = \int_{V_\rho} dV' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}'$$

Das Dipolmoment ist ein Vektor (Tensor 1^{ter} Stufe). Das Potential assoziiert mit diesem Term ist das Potential eines Dipols

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

Nähert man sich der Ladungsverteilung, benötigt man zusätzlich zum Punktladungspotential das Potential eines Punktdipols. Dessen Dipolmoment ist dann durch die obige Gleichung gegeben. Das Potentials

des Dipols, wie schon früher gesehen, ist indirekt proportional zum Quadrat des Abstandes. Verschwindet die Gesamtladung einer Ladungsverteilung ($Q = 0$), kann das Dipolmoment ungleich null sein; es ist dann der dominante Term in niedrigster Ordnung.

Wichtig ist hier, dass das Dipolmoment selbst vom Bezugspunkt abhängt (im Gegensatz zum Monopolmoment). Verändern wir das Koordinatensystem, in dem wir das Dipolmoment bestimmen, verändert sich dessen Stärke. Mit dem Bezugspunkt im Koordinatenursprung berechnet sich das Dipolmoment zu $\mathbf{p} = \int dV' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' = \int dQ \mathbf{r}'$, so berechnet sich das Dipolmoment in einem um \mathbf{c} verschobenen Koordinatensystem zu

$$\bar{\mathbf{p}} = \int dV' \rho(\bar{\mathbf{r}}') \bar{\mathbf{r}}' = \int dQ \bar{\mathbf{r}}' = \int dQ \mathbf{r}' - \mathbf{c} \int dQ = \mathbf{p} - \mathbf{c}Q$$

Häufig ist der Mittelpunkt der Ladungsverteilung nicht eindeutig identifizierbar bzw. mehrere Möglichkeiten können sinnvoll gewählt werden. Praktisch geht man natürlich so vor, dass ein Koordinatensystem gewählt wird, welches das Potential mit einer möglichst geringen Anzahl an Koeffizienten beschreibt. Wichtig ist in jedem Fall, dass das gesamte Potential selbst natürlich unabhängig vom gewählten Koordinatenursprung ist. Für eine unangepasste Wahl des Koordinatensystems müssen Sie nur eine ansteigende Anzahl an Multipolmomenten zu dessen Beschreibung berücksichtigen.

Man kann auch noch zeigen, dass zylindersymmetrische Ladungsverteilungen (Ladungsverteilung ist keine Funktion des Winkels Φ) nur ein Dipolmoment in Richtung der Symmetrieachse besitzen. Dazu betrachten wir das Zylinderkoordinatensystem

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} r' \cos \Phi' \\ r' \sin \Phi' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \int_{-z}^z \int_0^r \int_0^{2\pi} d\Phi' dr' dz' r' \mathbf{r}' \rho(r', z')$$

Berechnen wir jetzt einzelnen Komponenten des Dipolmomentes, so erhalten wir für einen Teil der Integrale sofort den Wert null

$$p_x \propto \int_0^{2\pi} \cos \Phi' d\Phi' = 0$$

$$p_y \propto \int_0^{2\pi} \sin \Phi' d\Phi' = 0$$

$$p_z \propto 2\pi \int_{-z}^z \int_0^r dr' dz' z' r' \rho(r', z') \neq 0$$

Nur die z-Komponente hat einen Wert ungleich null.

Weiterhin kann man zeigen, dass kugelsymmetrische Ladungsverteilungen kein Dipolmoment besitzen; und in der Tat verschwinden auch

alle höheren Momente. Dazu betrachten wir dieses mal das Kugelkoordinatensystem

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} r' \sin \theta' \cos \Phi' \\ r' \sin \theta' \sin \Phi' \\ r' \cos \theta' \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \int_0^\pi \int_0^r \int_0^{2\pi} d\Phi' dr' d\theta' \sin \theta' r'^2 \mathbf{r}' \rho(r')$$

Berechnen wir jetzt die einzelnen Komponenten des Dipolmomentes, so erhalten wir

$$p_x \propto \int_0^{2\pi} \cos \Phi' d\Phi' = 0$$

$$p_y \propto \int_0^{2\pi} \sin \Phi' d\Phi' = 0$$

$$p_z \propto \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \cos \theta' = \frac{1}{2} \sin^2 \theta' \Big|_0^\pi = 0$$

$l = 2$, Moment 2^{ter} Ordnung, \rightarrow Quadrupolmoment Betrachten wir nur den nächst höheren Term, den dritten Term, in der oben beschriebenen Entwicklung, so berechnet sich das Potential zu

$$\phi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{Q_{ij} x_i x_j}{r^5}$$

wobei sich das Multipolmoment zweiter Ordnung berechnet zu

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= 4\pi\epsilon_0 \int_{V_\rho} dV' \rho(\mathbf{r}') r'^5 G_{0,ij}(\mathbf{r}') \\ &= \int_{V_\rho} dV' \rho(\mathbf{r}') r'^5 \left(\frac{1}{r'} \right)_{,ij} \\ &= \int_{V_\rho} dV' \rho(\mathbf{r}') r'^5 \left(-\frac{x'_i}{r'^3} \right)_{,j} \\ &= \int_{V_\rho} dV' \rho(\mathbf{r}') r'^5 \left(\frac{3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}}{r'^5} \right) \\ &= \int_{V_\rho} dV' \rho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \\ &= D_{ij} \end{aligned}$$

Hier wurde das Quadrupolmoment der Ladungsverteilung $\hat{\mathbf{D}}$ eingeführt. Das Quadrupolmoment ist ein Tensor (Tensor 2^{ter} Stufe). Das Quadrupolpotential berechnet sich zu

$$\phi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{D_{ij} x_i x_j}{r^5}$$

Nähert man sich der Ladungsverteilung, benötigt man zusätzlich zum Punktladungs- und Punktdipolpotential das Potential eines Punktquadrupoles.

Beachten Sie hier bitte, dass das Quadrupolmoment ein symmetrischer Tensor 2^{ter} Stufe ist. Er ist spurfrei

$$\sum_i D_{ii} = \sum_i \int_{V_\rho} dV' \rho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_i - r'^2 \delta_{ii}) = 0$$

Er besitzt insgesamt nur 5 unabhängige Elemente

$$(D_{ij}) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & -D_{11} - D_{22} \end{pmatrix}$$

Alles zusammen kann das Potential einer beliebigen inelartigen Ladungsverteilung bei vorliegenden natürlichen Randbedingungen in eine Reihe von sog. Multipolpotentialen entwickelt werden. Bei genügend großem Abstand reichen wenige Terme zur ausreichenden Beschreibung aus. Die Eigenschaften der Ladungsverteilung bestimmen die Existenz bestimmter Multipolmomente und deren Stärke. Das Potential ergibt sich dann zu

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{D_{ij} x_i x_j}{2r^5} + \dots$$

Die hier durchgeführte Entwicklung wurde in Kartesischen Koordinaten durchgeführt. Eine alternative Entwicklung kann auch in Kugelkoordinaten durchgeführt werden. Dies ist besonders bei kugelsymmetrischen Ladungsverteilungen empfehlenswert. Hier nutzt man aus, dass die Greensche Funktion in Kugelkoordinaten entwickelt werden kann mittels

$$G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \Theta)$$

mit $\cos \Theta = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r r'}$ und den Legendreschen Polynomen $P_l(x)$ (definiert im Bereich $[-1, 1]$)

$$\int_{-1}^1 dx P_l(x) P_n(x) = \frac{2}{2n+1} \delta_{ln}$$

Die Legendreschen Polynome sind definiert als

$$P_0 = 1, P_1 = x, (l+1)P_{l+1} - (2l+1)xP_l + lP_{l-1} = 0$$

Alternativ sind sie definiert mit einer differentiellen Gleichung

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

Damit entwickelt sich das Potential mit Hilfe der folgenden Terme

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int_{V_\rho} dV' r'^l P_l(\cos \Theta) \rho(\mathbf{r}')$$

Bis zu diesem Punkt wäre es eigentlich noch nichts Neues. Die Multipolmomente wären noch nicht zu extrahieren, da in $\cos \Theta$ \mathbf{r} und \mathbf{r}' enthalten sind. Bei Problemen in Kugelkoordinaten ist es daher günstig, Kugelflächenfunktionen einzuführen. Diese können zur Darstellung der Legendreschen Polynome benutzt werden. Die Kugelflächenfunktionen sind definiert als

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right]^{1/2} P_{lm}(\cos \theta) e^{im\phi}$$

mit den zugeordneten Legendrefunktionen

$$P_{lm}(x) = \begin{cases} (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} & m > 0 \\ (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{|m|}(x) & m < 0 \end{cases}$$

Additionstheoreme können nun benutzt werden, die Legendreschen Polynome mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen zu entwickeln

$$P_l(\cos \Theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

In dieser Darstellung sind die Koordinaten getrennt voneinander. Einsetzen in die Gleichung für das Potential ergibt

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

mit den Multipolmomenten

$$q_{lm} = 4\pi \int_{V_\rho} dV' r'^l \rho(\mathbf{r}') Y_{lm}^*(\theta', \phi')$$

Hier sind dann wieder Aufpunkt und Quelle getrennt.

Ein Vergleich mit den Multipolmomenten in Kartesischen Koordinaten lässt dann auch die Bedeutung der einzelnen Terme in der Entwicklung in Kugelkoordinaten nachvollziehbar werden. Für den Entwicklungskoeffizienten mit $l = 0$ gibt es genau einen Term. Dieser entspricht dem Monopolmoment der Ladungsverteilung. Für den Entwicklungskoeffizienten mit $l = 1$ gibt es genau drei Terme. Diese entsprechen dem Dipolmoment der Ladungsverteilung. In logischer Fortsetzung entspricht der Entwicklungskoeffizient mit $l = 2$ mit 5 Termen dem Quadrupolmoment. In der Kartesischen Entwicklung gibt es scheinbar 9 Koeffizienten, aber nur 5 von diesen sind unabhängig. Der Entwicklungskoeffizient mit $l = 3$ und 7 Termen entspricht dem Oktupolmoment. Hier hätte das Kartesische Multipolmoment 27 Elemente, wovon aber wieder nur 7 voneinander unabhängig gewählt werden. Neben dieser formalen Analogie unter Betrachtung der Anzahl der freien Parameter kann man aber auch das Potential eines Beitrages in der Entwicklung in Kugelkoordinaten projizieren auf die Terme des Potentials

der gleichen Ordnung in Kartesischen Koordinaten. Diese Projektion ist eindeutig und die entsprechenden Entwicklungskoeffizienten können ineinander überführt werden.

Dies kann exemplarisch am Beispiel des Dipolmomentes gezeigt werden. Die Kugelflächenfunktionen niedrigster Ordnung lauten:

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right), \quad Y_{21} = -\sqrt{\frac{18}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}, \quad Y_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

Zusätzlich mit der Identität $Y_{lm}^* = (-1)^m Y_{l(-m)}$ folgt, dass $q_{lm}^* = (-1)^m q_{l(-m)}$ ist bzw. $q_{l(-m)} = (-1)^m q_{lm}^*$. Damit sind zumindest alle Momente bis zu den Quadrupolen definiert. Jetzt einfach alles in

$$q_{lm} = 4\pi \int_{V_\rho} dV' r'^l \rho(\mathbf{r}') Y_{lm}^*(\theta', \phi')$$

einsetzen, um die entsprechenden Koeffizienten auszurechnen. Der Monopol ausgedrückt in den Momenten in Kartesischen Koordinaten ergibt sich dann zu

$$q_{00} = \sqrt{4\pi} Q$$

Entsprechend gilt für das Dipolmoment

$$q_{10} = \sqrt{12\pi} p_z$$

$$q_{11} = \sqrt{6\pi} (p_x + ip_y)$$

$$q_{1-1} = -q_{11}^* = -\sqrt{6\pi} (p_x - ip_y)$$

Die sphärischen Dipolmomente sind damit eine Linearkombination der Kartesischen Multipolmomente. Dies gilt auch für alle höheren Multipolmomente.

3.10 Potentielle Energie, Energiedichte im Vakuum

Im Folgenden wollen wir die Arbeit ermitteln, die zum Einbringen von Ladungen Q_i [oder einer gesamten Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}_i)$] in ein elektrostatisches Feld erforderlich ist. Wir wollen somit die potentielle Energie der Anordnung berechnen, welche auch als Wechselwirkungsenergie bezeichnet wird. Wir können hierzu allgemein zwei Fälle unterscheiden. Zum einen können die Ladungen selbst das Feld aufbauen, was als innere Wechselwirkungsenergie bezeichnet wird. Zum anderen können die Ladungen in ein vorgegebenes und unveränderliches Feld eingebracht werden. Das würden wir als äußere Wechselwirkungsenergie bezeichnen. Im Folgenden betrachten wir zunächst die innere Wechselwirkungsenergie.

3.10.1 Die innere Wechselwirkungsenergie

Von früher wissen wir, dass die Arbeit um die Ladung Q von ∞ nach \mathbf{r} zu bringen genau

$$W = Q\phi(\mathbf{r})$$

beträgt. Um nun die gesamte gespeicherte Energie in einer Ladungsverteilung zu bestimmen, berechnen wir die Arbeit die notwendig ist, um diese Ladungsverteilung schrittweise aus Punktladungen aufzubauen. Dabei muss Arbeit verrichtet werden gegen das Potential, welches erzeugt wird durch alle bereits anwesenden Ladungen.

$$\begin{aligned} 1. Q_1 \rightarrow \mathbf{r}_1 & \quad \phi(\mathbf{r}_1) = 0 & \quad W_1 = 0 \\ 2. Q_2 \rightarrow \mathbf{r}_2 & \quad \phi(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} & \quad W_2 = Q_2\phi(\mathbf{r}_2) \\ 3. Q_3 \rightarrow \mathbf{r}_3 & \quad \phi(\mathbf{r}_3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|} \right] & \quad W_3 = Q_3\phi(\mathbf{r}_3) \\ i) Q_i \rightarrow \mathbf{r}_i & \quad \phi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{Q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} & \quad W_i = Q_i\phi(\mathbf{r}_i) \end{aligned}$$

Die Gesamtenergie berechnet sich aus der Summe der geleisteten Arbeiten für jede einzelne Ladung

$$W = \sum_{i=1}^N W_i = \sum_{i=1}^N Q_i\phi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{Q_i Q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

Formal können wir diese Summe symmetrisieren (beide Summen gehen bis N). Das Ergebnis müssen wir dann nur durch zwei teilen.

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{Q_i Q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

Die Wechselwirkungsenergie einer diskreten Anzahl von Ladungen kann auch ausgedrückt werden mit Hilfe der Kapazität. Hier betrachten wir erneut das Potential, gegen welches die Ladung i im Raum positioniert werden muss.

$$\phi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{Q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

Dieses kann ebenfalls geschrieben werden als

$$\phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N P_{ij} Q_j$$

ϕ_i ist das Potential am Ort der Ladung Q und P_{ij} ist eine Matrix, welche die Wechselwirkung beschreibt. Sie ist eine Dreiecksmatrix ohne Diagonale und ist abhängig von der Geometrie. Dieser Ausdruck ist formal eine Matrix multipliziert mit einem Vektor, welche wieder einen Vektor ergibt. Diese Matrix kann auch einfach invertiert werden und wir erhalten formal eine ähnliche Gleichung

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \phi_j$$

Damit erhalten wir für

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \phi_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij} \phi_i \phi_j \end{aligned}$$

wobei C_{ij} die Einträge des Kapazitätstensors sind. Für den Spezialfall $N = 1$ und $Q = C\phi$ erhalten wir

$$W = \frac{1}{2} C \phi^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

Die in einem Kondensator gespeicherte Energie ist proportional zur Ladung und indirekt proportional zur Kapazität.

Nach dieser Betrachtung diskreter Ladungen, kann der Übergang zu kontinuierlichen Ladungsverteilungen durchgeführt werden.

Energie einer Ladungswolke Ausgehend von der Wechselwirkungsenergie einer diskreten Ansammlung von Punktladungen

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{Q_i Q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

kann der Übergang zu einer kontinuierlichen Ladungsverteilung durchgeführt werden, in dem wir Q_i mit $\rho(\mathbf{r})dV$ und Q_j mit $\rho(\mathbf{r}')dV'$ assoziieren. Damit erhalten wir für die innere Wechselwirkungsenergie

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\rho} \int_{V_\rho} dV dV' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Dies ist die Arbeit zum Aufbau der Ladungswolke. Beachten Sie hier bitte, die Selbstwechselwirkungsterme sind in diesem Ausdruck enthalten, das wir nicht explizit ausgeschlossen haben, dass $i \neq j$ gelten soll. Diese Selbstwechselwirkungsterme führen bei Anwendung der obigen Gleichung auf Punktladungen zu Divergenzen, bei endlichen Ladungen ist alles o.k..

Der Aufbau einer Ladungswolke mit einer unendlich stark konzentrierten Selbstwechselwirkung der Punktladung ist ein ungelöstes Problem der klassischen Physik. Wir können diese Divergenz sehen, wenn wir von der kontinuierlichen Ladungsverteilung wieder zurück gehen auf eine Punktladung und den Formalismus der kontinuierlichen Ladungsverteilung anwenden. Die Punktladung als kontinuierliche Ladungsverteilung wird mit Hilfe der Delta-Distribution beschrieben als

$$\rho(\mathbf{r}) = Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$$

Die Wechselwirkungsenergie berechnet sich dann zu

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\rho} \int_{V_\rho} dV dV' \frac{Q^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\rho} dV \frac{Q^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1|} \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Die Gleichung verliert hier ihre Gültigkeit.

Alternative Formulierung der Energie einer Ladungswolke Die Arbeit zum Aufbauen der Ladungswolke kann auch alternativ mit Hilfe des Potentials ausgedrückt werden. Mit

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\rho} dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

erhält man

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_\rho} dV \phi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r})$$

Hier ist $\phi(\mathbf{r})$ das Potential der eigenen Ladungsverteilung. Die Integration selbst geht nur über das Raumgebiet der Ladung.

Wechselwirkungsenergie als Feldenergie Die Arbeit kann auch ausgedrückt werden mit Hilfe des elektrischen Feldes. Dafür sind einige Umformungen notwendig. Aus der Poissongleichung wissen wir, dass

$$-\epsilon_0 \Delta \phi(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \rightarrow W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_\rho} dV \phi(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r}).$$

Da $\Delta \phi(\mathbf{r}) = 0$ außerhalb der Ladungsverteilung gilt, kann das Integrationsvolumen auf den unendlichen Raum erstreckt werden. Weiterhin gilt, nach Anwendung der Regeln der Vektoralgebra, $\text{div}(\phi \text{grad } \phi) = (\text{grad } \phi)^2 + \phi \Delta \phi$. Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned}
W &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_\infty} dV \phi(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r}) \\
&= -\frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_\infty} dV \text{div}[\phi(\mathbf{r}) \text{grad } \phi(\mathbf{r})] + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_\infty} dV [\text{grad } \phi(\mathbf{r})]^2 \\
&= -\frac{\epsilon_0}{2} \int_{(V_\infty)} dV [\phi(\mathbf{r}) \text{grad } \phi(\mathbf{r})] + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_\infty} dV \mathbf{E}^2(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

Für $R \rightarrow \infty$ fällt das Potential mit $1/R$ ab, der Gradient des Potentials fällt mit $1/R^2$ ab und die Integrationsfläche wächst mit R^2 . Dadurch fällt der erste Integrand mit $1/R$ ab und strebt so gegen null. Dadurch berechnet sich die Wechselwirkungsenergie als

$$W = \int_{V_\infty} dV \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) = \int_{V_\infty} dV w(\mathbf{r})$$

Hier wurde die lokale Feldenergiedichte $w(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2(\mathbf{r})$ eingeführt. Beachten Sie hier bitte, dass die Integration über den gesamten Raum geht. Dieser Ausdruck der Energie als Funktion des Feldes ist ein

wichtiges Konzept in allen Feldtheorien. Diese sind damit von von 'Fremdkörpern' befreit und alle wichtigen Ausdrücke können nur mit Hilfe des Feldes berechnet werden.

Auch in diesen Ausdrücken ist das Problem der Selbstwechselwirkung aber noch nicht beseitigt. Man sieht leicht, dass der obige Ausdruck auf der Basis der Felder immer positiv und definit ist. Bei zwei Punktladungen mit unterschiedlichem Vorzeichen ist die Wechselwirkungsenergie aber negativ.

Zusammenfassend, und um Konfusion zu vermeiden, haben wir hier insgesamt drei äquivalente Formulierungen für die innere Wechselwirkungsenergie gefunden. Diese lauten

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\rho} \int_{V_\rho} dV dV' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{2} \int_{V_\rho} dV \phi(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}) \\ &= \int_{V_\infty} dV \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Beispiel Die Anwendung dieser Formeln sollen beispielhaft im Folgenden demonstriert werden. Dazu betrachten wir eine homogen geladene Kugel (Ladungsdichte ρ_0 , innerhalb eines Radius R). Wir berechnen zunächst die innere Wechselwirkungsenergie als eine Ladungsdichte im eigenen Potential.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_{V_\rho} dV \phi(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 \int_{V_\rho} dV \phi(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Das Potential im Kugelinernen haben wir früher bereits berechnet. Das Ergebnis war

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R^3} (3R^2 - r^2)$$

mit Q der Gesamtladung der homogen geladenen Kugel. Einsetzen in den obigen Ausdruck ergibt

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\rho_0}{2R} \int_{V_\rho} dV - \frac{\rho_0}{2R^3} \int_0^R \int_\Omega d\theta d\phi dr \sin\theta r^2 r^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3Q}{2R} - \frac{\rho_0}{2R^3} \frac{4\pi R^5}{5} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3Q}{2R} - \frac{3Q}{10R} \right] \\ &= \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

Alternativ können wir die Wechselwirkungsenergie auch als Feldenergie berechnen. Das entsprechende Feld einer homogen geladenen Kugel

haben wir ebenfalls früher bereits berechnet und können dieses jetzt verwenden. Das elektrische Feld lautete im Speziellen

$$E_i = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{e}_r = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r$$

$$E_a = \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{e}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Dieses elektrische Feld wird in die entsprechende Gleichung zur Berechnung der inneren Wechselwirkungsenergie eingesetzt und wir erhalten:

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_\infty} dV \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_I} dV \left(\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \right)^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_{V_A} dV \frac{1}{r^4} \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \int_0^R dr r^2 \left(\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \right)^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 4\pi \int_R^\infty dr r^2 \frac{1}{r^4} \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \right)^2 4\pi \frac{R^5}{5} + \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 4\pi \frac{1}{R} \\ &= \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0 \right)^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{10R} + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R} \\ &= \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

3.10.2 Die äußere Wechselwirkungsenergie zweier Ladungswolken

Bisher haben wir nur die innere Wechselwirkungsenergie betrachtet. Jetzt wollen wir die äußere betrachten, bei der wir davon ausgehen, dass eine äußere Ladungsverteilung bereits existiert $[\rho_a(\mathbf{r}')]]$ und diese ein entsprechendes elektrisches Feld $[\mathbf{E}_a(\mathbf{r})]$ bzw. ein dazugehöriges Potential $[\phi_a(\mathbf{r})]$ erzeugt. Das Einbringen von neuen Ladungen Q_i soll $\rho_a(\mathbf{r}')$ und damit $\mathbf{E}_a(\mathbf{r})$ bzw. $\phi_a(\mathbf{r})$ nicht verändern. Die Wechselwirkungsenergie zwischen den Ladungen Q_i und dem vorgegebenen Feld bzw. Potential ist dann gegeben als

$$W = \sum_i Q_i \phi_a(\mathbf{r})$$

Hier betrachten wir keine Wechselwirkung der Ladungen untereinander, sondern lediglich die Wechselwirkung zwischen den Ladungen und dem Feld. Bei dem Übergang zu einer kontinuierlichen Ladungsverteilung ergibt sich eine Wechselwirkungsenergie von

$$W = \int_{V_1} dV \rho_1(\mathbf{r}) \phi_a(\mathbf{r})$$

Beachten Sie hier bitte, dass im Vergleich zu inneren Wechselwirkungsenergie, bei der der Aufbau der Ladungswolke betrachtet wurde, der

Faktor $1/2$ weggefallen ist. Alternative Formulierungen können gefunden werden, wenn wir die Ursachen des Potentials, die Ladungsverteilung $\rho_a(\mathbf{r}')$, explizit mit berücksichtigen

$$\phi_a(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_a} dV' \frac{\rho_a(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Dann ergibt sich für die äußere Wechselwirkungsenergie

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1} \int_{V_a} dV' dV \frac{\rho_1(\mathbf{r})\rho_a(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Diese Ausdrücke beschreiben also die Wechselwirkung zwischen zwei existierenden Ladungsverteilungen. Sie beschreiben die Arbeit, die notwendig ist, um beide Ladungsverteilungen ohne Formänderung an ihre Plätze zu bringen. Im Gegensatz zur inneren Wechselwirkungsenergie können diese allgemeinen Ausdrücke auch verwendet werden, um die Wechselwirkungsenergie zwischen zwei Punktladungen zu berechnen. Mathematisch können diese erfasst werden mittels Delta-Distributionen als $\rho_1(\mathbf{r}) = Q_1\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ bzw. $\rho_a(\mathbf{r}') = Q_2\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_2)$. Eingesetzt in die obige Gleichung kann die Wechselwirkungsenergie berechnet werden zu

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

Dies ist ein uns wohl bekannter Ausdruck, der auch keine Singularitäten besitzt.

3.10.3 Die äußere Wechselwirkungsenergie einer ausgedehnten, aber eng begrenzten Ladungsverteilung mit einem äußeren Feld

Im Folgenden wollen wir in Analogie zur Multipolentwicklung vorgehen und die Wechselwirkungsenergie explizit ausrechnen unter Berücksichtigung von Multipolmomenten der Ladungsverteilung. Wir werden das anschließend noch fortsetzen und neben der Energie auch die Kraft und das Drehmoment der Ladungsverteilung im vorgegebenen Feld bestimmen. Ausgangspunkt ist die vorher gefundene Gleichung für die äußere Wechselwirkungsenergie einer Ladungswolke im äußeren Feld

$$W_r = \int_{V_1} dV' \rho_1(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \phi_a(\mathbf{r} + \mathbf{r}')$$

Wir wollen davon ausgehen, dass die Ladungsverteilung räumlich stark begrenzt ist, so dass wir das Potential in näherer Umgebung der Ladungsverteilung in eine Taylorreihe entwickeln können

$$\begin{aligned} \phi_a(\mathbf{r} + \mathbf{r}') &\approx \phi_a(\mathbf{r}) + \phi_{a,i}(\mathbf{r})x'_i + \frac{1}{2}\phi_{a,ij}(\mathbf{r})x'_i x'_j + \dots \\ &= \phi_a(\mathbf{r}) - E_{ai}(\mathbf{r})x'_i - \frac{1}{2}E_{aij}(\mathbf{r})x'_i x'_j + \dots \end{aligned}$$

Bevor wie diesen Ausdruck einsetzen, führen wir noch eine weitere Rechnung durch, welche wir benötigen, um den letzten Term dieser Reihenentwicklung durch einen weiteren Term in eine uns genehme Form zu bringen. Da $\rho_a = 0$ in V_1 ist, gilt $\frac{1}{6}r'^2 \text{div} \mathbf{E}_a = 0$. Das Feld \mathbf{E}_a hat keine Quelle in V_1 . Diese oben gewählte Form mit dem etwas komisch anmutenden Vorfaktor ist hilfreich, um den folgenden Term zu generieren, welcher ebenfalls null ist.

$$\frac{1}{6}x'_i x'_i E_{ai,i} = \frac{1}{6}x'_i x'_i E_{ai,j} \delta_{ij} = 0$$

Kombinieren wir diesen Ausdruck mit dem letzten Term der oben durchgeführten Entwicklung, erhalten wir für das Potential

$$\phi_a(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \approx \phi_a(\mathbf{r}) - E_{ai}(\mathbf{r})x'_i - \frac{1}{6} \left(3x'_i x'_j - x'_i x'_i \delta_{ij} \right) E_{ai,j} + \dots$$

Einsetzen in die Wechselwirkungsenergie ergibt

$$\begin{aligned} W_r &= \int_{V_1} dV' \rho_1(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \phi_a(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \\ &= \int_{V_1} dV' \rho_1(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \phi_a(\mathbf{r}) - \int_{V_1} dV' \rho_1(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \mathbf{r}' \cdot \mathbf{E}_a(\mathbf{r}) \\ &\quad - \frac{1}{6} \int_{V_1} dV' \rho_1(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \left(3x'_i x'_j - x'_i x'_i \delta_{ij} \right) E_{ai,j}(\mathbf{r}) + \dots \\ &= Q_{1\mathbf{r}} \phi_a(\mathbf{r}) - \mathbf{p}_{1\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_a(\mathbf{r}) - \frac{1}{6} D_{1ij\mathbf{r}} E_{ai,j}(\mathbf{r}) + \dots \end{aligned}$$

Der etwas exotische Subscript \mathbf{r} soll hier lediglich beschreiben, dass die Multipolmomente evaluiert worden sind relativ zur Koordinate \mathbf{r} .

Wir sehen physikalisch an dieser Gleichung, dass die Ladungsverteilung in Momente zerlegt werden kann und jedes dieses Momente in einer ganz spezifischen Weise mit dem Feld wechselwirkt. Das Monopolmoment (Punktladung) Q wechselwirkt mit dem Potential am Raumpunkt. Das Dipolmoment (Punktdipol) \mathbf{p} wechselwirkt mit dem elektrischen Feld am Raumpunkt und das Quadrupolmoment der Ladungsverteilung D_{ij} wechselwirkt mit der Ableitung des Feldes. Dieser Term ist daher nur nicht-null in einem räumlich inhomogenen Feld.

Perspektivisch sind diese Betrachtungen sehr wichtig, z.B. auch in der Quantenmechanik, wenn sie die Wechselwirkung eines (quantenmechanisch beschriebenen) Dipols in einem (klassisch beschriebenen) elektrischen Feld beschreiben wollen. Dort werden sie eine Hamiltonfunktion benutzen, welche die Gesamtenergie des Systems beschreibt. Die Energie durch die Wechselwirkung wird gerade genau durch den zweiten Term in der Entwicklung hier gegeben sein. Daher wollen wir uns diesen Term noch einmal genauer ansehen und kurz diskutieren, indem wir die Wechselwirkungsenergie eines Dipols im äußeren Feld beschreiben.

Für ein Dipol verschwindet zunächst einmal die Gesamtladung ($Q = 0$), weshalb die Energie eines Dipols im äußeren Feld unter

Vernachlässigung höherer Terme ⁹ gegeben ist als

$$W_D = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

Das System strebt immer einen Zustand niedrigster Energie an, weshalb der energetisch günstigster Zustand erreicht wird, wenn der Dipol parallel zum Feld ausgerichtet wird. Der Dipol wird also in das Feld gezogen. Es wird Arbeit gewonnen.

Ein interessanter und relevanter Spezialfall der Betrachtung ist die Wechselwirkung eines Dipols im Feld eines anderen Dipols; man würde das ganze als Dipol-Dipol-Wechselwirkung beschreiben. Das elektrische Feld eines Dipols lautet

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_1) - r^2\mathbf{p}_1}{r^5}$$

Die Wechselwirkungsenergie $W_{DD} = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1$ ist dann explizit gegeben als

$$W_{DD} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3\left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{p}_2\right)\left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{p}_1\right)}{r^3}$$

Die Wechselwirkungsenergie ist proportional zu $1/r^3$. Neben dem Abstand ist auch der Winkel zwischen \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 relevant. Man kann die folgenden Zusammenhänge überprüfen

$$\begin{aligned} \uparrow\uparrow & W_{DD} = W_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r^3} \\ \uparrow\downarrow & W_{DD} = -W_0 \\ \leftarrow\rightarrow & W_{DD} = 2W_0 \\ \rightarrow\rightarrow & W_{DD} = -2W_0 \end{aligned}$$

Eine antiparallel Ausrichtung ist energetisch günstiger für zwei Dipole, die nebeneinander liegen. Eine parallel Ausrichtung ist energetisch günstiger für zwei Dipole, die hintereinander liegen.

⁹ Jedes Molekül, sei es auch noch so klein, wird auch ein Quadrupolmoment besitzen (außer es ist aus Symmetriegründen null, was aber nur verlangen würde, den nächst höheren Term zu berücksichtigen), was prinzipiell höhere Korrekturterme suggerieren würde. Die Beschränkung auf den Dipol ist aber häufig völlig ausreichend; man spricht dann von der Dipolnäherung

3.10.4 Kraft auf Ladungsverteilung im äußeren Feld

Ein frei bewegliche Ladungsverteilung (charakterisiert durch eine Gesamtladung und ein Dipolmoment, auf welche wir uns hier beschränken möchten) in einem äußeren elektrischen Feld wird versuchen, seine Energie zu minimieren. Auf diese Ladungsverteilung wirkt eine Kraft, die zu einer Beschleunigung führt, die gerade dem negativen Gradienten der Wechselwirkungsenergie entsprechen wird. Die Ladungsverteilung wird ein lokales Minimum suchen, welcher einem stationären Zustand entsprechen wird. Diese Kraft wollen wir im Folgenden kurz explizit berechnen. Dazu gehen wir von der Wechselwirkungsenergie aus und berücksichtigen Terme bis zum Dipol

$$W_r = Q_{1r}\phi_a(\mathbf{r}) - \mathbf{p}_{1r} \cdot \mathbf{E}_a(\mathbf{r})$$

Die auf die Ladungsverteilung wirkende Kraft berechnet sich dann zu

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\text{grad}_r W = Q_{1r} \mathbf{E}_a(\mathbf{r}) + \text{grad} [\mathbf{p}_{1r} \cdot \mathbf{E}_a(\mathbf{r})]$$

Den letzten Term können wir ausschreiben in zwei Terme

$$\text{grad} [\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}] = \mathbf{p} \times \text{rot} \mathbf{E} + (\mathbf{p} \cdot \text{grad}) \mathbf{E}$$

wovon der erste im Rahmen der Elektrostatik verschwindet (die Wirbel des elektrischen Feldes eines zeitlich konstantem Dipolmoment einer Ladungsverteilung verschwinden). Damit berechnet sich die Kraft auf die Ladungsverteilung in Dipolnäherung zu

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \mathbf{F}_Q(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_D(\mathbf{r}) \\ &= Q_{1r} \mathbf{E}_a(\mathbf{r}) + [\mathbf{p}_{1r} \cdot \text{grad}] \mathbf{E}_a(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Die Kraft speziell auf einen Dipol lässt sich ausrechnen zu

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [\mathbf{p}_{1r} \cdot \text{grad}] \mathbf{E}_a(\mathbf{r})$$

Damit eine solche Dipolkraft wirkt, muss die Ladungsverteilung selbst ein Dipolmoment besitzen und das Feld muss inhomogen sein.

3.10.5 Drehmoment auf Ladungsverteilung im äußeren Feld

Neben einer Kraft, welche eine translatorische Bewegung verursachen wird, wird auch ein Drehmoment auf die Ladungsverteilung ausgeübt werden, welche eine rotatorische Bewegung um einen Schwerpunkt verursachen wird. Die Drehmomentdichte relativ zu einem Bezugspunkt beträgt (unter Annahme hier eines homogenen Feldes in der Ladungsverteilung)

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') &= \mathbf{r}' \times \mathbf{f}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \\ &= \mathbf{r}' \times \rho_1(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \mathbf{E}_a(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \\ &= \mathbf{r}' \times \rho_1(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \mathbf{E}_a(\mathbf{r}) \\ &= \mathbf{r}' \rho_1(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \times \mathbf{E}_a(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Das Drehmoment berechnet sich dann zu

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{r}) &= \int_{V_1} dV' \mathbf{m}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \\ &= \left[\int_{V_1} dV' \mathbf{r}' \rho_1(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \right] \times \mathbf{E}_a(\mathbf{r}) \\ &= \mathbf{p}_{1r} \times \mathbf{E}_a(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Ein Drehmoment stellt sich also nur ein für $\mathbf{p} \neq 0$. Die Gesamtladung selbst spielt hier keine Rolle. Wir beobachten, dass ein homogenes Feld den Dipol drehen würde.

4 Elektrostatik bei Anwesenheit von Leitern - das Randwertproblem

4.1 Die physikalische und mathematische Problemstellung

Bisher betrachten wir die Elektrostatik ausschließlich im Vakuum. Die Ladungen dort sind räumlich fest [beschrieben mittels $\rho(\mathbf{r})$] und führen zu einem elektrostatischen Feld $[\mathbf{E}(\mathbf{r})]$ bzw. einem damit assoziierten Potential $[\phi(\mathbf{r})]$.

Jetzt wollen wir zusätzlich zu diesem Szenario die Anwesenheit von Medien betrachten. Dies ist ungleich komplizierter, da sich alle Materialien zusammensetzen aus freien und gebundenen Ladungen, Dipolen oder auch Quadrupolen, welche ihrerseits wieder Felder erzeugen. Diese Felder wirken zurück auf die Momente und ein neues Gleichgewicht in den Feldern wird sich einstellen. Die Berücksichtigung der allgemeinen Eigenschaften von Medien führen wir in einem späteren Kapitel durch (Elektrodynamik der Kontinua). Wir konzentrieren uns daher zunächst einmal auf den Spezialfall von Leitern. In dem Leiter, welchen wir hier betrachten wollen, sind die Ladungen frei beweglich, die Gesamtladung verschwindet aber.

Ich möchte Sie gleich darauf hinweisen, dass die Betrachtung der Wechselwirkung eines elektrischen Feldes mit diesen Ladungen zu einem Widerspruch im Rahmen der Elektrostatik führt. In Anwesenheit eines elektrischen Feldes wird eine Kraft auf sich im Leiter befindlichen Ladungen ausgeübt. Dies führt zu einer Bewegung der Ladungen, welche in der Elektrostatik jedoch verboten ist. Dieser scheinbare Widerspruch kann nur aufgelöst werden, wenn der Leiter in seinem Inneren als feldfrei angenommen wird. Diese Erkenntnis führt zu einigen wichtigen Schlussfolgerungen:

- Im Leiter verschwindet das elektrische Feld, $\mathbf{E} = 0 \rightarrow \phi = \text{const.}$. Das Potential im Leiterinneren ist konstant.
- Leiteroberflächen sind daher Äquipotentialflächen.
- Wegen $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi \rightarrow \mathbf{E}$ steht senkrecht auf der Leiteroberfläche

- Feldlinien stoßen (entspringen) senkrecht in (auf) der Oberfläche und enden (beginnen) dort.
- Vermutung: Quellen und Senken des Feldes befinden sich nur auf der Leiteroberfläche

Mathematisch ausgedrückt bedeutet dies:

$$\epsilon_0 \int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = 0 \rightarrow Q_{\text{in}} = 0$$

für eine Integrationsoberfläche im Inneren des Leiters. Im Inneren eines Leiters sind daher keine Ladungen. Alle Ladungen sind an der Oberfläche lokalisiert. Diese Oberflächenladungsdichte wird beschrieben mittels $\eta(\mathbf{r})$. Bei erneuter Zerlegung des elektrischen Feldes in eine Normal- und eine Tangentialkomponente:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = E_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} + E_t(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}$$

lassen sich aus den allgemeinen Übergangsbedingungen (mit dem zusätzlichen Subscripts 'i' für innen und 'a' für außen)

$$E_{\text{an}}(\mathbf{r}) - E_{\text{in}}(\mathbf{r}) = \frac{\eta(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad \text{und} \quad E_{\text{at}}(\mathbf{r}) - E_{\text{it}}(\mathbf{r}) = 0$$

die Übergangsbedingungen an der Grenzfläche eines Leiters (Feld im Inneren verschwindet) ableiten

$$E_{\text{an}}(\mathbf{r})|_{(V)} = \frac{\eta(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad \text{und} \quad E_{\text{at}}(\mathbf{r})|_{(V)}(\mathbf{r}) = 0$$

Weiterhin gilt mit $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_a) = -\mathbf{n} \cdot \text{grad } \phi_a = -\frac{\partial \phi_a}{\partial n}$

$$\eta(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi_a(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{(V)}$$

Die Normalkomponente des elektrischen Feldes und die Normalableitung des Potentials sind unstetig an der Leiteroberfläche (vgl. Durchgang durch geladene Flächen). Die Tangentialkomponenten verschwinden an der Leiteroberfläche.

Weiterhin tritt das Phänomen der Influenz auf. Eine Ladungsdichte ρ im freien Raum ruft eine Gegenladung auf Leiteroberfläche hervor (ρ unverändert), man spricht dann von einer influenzierten Ladung.

Physikalisch kann man sich das Randwertproblem in verschiedenen Kategorien vorstellen. Verstehen Sie das bitte als verschiedene Klassen von Problemen, welche Sie sich vorgeben können.

1. Ein bestimmtes Objekt kann durch spezifiziert durch eine Gesamtladung und eine Geometrie. Dann wird sich das Potential und die Oberflächenladungsdichte auf diesem einstellen. Diese gilt es in Anwesenheit von Leitern und/oder anderen Ladungen zu berechnen.

2. Ein bestimmtes Objekt mit einer spezifischen Geometrie kann geerdet sein. Technisch stellt die Erdung eine elektrisch leitfähige Verbindung mit dem elektrischen Potential des Erdbodens dar. Sie stellt ein Referenzpotential dar. Dann wird das Potential auf der Oberfläche ebenfalls null sein; es stellt sich eine Oberflächenladungsdichte und eine Gesamtladung ein. Dies stellt sich ein, da Ladungen auf dieses mit einem festen Potential verbundenen Objekt auf und ab fließen können, je nachdem wie es benötigt wird zur Realisierung einer spezifischen Oberflächenladungsdichte. Zur vollständigen Lösung des Problems müssen Sie die Gesamtladung und die Ladungsdichte berechnen.
3. Weiterhin kann ein bestimmtes Objekt mit einer spezifischen Geometrie an eine Spannungsquelle angeschlossen sein. Diese Spannungsquelle fixiert das Potential auf der Oberfläche; es stellt sich ebenfalls eine Oberflächenladungsdichte und eine Gesamtladung ein, welche es zu berechnen gilt in Anwesenheit von anderen Leitern auf einem festen Potential und/oder Objekten mit einer vorgegebenen Gesamtladung ¹.

Bestimmung aller unbekanntenen Größen in der jeweiligen Problemklasse für gegebene Randwerte ist das Kernproblem der Elektrostatik. Mathematisch betrachtet sitzen Ladungen auf Oberflächen und als Raumladungen im Vakuum. Das Feld genügt

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

und das Potential auf der Oberfläche der verschiedenen Leiter ist konstant

$$\phi_i(\mathbf{r}) = \text{const.} \quad \text{auf } (V_i)$$

Die Lösungen hängen hier von der influenzierten Ladungen ab. Eine konsistente Lösung zu finden ist wesentlich schwieriger als im Vakuum. Die Diskussion verschiedener Ansätze zur Lösung dieses allgemeinen Problems ist Gegenstand dieses Kapitels.

¹ Unter Beachtung von Ursache und Wirkung sollte man sich merken, dass aus einer Steckdose kein Strom fließt sondern dort liegt eine Spannung an. Diese Spannung stellt eine Potentialdifferenz dar, durch welche Elektronen beschleunigt werden. Erst dann fließt ein Strom.

4.2 Berechnung der Ladungsverteilung aus dem Feld

Der einfachste Fall taucht sicherlich auf, wenn das Potential $\phi(\mathbf{r})$ im gesamten Raum bekannt ist und wir lediglich noch die dazugehörige Raumladungsdichte bzw. die Oberflächenladungsdichte ausrechnen sollen. Diese ergeben sich aus

1. $\rightarrow \rho(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \Delta\phi(\mathbf{r}) \quad \rightarrow$ Raumladungen
2. $\rightarrow \eta_i(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{L_i}$ mit $L_i = (V_i) \quad \rightarrow$ Oberflächenladung

Als einfaches Beispiel mag hier eine geladene, leitende Kugel im Vakuum dienen. Die Geometrie dieses Problems ist offensichtlich bekannt. Und auch das Potential dieser geladenen Kugel ist bekannt (frühere Betrachtungen) und berechnet sich zu

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{A}{r}$$

für Raumpunkte außerhalb der Kugel. Die Raumladungsdichte berechnet sich mit Hilfe der obigen Gleichung nach Anwenden des Laplaceoperators auf das Potential zu

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = \Delta\frac{A}{r} = 0 \quad \text{für } r \neq 0$$

Außerhalb der Kugel ($r > R$) gibt es also keine Raumladung.

Die Oberflächenladungsdichte berechnet sich zu

$$\eta(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial r} \right|_R = \epsilon_0 \frac{A}{R^2}$$

Die Gesamtladung kann dann mittels Integration der Oberflächenladungsdichte ausgerechnet werden

$$Q = \int_{(V)} \eta(\mathbf{r}) df = \epsilon_0 \frac{A}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi\epsilon_0 A$$

Die Lösung dieses Grundproblems ist offensichtlich relativ einfach. Häufig ist aber gerade das Feld/Potential im gesamten Raum nicht bekannt und man muss es gerade aus der Raumladungsdichte errechnen, bei vorgegebener Geometrie der Leiter und den entsprechenden Randwerten für das Potential. Dies werden wir im Folgenden diskutieren.

4.3 Berechnung des Feldes im Raum und der Ladungsverteilung auf den Leitern

4.3.1 Empirische Methode

In sehr einfachen Situation und mit etwas Glück können Sie das Problem durch einen empirischen Ansatz lösen. Vergleichbare Ideen werden wir später wieder begegnen, wenn wir die Methode der Spiegelladung diskutieren werden.

Bei der empirischen Methode zäumen Sie das Pferd von hinten auf. Die Grundidee ist, dass wir wissen, dass die Leiteroberflächen Äquipotentialflächen sein sollen. Man gebe sich also eine beliebige Ladungsverteilung im Vakuum vor und berechne das Feld bzw. das Potential mit einer Methode der Wahl, z.B. durch Lösen der Laplacegleichung $\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$. Das Potential und somit seine Äquipotentialflächen sind damit bekannt. Diese Äquipotentialflächen können Sie dann retrospektiv definieren als Grenzflächen von Leitern, welche ein bestimmtes

Potential auf der Oberfläche haben. Dieses soll gerade genau dem Wert der berücksichtigten Äquipotentialfläche entsprechen. Dann würden Sie wieder das gesamte Potential im Raum kennen und könnten alle abgeleiteten Größen berechnen.

Dieser Ansatz ist aber natürlich in der Praxis für viele Situationen nicht sehr hilfreich, da Sie die Geometrie nicht erst definieren möchten, wenn das Potential bekannt ist, sondern eher vorher. Daher benötigen wir eine allgemeine Lösung des Problems.

4.3.2 Lösung des Problems als Randwertaufgabe - das Randwertproblem der Elektrostatik

Formulierung des Problems Bekannt sind also die Raumladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$, die Geometrie der Leiter (Oberfläche gegeben durch L_i) und die Randwerte. Die Lösung dieses Problems kann in zwei Grundaufgaben unterschieden werden, abhängig davon, welche zusätzlichen Größen als Randwerte vorgegeben sind.

Die erste Grundaufgabe nimmt an, dass ϕ_i auf L_i gegeben ist. Das führt zu einem Dirichletproblem. In der bereits oben genannten Skizzierung der Klassen der Randwertprobleme, würde dies der zweit- und drittgenannten Klasse entsprechen. In dem einen Fall ist das Potential auf der Leiteroberfläche null. In dem anderen Fall besitzt das Potential auf der Oberfläche einen von null verschiedenen, aber vorgegebenem Wert.

Die zweite Grundaufgabe besteht darin, dass die Gesamtladung Q_i auf L_i gegeben ist (erstgenannte Art der oben genannten Klasse). Dieses Problem kann auf ein Dirichletproblem zurückgeführt werden, weshalb wir uns im Folgenden verstärkt auf die Lösung der ersten Grundaufgabe konzentrieren wollen.

In beiden Grundaufgaben muss eine Lösung der Poissongleichung

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

gefunden werden, wobei entweder ϕ_i oder Q_i auf L_i vorgegeben sein muss. Das bezeichnet man als eine Randwertaufgabe. Wir skizzieren im Folgenden Lösungsverfahren für diese beiden Grundaufgaben.

1. Grundaufgabe

Diese erste Grundaufgabe bezeichnet man als ein Dirichletproblem. Hier betrachten wir geerdete Leiter ($\phi_i = 0$) oder Leiter, die mit einer Spannungsquelle verbunden sind. Ladungen können auf- und abfließen, je nachdem wie es benötigt wird, das vorgegebene Potential sicherzustellen. Bekannt sind $\rho(\mathbf{r})$ und $\phi_i(\mathbf{r})$ auf L_i . Um alle oben genannten Größen zu erhalten, würde man algorithmisch wie folgt vorgehen:

1. Man berechnet als erstes das Potential $\phi(\mathbf{r})$
2. Man berechne als nächstes die Oberflächenladungsdichte auf den Leitern $\eta_i(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{L_i}$
3. Man berechne anschließend die Gesamtladung auf dem Leiter $Q_i = \int_{L_i} \eta_i(\mathbf{r}) df$

Beachten Sie hier bitte, dass wir im Folgenden zwei verschiedene Arten von Normalenvektoren relativ zu Oberflächen betrachten.

1. Wenn wir, wie oben, die Normalableitung relativ zu einer Leiteroberfläche berechnen (\mathbf{n}_L), zeigt dieser Normalenvektor vom Leiter weg.
2. Wir werden aber später auch verschiedene Integralsätze verwenden, in denen über das Raumgebiet außerhalb der Leiter integriert werden. Als ein Teil des Gausschen Satz können diese Volumenintegrale als Oberflächenintegrale geschrieben werden, in denen die Normalkomponente des Feldes integriert wird über die Oberfläche. In diesen Integralen zeigt der Normalenvektor dann in die Leiter hinein, da er senkrecht auf der Oberfläche des Volumens steht, über den integriert wird.

2. Grundaufgabe

Hier betrachten wir isolierte Leiter, ϕ_i und $\eta_i(\mathbf{r})$ sind nicht bekannt (wir wissen nur, dass ϕ_i konstant ist). Die Ladungen können nicht abfließen, deren Gesamtladung ist also vorgegeben. Wenn der Leiter aufgeladen ist, stellt sich zusätzlich zu $\rho(\mathbf{r})$ noch eine Oberflächenladungsdichte $\eta_i(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{L_i}$ ein; und somit auch die Normalableitung des Potentials auf der Oberfläche. Bekannt sind $\rho(\mathbf{r})$ und $Q_i = \int_{L_i} \eta_i(\mathbf{r}) df$. Um alle oben genannten Größen zu erhalten, würde man algorithmisch wie folgt vorgehen:

1. Man berechnet als erstes das Potential $\phi(\mathbf{r})$
2. Man berechne als nächstes die Oberflächenladungsdichte auf den Leitern $\eta_i(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{L_i}$
3. Man berechne anschließend das Potential auf den Leitern ϕ_i

Lösung der Randwertaufgabe der Elektrostatik mit der Methode der Greenschen Funktionen Das allgemeine Ziel besteht darin, eine Lösung der beiden Grundaufgaben für beliebige Ladungsverteilungen zu finden. Die Geometrie soll vollkommen durch die Greensche Funktion beschrieben werden. Die konkrete Aufgabe wird dann einfach durch Angabe

von $\rho(\mathbf{r})$ und den Randwerten gelöst. Die Methode ist damit sehr elegant, mächtig und universell einsetzbar. Praktisch besteht das Problem häufig darin, die passende Greensche Funktion für eine gegebene Geometrie zu finden. Wir werden im folgenden Kapitel zeigen, dass dies für einfache Geometrien mit der Methoden der Spiegelladungen möglich ist. Für komplizierte Geometrien muss man auf numerische Rechenprogramme zurückgreifen.

Daher wollen wir unser Vorgehen in zwei Schritte unterteilen. In einem ersten lösen wir das Problems für beliebige $\rho(\mathbf{r})$ und Randbedingungen unter der Annahme, dass die Greensche Funktion bekannt ist. In einem zweiten Schritt werden wir die Greensche Funktion für bestimmte Geometrien berechnen.

Allgemeine Lösung des Problems

Hier wenden wir den 2^{ten} Greenschen Satz

$$\int_{(V)} d\mathbf{f} \cdot [\phi(\mathbf{r}) \text{grad } \psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}) \text{grad } \phi(\mathbf{r})] = \int_V dV [\phi(\mathbf{r}) \Delta \psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r})]$$

an für $\psi(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ und $\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r})$, was zu

$$\int_{(V)} df' \left[\phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] = \int_V dV' [\phi(\mathbf{r}') \Delta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta' \phi(\mathbf{r}')]]$$

führt. Beachten Sie hier bitte, die gestrichene Normalenableitung zeigt in den Leiter hinein. Der gestrichene Laplaceoperator besagt, dass er auf die gestrichene Koordinate angewandt wird.

Alles was wir zusätzlich noch fordern ist, dass

$$-\epsilon_0 \Delta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

und

$$-\epsilon_0 \Delta' \phi(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}')$$

gilt. Beachten Sie hier bitte, dass die Wahl der Randbedingung zur Lösung der Poissongleichung für die Greensche Funktion die Struktur der Lösung beeinflusst. Allgemein erhalten wir aber

$$\epsilon_0 \int_{(V)} df' \left[\phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] = \int_V dV' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r})$$

Damit bekommen wir die allgemeine Lösung des Randwertproblems für das Potential

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V dV' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') - \epsilon_0 \int_{(V)} df' \left[\phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right]$$

Diese Gleichung ist gelöst, wenn die Greensche Funktion und die Randwerte (Potential und Normalableitung) bekannt sind. Dabei bezeichnet die Vorgabe des Potentials auf dem Rand $\phi_{\text{Rand}}(\mathbf{r})$ als die Dirichletsche Randbedingung. Die Vorgabe der Normalableitung des Potentials auf dem Rand $\left. \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{\text{Rand}}$ wird als die von Neumannsche Randbedingung

bezeichnet. Sind diese beiden vorgegeben, kann die Gleichung sofort gelöst werden. Allerdings ist die Gleichung dann überbestimmt. Daher wird normalerweise eine zusätzliche Forderung gestellt, so dass entweder der erste Term oder der zweite Term des zweiten Integrals verschwindet. Diese Forderung können mit geeignet gewählten Randbedingungen zur Lösung der Greenschen Funktion forciert werden.

Beachten Sie bitte, dass $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ hier für beliebige Geometrien gelten soll; im Gegensatz zur früher verwendeten Greenschen Funktion des Freiraums $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. In dieser allgemeinen Greenschen Funktion sind alle Informationen bezüglich der Geometrien enthalten. Die Randbedingung, die die Greensche Funktion genügt, sind noch nicht spezifiziert.

Die Forderungen, welche wir an $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ stellen, lautet, dass sie der folgenden Gleichung genügt

$$-\epsilon_0 \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Die allgemeine Lösung der Greenschen Funktion lautet

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

mit $\Delta F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ und den richtigen Randbedingungen.

1. Grundaufgabe (Potential auf Leiteroberfläche vorgegeben, Dirichletsches Problem)

Die Forderung, dass die Greensche Funktion als Randbedingung zur Lösung der entsprechenden Poissongleichung

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}' \in L_i} = 0$$

verschwindet, führt zu der Dirichletschen Greenschen Funktion. Dann verschwindet der zweite Term des obigen Integrals und bei Vorgabe des Potentials auf der Leiteroberfläche (Dirichletsches Problem) ist das Gesamtproblem sofort lösbar (ausrechnen des Potentials, erster Teilschritt des Lösungsalgorithmus), wenn die Greensche Funktion einmal bekannt ist. Die Lösung des Potentials ist dann

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V dV' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') - \epsilon_0 \int_{(V)} df' \phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'}$$

Die Lösung dieser Gleichung gilt für Randwertaufgaben mit beliebigem $\phi(\mathbf{r})$ auf dem Rand. Im Speziellen aber gilt für Leiter, bei denen das Potential auf der Oberfläche konstant ist

$$\phi(\mathbf{r})|_{L_i} = \phi_i = \text{constant}$$

die folgende Lösung

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V dV' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') - \sum_i \phi_i \int_{(V)} df' \epsilon_0 \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'}$$

mit der Normalableitung in den Leiter hinein. Diese Lösung lässt sich kompakter schreiben mit Hilfe der Geometriekoeffizienten $\Gamma_i(\mathbf{r})$ als

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_\rho(\mathbf{r}) + \sum_i \phi_i \Gamma_i(\mathbf{r})$$

wobei $\phi_\rho(\mathbf{r})$ das Potential der reinen Ladungsverteilung ist und der letzte Term kann verstanden werden als das Potential hervorgerufen durch induzierte Oberflächenladungen. Die Geometriekoeffizienten sind definiert als

$$\Gamma_i(\mathbf{r}) = - \int_{(V_i)} df' \epsilon_0 \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'}$$

Mit bekannter Ladungsverteilung, Greenschen Funktion und dem Potential auf der Oberfläche der Leiter ist das Problem gelöst.

Einige Bemerkungen sollen noch gemacht werden zu dieser Lösung.

- Das Potential der reinen Ladungsverteilung auf der Oberfläche des Leiters verschwindet $\phi_\rho(\mathbf{r})|_{L_i} = 0$, da die Greensche Funktion auf der Leiteroberfläche in Übereinstimmung mit den getroffenen Randbedingungen verschwindet, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r} \in L_i} = 0$. Eigentlich ist die oben gewählte Randbedingung $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}' \in L_i} = 0$, aber wir werden später zeigen, dass diese beiden Forderungen identisch sind.
- Die Geometriekoeffizienten $\Gamma_i(\mathbf{r})$ sind 1 auf dem Rand i und 0 auf dem Rand $j \neq i$.
- Der Laplaceoperator angewandt auf die Geometriekoeffizienten ist null, $\Delta \Gamma_i(\mathbf{r}) = 0$.

2. Grundaufgabe

Bei der zweiten Grundaufgabe wird die Gesamtladung auf der Oberfläche der einzelnen Leiter vorgegeben. Bekannt ist also $\rho(\mathbf{r})$ und $Q_i = \int_{L_i} \eta_i(\mathbf{r}) df$. Gesucht wird das Potential im gesamten Raum $\phi(\mathbf{r})$ und die Oberflächenladungsdichte $\eta_i(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} \Big|_{L_i}$ sowie das (konstante) Potential auf den einzelnen Leitern ϕ_i . Die Idee ist zu zeigen, dass dieses Problem auf die Lösung der 1^{ten} Grundaufgabe zurückgeführt werden kann. Diese haben wir gerade gelöst und können diese Lösung dann wiederverwenden. Wir werden im Folgenden explizit ausnützen, dass wir wissen, dass

$$Q_j = \int_{L_j} \eta_j(\mathbf{r}) df = -\epsilon_0 \int_{L_j} df \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n_j}$$

ist. Beachten Sie hier bitte, dass die Oberflächennormale aus dem Leiter heraus zeigt. Wir benutzen hier die bekannte Lösung für das Potential des ersten (Dirichletschen) Problems

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_\rho(\mathbf{r}) + \sum_i \phi_i \Gamma_i(\mathbf{r})$$

$$= \int_V dV' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \sum_i \phi_i \Gamma_i(\mathbf{r})$$

Leider ist in dieser Gleichung das Potential auf der Leiteroberfläche noch nicht bekannt. Wir versuchen daher, das Potential durch uns bekannte Größen auszudrücken

$$\begin{aligned} Q_j &= \int_{L_j} \eta_j(\mathbf{r}) df = -\epsilon_0 \int_{L_j} df \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n_j} \\ Q_j &= -\epsilon_0 \int_{(V_j)} df \frac{\partial \phi_\rho(\mathbf{r})}{\partial n_j} - \epsilon_0 \sum_i \phi_i \int_{(V_j)} df \frac{\partial \Gamma_i}{\partial n_j} \\ Q_j &= \int_{(V_j)} df \eta^{\text{ind}}(\mathbf{r}) + \sum_i \phi_i C_{ij} \\ Q_j &= Q_j^{\text{ind}} + \sum_i \phi_i C_{ij} \end{aligned}$$

Hier wurden die geometrieabhängigen Kapazitätskoeffizienten eingeführt

$$\begin{aligned} C_{ij} &= C_{ji} = -\epsilon_0 \int_{(V_j)} df \frac{\partial \Gamma_i(\mathbf{r})}{\partial n_j} \\ &= \epsilon_0^2 \int_{(V_j)} \int_{(V_i)} df df' \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'_i \partial n_j} \end{aligned}$$

. Beachten Sie bitte, in der letzten Integration zeigt die gestrichene Normalenableitung in den Leiter hinein, die ungestrichene hinaus. Weiterhin wurde die von der Raumladungsdichte abhängige induzierte Ladung

$$Q_j^{\text{ind}} = -\epsilon_0 \int_{(V_j)} df \frac{\partial \phi_\rho(\mathbf{r})}{\partial n_j} = \int_{(V_j)} df \eta^{\text{ind}}(\mathbf{r})$$

berechnet. Beide Ausdrücke können explizit berechnet werden, denn alle entsprechenden Größen sind bekannt. Wegen der endlichen Feldenergie ist C_{ij} nicht singulär und die Matrix kann entsprechend invertiert werden zu C_{ij}^{-1} . Dadurch kann die obige Gleichung umgestellt werden zur Berechnung des konstanten Potentials ϕ_i auf jeder Leiteroberfläche.

$$Q_j = Q_j^{\text{ind}} + \sum_i \phi_i C_{ij} \rightarrow \phi_i = \sum_j C_{ij}^{-1} (Q_j - Q_j^{\text{ind}})$$

Damit haben wir das Ziel erreicht. Wir haben das Potential auf der Leiteroberfläche durch bekannte Größen ausgedrückt. Mit diesem bekannten Potential auf dem Leiter können wir die vorher skizzierte Lösung des Dirichletschen Problems verwenden zur Lösung aller weiteren unbekanntenen Größen.

In all den bisherigen Ansätzen haben wir die Fragestellung auf ein Dirichletsches Problem reduziert. Dies haben wir erreicht, indem wir bei der allgemeinen Lösung durch die Forderung, dass die Greensche Funktion auf der Oberfläche der Leiter verschwindet, den zweiten

Term automatisch zu null brachten. Alternativ kann man aber auch den ersten Term der allgemeinen Lösung verschwinden lassen. Die offensichtlich Lösung wäre zu fordern, dass die Normalableitung der Greenschen Funktion verschwindet. Dies führt aber zu Inkonsistenzen bei Anwendung des Gausschen Satzes. Aus diesem kann man schlussfolgern, dass die Normalableitung nicht verschwinden darf. Die einfachste Art der Randbedingung ist die einer konstanten Normalableitung, welche invers proportional zur Oberfläche F des betrachteten Körpers ist.

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} = -\frac{1}{\epsilon_0 F}$$

Lösung der Bestimmungsgleichung für die Greensche Funktion mit dieser Randbedingung auf der Oberfläche der Leiter führt zu einem reinen von Neumann-Problem und der von Neumannschen Greenschen Funktion. Diese Randbedingung führt zu einer Unbestimmtheit im Potential bis auf eine Konstante. Dies ist aber nicht relevant, da das elektrische Feld als beobachtbare Größe davon unbeeinflusst bleibt.

Weiterhin muss immer gelten

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$$

Bestimmung der Greenschen Funktion Damit das oben beschriebene Problem vollständig gelöst werden kann, muss für jede Geometrie die Greensche Funktion bekannt sein; im Zweifel muss sie für jede Anordnung neu berechnet werden. Bisher haben wir einfach vorausgesetzt, dass diese Greensche Funktion bekannt ist. Im Zweifel brauchen wir aber einen konkreten Zugriff.

Bevor wir uns einer konkreten Methode zur Berechnung der Greenschen Funktion zuwenden, wollen wir kurz eine ihrer wichtigsten Eigenschaften besprechen, der Symmetrie bezüglich der Vertauschung der beiden Argumente. Wir haben diese Symmetrie früher bereits einmal benutzt, ohne sie aber explizit bewiesen zu haben.

Wir gehen davon aus, dass die Greensche Funktion die Lösung der folgenden Gleichung ist

$$-\epsilon_0 \Delta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

und sie zusätzlich als Randbedingung auf der Leiteroberfläche verschwindet, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}' \in L_1} = 0$. Wir behaupten also, dass folgender Zusammenhang existiert

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$$

Diese Behauptung können wir beweisen mit Hilfe des Greenschen Satz. Wir spezifizieren diesen Satz mit $\phi = G(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}})$ und $\psi = G(\mathbf{r}', \bar{\mathbf{r}})$ und

betrachten $\bar{\mathbf{r}}$ als Integrationsvariable. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_i \int_{(V_i)} d\bar{f} [G(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}) \nabla_{\bar{\mathbf{r}}} G(\mathbf{r}', \bar{\mathbf{r}}) - G(\mathbf{r}', \bar{\mathbf{r}}) \nabla_{\bar{\mathbf{r}}} G(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}})] \\ = \int_V d\bar{V} [G(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}) \Delta_{\bar{\mathbf{r}}} G(\mathbf{r}', \bar{\mathbf{r}}) - G(\mathbf{r}', \bar{\mathbf{r}}) \Delta_{\bar{\mathbf{r}}} G(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}})] \end{aligned}$$

Die linke Seite der Gleichung verschwindet, da die Greensche Funktion auf der Oberfläche des Leiters verschwinden soll und die rechte Seite vereinfacht sich durch Einsetzen der Delta-Distribution und Integration zu

$$0 = -\epsilon_0 [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}', \mathbf{r})]$$

Damit wäre die obige Behauptung bewiesen.

Methode der Spiegelladung Zur Berechnung der Greenschen Funktion verwenden wir die Methode der Spiegelladung. Die Grundidee besteht immer darin, dass wir die Greensche Funktion der Ladung im Freiraum analytisch kennen $\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)$. In der Anwesenheit eines Leiters, muss sich diese natürlich verändern. In der Spiegelladungsmethode wird nun ein weitere Ladung so innerhalb des Leiters platziert und eine geeignete Ladung so gewählt, dass an der Grenzfläche die Übergangsbedingung für die Greensche Funktion erfüllt ist und die Greensche Funktion selbst eine Lösung der entsprechenden Poisson-Gleichung ist.

Halbraum als Leiter

Im einfachsten Fall lässt sich die Methode für einen Halbraum als Leiter (metallische Wand) demonstrieren. Die Wand befindet sich in der y - z -Ebene. Wir suchen also die Greensche Funktion als Lösung der Gleichung

$$\Delta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

und welche, in unserem Falle, die Dirichletsche Randbedingung $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ für $\mathbf{r}' = \bar{\mathbf{r}}$ erfüllt, wobei $\bar{\mathbf{r}}$ ein Punkt auf der Oberfläche des Randes ist. Wegen der Symmetrie der Greenschen Funktion soll weiterhin gelten $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ für $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}$. Wir betrachten hier \mathbf{r} als Aufpunkt und \mathbf{r}' als Quellpunkt.

Wir suchen also

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

mit $\Delta F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$. Da $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ für $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}$ gelten soll, muss

$$F(\bar{\mathbf{r}}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}'|}$$

gewählt werden. Dieses Potential wird von einer negativen Scheinladung (Spiegelldung) bei \mathbf{r}'_S erzeugt. Die Forderung $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ für $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}$ wird erfüllt, wenn

$$\frac{1}{|\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}'_S|}$$

Dann ist

$$\sqrt{(x')^2 + (\bar{y} - y')^2 + (\bar{z} - z')^2} = \sqrt{(x'_S)^2 + (\bar{y} - y'_S)^2 + (\bar{z} - z'_S)^2}$$

Damit ist

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{r}'_S = \hat{\mathbf{S}}\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Mit dieser Erkenntnis um $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ lässt sich die Greensche Funktion des Halbraums aufschreiben zu

$$G_{\text{HR}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

$$G_{\text{HR}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x + x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \right]$$

mit $G_{\text{HR}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{\text{HR}}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$.

Wir wollen weiterhin die Geometriekoeffizienten $\Gamma(\mathbf{r})$ dieser Anordnung bestimmen, da diese in verschiedenen früheren Rechnung benötigt wurden. Allgemein waren diese definiert als

$$\Gamma(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \int_L df' \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'}$$

Beachten Sie bitte noch einmal, dass die gestrichenen Normalvektoren in die Leiter reinzeigen; ungestrichene zeigen aus dem Leiter heraus. Für den konkreten Fall spezifiziert sich die Ableitung der Greenschen Funktion zu

$$\frac{\partial G}{\partial n'} = - \left. \frac{\partial G}{\partial x'} \right|_{x'=0}$$

Damit berechnet sich der Geometriekoeffizient zu

$$\Gamma(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \int_L df' \left. \frac{\partial G}{\partial x'} \right|_{x'=0}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_L df' \left[\frac{(x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x + x')}{[(x + x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} \right]_{x'=0}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi} 2x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dy' dz' \frac{1}{[(x)^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{x}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} dr d\phi \frac{r}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{x}{|x|}
\end{aligned}$$

Da immer gilt, dass $x > 0$ ist, ist der Geometriekoeffizient immer eins und konstant; $\Gamma(\mathbf{r}) = 1$.

Eine Verallgemeinerung der obigen Lösung auf eine beliebige Ladungsverteilung vor einem metallischen Halbraum auf festem Potential ϕ_0 kann leicht gefunden werden durch Addition des entsprechenden Potentials

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S|} \right] + \phi_0 \\
&= \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') G_{\text{HR}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \phi_0
\end{aligned}$$

mit der Koordinate der Spiegelladung

$$\mathbf{r}'_S = \begin{pmatrix} -x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Eine weitere Frage, welche wir konkret beantworten können, betrifft die influenzierte Gesamtladung an der Oberfläche des Halbraumes. Die Oberflächenladungsdichte berechnet sich zunächst mittels

$$\eta(\mathbf{r})_{\bar{\mathbf{r}}} = -\epsilon_0 \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial n} \Big|_{x=0} = -\epsilon_0 \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

Die Ableitung des Potentials in x -Richtung ergibt sich aus $\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x}$. Eingesetzt in die obige Gleichung erhalten wir

$$\eta(\mathbf{r})_{\bar{\mathbf{r}}} = -\frac{1}{2\pi} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{x'}{[(x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Die induzierte Gesamtladung berechnet sich dann zu

$$\begin{aligned}
Q^{\text{ind}} &= \int \int dy dz \eta(\mathbf{r})_{\bar{\mathbf{r}}} = -\frac{1}{2\pi} \int \int \int dy dz dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{x'}{[(x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{2\pi}{2\pi} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{x'}{|x'|} = -Q
\end{aligned}$$

Die induzierte Gesamtladung entspricht damit der Gesamtladung, die sich vor dem Halbraum befindet. Dies ist sehr gut nachvollziehbar, berücksichtigt man die Tatsache, dass das Potential auf der Oberfläche des Leiters verschwinden soll. Eine Ladung muss induziert werden, welche das Potential der Ursprungsladung kompensieren kann.

Abschließend soll noch kurz das Potential eines Dipoles vor einem unendlich ausgedehnten Halbraum berechnet werden, der geerdet

ist. Der Dipol befindet sich am Punkt $\bar{\mathbf{r}}$. Dessen Ladungsdichte wird zunächst einmal beschrieben durch

$$\rho(\mathbf{r}') = -\mathbf{p} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}'} \delta(\mathbf{r}' - \bar{\mathbf{r}})$$

Eingesetzt in die Gleichung für das Potential mit der passenden Greenschen Funktion ergibt sich

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \mathbf{p} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}'} \delta(\mathbf{r}' - \bar{\mathbf{r}}) \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S|} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \frac{\partial \mathbf{r}'_S}{\partial \mathbf{r}'} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S(\mathbf{r}')|^3} \right] \Big|_{\mathbf{r}' = \bar{\mathbf{r}}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{p}(\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}})}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}|^3} - \frac{\mathbf{p}_S(\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}_S)}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}_S|^3} \right] \end{aligned}$$

Hier haben wir für die zweite Gleichung benutzt, dass $\int dx' f(x') \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x' - x) = -\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ ist. Für die dritte Gleichung haben wir benutzt, dass der Zusammenhang $\frac{\partial \mathbf{r}'_S}{\partial \mathbf{r}'} = \frac{\partial \hat{\mathbf{S}} \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{r}'} = \hat{\mathbf{S}}$ gilt. In dem letzten Ausdruck haben wir die folgenden Ausdrücke eingeführt: $\mathbf{p}_S = \hat{\mathbf{S}} \mathbf{p}$ und $\bar{\mathbf{r}}_S = \hat{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{r}}$.

Kugel als Leiter

Als zweites kanonisches Beispiel wollen wir einen kugelförmigen Leiter diskutieren. Auch hier suchen wir wieder die Greensche Funktion als erstes, um dann später die Geometriekoeffizienten, die Ladungsdichte und die Gesamtladung ausrechnen zu können.

Wir suchen also zunächst wieder eine Lösung zu der Gleichung

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

mit der zusätzlichen Randbedingung dass $G(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = 0$ ist. Die Symmetrieeigenschaft der Greenschen Funktion verlangt auch, dass $G(\mathbf{R}, \mathbf{r}') = 0$ gilt. Als allgemein gültigen Lösungsansatz wählen wir wieder

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

wobei $\Delta F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ gelten muss. Wir wählen wieder als Lösungsansatz für das Potential verursacht durch die Spiegelladung den folgenden funktionellen Zusammenhang

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{A}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S(\mathbf{r}')|}$$

Wir wählen das Kugelzentrum als den Koordinatenursprung und positionieren die Spiegelladung innerhalb der Kugel. Mit $|\mathbf{r}'_S| < R$ stellen wir sicher, dass $\Delta F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ immer erfüllt ist. Die Symmetrie des Problems suggeriert eine räumliche Position der Spiegelladung, welche auf der Achse zwischen Koordinatenursprung und Ladung sich befindet, $\mathbf{r}'_S = \alpha \mathbf{r}'$. Damit wären die geometrischen Details fixiert. Durch

die Forderung, dass die Greensche Funktion auf der Oberfläche null werden soll, können wir eine Bestimmungsgleichung für die Position und Ladung der Spiegelladung finden.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} + \frac{A}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'_S|} &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{R^2 + r'^2 - 2Rr' \cos \gamma}} + \frac{A}{\sqrt{R^2 + r'_S{}^2 - 2Rr'_S \cos \gamma}} &= 0 \\ \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r'^2}{R^2} - 2\frac{r'}{R} \cos \gamma}} + \frac{A}{r'_S} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{r'_S{}^2} - 2\frac{R}{r'_S} \cos \gamma}} &= 0 \end{aligned}$$

Hierbei ist γ der Winkel zwischen \mathbf{R} und \mathbf{r}' bzw. \mathbf{r}'_S . Die obige Gleichung ist für alle γ , also für die gesamte Oberfläche erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= -\frac{A}{r'_S} \rightarrow A = -\frac{r'_S}{R} \\ \frac{r'}{R} &= \frac{R}{r'_S} \rightarrow r'_S = \frac{R^2}{r'} \end{aligned}$$

gewählt wird. Hierbei gilt dann

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S| = \left| \mathbf{r} - \frac{r'_S}{r'} \mathbf{r}' \right| = \left| \mathbf{r} - \frac{r'_S R^2}{r' r'} \right| = \left| \mathbf{r} - \frac{R^2}{r'^2} \mathbf{r}' \right|$$

Damit lässt sich das Potential der Spiegelladung $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ schreiben lassen als

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{r'} \frac{1}{\left| \mathbf{r} - \frac{R^2}{r'^2} \mathbf{r}' \right|}$$

und die gesamte Greensche Funktion der Kugel ist somit

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{R}{r'} \frac{1}{\left| \mathbf{r} - \frac{R^2}{r'^2} \mathbf{r}' \right|} \right]$$

Den Nachweis bezüglich der Symmetrie der Greenschen Funktion bei Vertauschung von Quell- und Aufpunkt muss noch gezeigt werden². Für den ersten Term der Greenschen Funktion sieht man sofort, dass diese Forderung erfüllt ist. Für den zweiten Term sieht man, dass

$$\frac{R}{r'} \frac{1}{\left| \mathbf{r} - \frac{R^2}{r'^2} \mathbf{r}' \right|} = \frac{1}{\left| \frac{r'}{R} \mathbf{r} - \frac{R}{r'} \mathbf{r}' \right|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{r'^2 r^2}{R^2} + R^2 - 2r r' \cos \gamma}}$$

gilt. Da hier immer nur Produkte der beiden Radialkoordinaten auftauchen, muss die Funktion offensichtlich ebenfalls invariant sein gegenüber Vertauschung der gestrichenen und ungestrichenen Koordinaten.

Als nächstes wollen wir wieder die Geometriekoeffizienten bestimmen. Diese waren definiert als

$$\Gamma(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \int_L df' \frac{\partial G}{\partial n'}$$

² Bevor Sie postulieren, dass eine gefundene Greensche Funktion in der Tat die richtige ist, müssen Sie das immer nachweisen.

Zur Berechnung der Ableitung der Greenschen Funktion relativ zur Oberflächennormale (die in die Kugel reinzeigt in diesem speziellen Fall) benötigen wir

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n'} \right|_{r'=R} = - \left. \frac{\partial G}{\partial r'} \right|_{r'=R}$$

Mit der Greenschen Funktion

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r'^2 r^2}{R^2} + R^2 - 2rr' \cos \gamma}} \right]$$

berechnet sich die negative Ableitung in radialer Richtung zu

$$\begin{aligned} - \left. \frac{\partial G}{\partial r'} \right|_{r'=R} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r' - r \cos \gamma}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\frac{r'^2}{R^2} - r \cos \gamma}{\left(\frac{r'^2 r^2}{R^2} + R^2 - 2rr' \cos \gamma\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \Bigg|_{r'=R} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R - r \cos \gamma - \frac{r^2}{R} + r \cos \gamma}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{R^2 - r^2}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Mit diesem Ausdruck können wir nun das Oberflächenintegral lösen und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{(V)} dV' \frac{\partial G}{\partial n'} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\phi' d\gamma R^2 \sin \gamma \frac{R^2 - r^2}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{1}{2\epsilon_0 R} \int_0^\pi d\gamma \frac{R^2 (R^2 - r^2)}{rR} \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \gamma}} \\ &= -\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{R^2 - r^2}{r} \left(\frac{1}{r+R} - \frac{1}{r-R} \right) \\ &= -\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{R^2 - r^2}{r} \left(\frac{r-R - (r+R)}{r^2 - R^2} \right) \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{R}{r} \end{aligned}$$

Damit ist der Geometriekoeffizient $\Gamma(r) = \frac{R}{r}$. Der Geometriekoeffizient auf der Oberfläche der Kugel ist damit immer eins, $\Gamma(R) = 1$, und der Laplaceoperator angewandt auf den Geometriekoeffizienten für eine Koordinate größer als der Radius verschwindet, $\Delta\Gamma = 0$ für $r > R$.

Mit all diesen Ergebnissen können wir auch das Potential einer beliebigen Ladungsverteilung vor einer Metallkugel auf dem Potential ϕ_0 berechnen. Dieses ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \phi_p(\mathbf{r}) + \phi_0 \Gamma(\mathbf{r}) \\ &= \int_V dV' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \phi_0 \Gamma(r) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r'^2 r^2}{R^2} + R^2 - 2rr' \cos \gamma}} \right] + \phi_0 \frac{R}{r}$$

Der erste Term hier bezeichnet das Potential, welches direkt durch die Ladungsverteilung induziert wurde, der zweite Term ist das durch die Spiegelladung induzierte Potential. Der dritte Term ist das Eigenpotential der Kugel.

Als nächstes und in Abarbeitung der offenen Punkte, berechnen wir wieder die Oberflächenladungsdichte auf der Kugel.

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{r})_{\bar{\mathbf{r}}} &= -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_R \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \left. \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r} \right|_R - \epsilon_0 \phi_0 \left. \frac{\partial \Gamma(r)}{\partial r} \right|_R \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \left. \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r'^2 r^2}{R^2} + R^2 - 2rr' \cos \gamma}} \right] \right|_{r=R} - \epsilon_0 \phi_0 \left. \frac{\partial R}{\partial r} \frac{1}{r} \right|_{r=R} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{(r'^2 - R^2)}{R (r'^2 + R^2 - 2r'R \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\epsilon_0 \phi_0}{R} \end{aligned}$$

Der erste Term hier ist die Oberflächenladungsdichte, welche von der Raumladung beeinflusst wird. Der zweite Term ist homogen verteilt und notwendig, um das Potential auf dem gewünschten Wert konstant zu halten.

Schlussendlich wollen wir noch die Gesamtladung auf der Kugel berechnen, welche sich aus dem Integral der Oberflächenladungsdichte ergibt.

$$\begin{aligned} Q_0 &= \int_{(\text{Kugel})} df \eta(R) \\ &= \int_{(\text{Kugel})} df \left\{ \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \left[-\frac{1}{4\pi} \frac{(r'^2 - R^2)}{R (r'^2 + R^2 - 2r'R \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} \right] + \frac{\epsilon_0 \phi_0}{R} \right\} \\ &= \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \int_{(\text{Kugel})} df \left[-\frac{1}{4\pi} \frac{(r'^2 - R^2)}{R (r'^2 + R^2 - 2r'R \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} \right] + 4\pi R^2 \frac{\epsilon_0 \phi_0}{R} \\ &= -\int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{r'^2 - R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\gamma R \sin \gamma \frac{1}{(r'^2 + R^2 - 2r'R \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} + 4\pi R^2 \frac{\epsilon_0 \phi_0}{R} \\ &= -\int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{r'^2 - R^2}{4\pi} 2\pi R \int_0^\pi d\gamma \frac{-1}{r'R} \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{1}{\sqrt{r'^2 + R^2 - 2r'R \cos \gamma}} + 4\pi \epsilon_0 \phi_0 R \\ &= -\int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{r'^2 - R^2}{2} \frac{1}{r'} \left[\frac{1}{r' - R} - \frac{1}{r' + R} \right] + 4\pi \epsilon_0 \phi_0 R \\ &= -\int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{R}{r'} + 4\pi \epsilon_0 \phi_0 R \\ &= Q^{\text{ind}} + Q^{\phi_0} \end{aligned}$$

Der zweite Term kann zusammengefasst werden zu $Q^{\phi_0} = C\phi_0$, wobei die Kapazität der Kugel gegeben ist durch $C = 4\pi\epsilon_0 R$

Die längliche Rechnung wird anschaulich, wenn man sie einfach einmal spezifiziert für eine Punktladung q bei \mathbf{r}_0 . Die Ladungsdichte wird beschrieben als $\rho(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)$. Die Gesamtladung auf der Kugel ist dann

$$Q_0 = -q\frac{R}{r_0} + 4\pi\epsilon_0\phi_0 R$$

wobei der erste Term der Beitrag der Spiegelladung zur Gesamtladung ist.

Bisher haben wir uns immer auf die erste Grundaufgabe beschränkt. Wir möchten daher auch kurz die gleiche Geometrie betrachten, aber für die zweite Grundaufgabe, bei der die Gesamtladung Q_0 auf der Kugel vorgegeben sein soll. Dazu müssen wir zunächst das konstante Potential auf der Kugeloberfläche ausrechnen. Mit der allgemeinen Formel

$$\phi_i = \sum_j C_{ij}^{-1} (Q_j - Q_j^{\text{ind}})$$

wird für einen Leiter einfach nur

$$\phi_0 = \frac{1}{C} (Q_0 - Q^{\text{ind}})$$

Die Größe Q_0 soll vorgegeben sein und Q^{ind} haben wir gerade berechnet. Um weiter zu kommen, müssen wir den entsprechenden Kapazitätskoeffizienten der Kugel ausrechnen (ok, wir haben diese bereits gerade formal bestimmt, möchten das hier aber noch einmal explizit durchführen).

$$C_{ij} = -\epsilon_0 \int_{(V_j)} df \frac{\partial \Gamma_i(\mathbf{r})}{\partial n_j}$$

$$C_{\text{Kugel}} = -\epsilon_0 \int_{(\text{Kugel})} df \frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{r} \Big|_R = -\epsilon_0 4\pi R^2 \left(-\frac{R}{R^2} \right) = 4\pi\epsilon_0 R$$

Dies ist die Kapazität einer perfekt leitenden Kugel mit dem Radius R . Daraus folgt, dass

$$\phi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} (Q_0 - Q^{\text{ind}})$$

Damit können wir auch eine explizite Gesamtlösung für das Potential einer Kugel mit einer Gesamtladung von Q_0 angeben.

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \phi_\rho(\mathbf{r}) + \phi_0\Gamma(\mathbf{r}) = \int_V dV' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \phi_0\Gamma(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r'^2 r^2}{R^2} + R^2 - 2rr' \cos \gamma}} \right] + \frac{1}{r} (Q_0 - Q^{\text{ind}}) \right\} \end{aligned}$$

$$= \int_V dV' G_K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{r} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r'}$$

Als eine letzte Verkomplizierung, und um die Kugel abschließen zu können, wollen wir im Folgenden eine leitende Kugel auf einem festen Potential ϕ_0 in einem homogenen elektrischen Feld betrachten. Um dieses Problem zu lösen, benutzen wir die vorher gefundene Greensche Funktion der Kugel. Die Frage ist vielmehr, wie können wir auf eine einfache Art das konstante elektrische Feld beschreiben, in dem sich die Kugel befinden soll. Die Idee dazu wäre, dass wir das elektrische Feld beschreiben mittels zwei unendlich entfernten gegensätzlichen Punktladungen. In einer zentralen Position zwischen den beiden Ladungen werden diese in ausgezeichneter Näherung ein konstantes elektrisches Feld erzeugen. Wir betrachten also die folgende Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}') = q [\delta(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_1) - \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1)]$$

wobei hier aber $\mathbf{r}_1 \rightarrow \infty$ gehen soll und auf der z -Achse liegt. Es gilt also

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Bevor uns dem eigentlichen Problem zuwenden, wollen wir kurz das elektrische Feld dieser Ladungsanordnung berechnen. Wir haben postuliert, dass die Punktladungen ein homogenes Feld erzeugen. Wie sieht also nun genau \mathbf{E}_0 aus von zwei Punktladungen bei $z = 0$ und wenn $|z_1| \rightarrow \infty$ gilt. Beachten Sie bitte, hier betrachten wir das Problem noch ohne die Kugel.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r} = 0) &= -\text{grad}\phi(\mathbf{r})_{\mathbf{r}=0} = -\text{grad} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} + z_1 \mathbf{e}_z|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - z_1 \mathbf{e}_z|} \right) \Big|_{\mathbf{r}=0} \\ E_0 \mathbf{e}_z &= -\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial z_1} \mathbf{e}_z = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z_1}{z_1^3} \mathbf{e}_z = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z_1^2} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Hier fordern wir jetzt lediglich, dass $z_1 \rightarrow \infty$ und $q \rightarrow \infty$, und zwar gerade so, dass der Quotient $E_0 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 z_1^2}$ konstant gehalten wird. In allen anderen Situationen würde das Feld verschwinden bzw. divergieren, was wir beides nicht wollen. Damit haben wir nun ein konstantes Feld mit diesen beiden Ladungen erzeugt. Jetzt können wir auch die Kugel berücksichtigen und die entsprechenden Spiegelladungen mit beschreiben.

Das Potential berechnet sich durch konkrete Anwendungen früherer Ausdrücke zu

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{z_1^2 + r^2 + 2rz_1 \cos \gamma}} - \frac{1}{\sqrt{z_1^2 + r^2 - 2rz_1 \cos \gamma}} \right]$$

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{z_1} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{R^4}{z_1^2} + r^2 + 2\frac{R^2 r}{z_1} \cos \gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{R^4}{z_1^2} + r^2 - 2\frac{R^2 r}{z_1} \cos \gamma}} \right] + \phi_0 \frac{R}{r} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z_1} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{z_1^2} + 2\frac{r}{z_1} \cos \gamma}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{z_1^2} - 2\frac{r}{z_1} \cos \gamma}} \right] \\ &\quad - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{z_1 r} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{R^4}{z_1^2 r^2} + 1 + 2\frac{R^2}{z_1 r} \cos \gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{R^4}{z_1^2 r^2} + 1 - 2\frac{R^2}{z_1 r} \cos \gamma}} \right] + \phi_0 \frac{R}{r} \end{aligned}$$

Da $\frac{r}{z_1} \ll 1$ und $\frac{R}{z_1} \ll 1$ gilt, können wir die entsprechenden Wurzelausdrücke bis zur 1^{ten} Ordnung entwickeln $\left(\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} \approx 1 - \frac{\epsilon}{2}\right)$ und entsprechend einsetzen.

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{z_1} \left(-2\frac{r}{z_1} \cos \gamma \right) + \frac{R}{z_1 r} 2\frac{R^2}{z_1 r} \cos \gamma \right] + \phi_0 \frac{R}{r} \\ &= -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 z_1^2} \left(r \cos \gamma - \frac{R^3}{r^2} \cos \gamma \right) + \phi_0 \frac{R}{r} \\ &= -E_0 \left(z - \frac{R^3}{r^3} z \right) + \phi_0 \frac{R}{r} \\ \phi(\mathbf{r}) &= -E_0 z + \phi_0 \frac{R}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_z z}{r^3} \end{aligned}$$

Hier wurde das Dipolmoment $\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0 \mathbf{e}_z$ eingeführt und $E_0 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 z_1^2}$ definiert. Die einzelnen Terme lassen sich nun physikalisch sehr schön interpretieren. Der erste Term ist das Potential eines homogenen elektrischen Feldes. Der zweite Term ist das Potential der homogen geladenen Kugel. Und der dritte Term ist das Potential eines Dipols im Koordinatenursprung, was nicht anderes ist als das Potentials des Dipols aus den Spiegelladungen.

Wir können auch hier wieder die Ladung auf der Oberfläche ausrechnen

$$\begin{aligned} \eta(R) &= -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial r} \right|_R = \epsilon_0 \left(E_0 \cos \gamma + \frac{\phi_0}{R} + 2E_0 \cos \gamma \right) \\ &= \epsilon_0 \left(3E_0 \cos \gamma + \frac{\phi_0}{R} \right) \end{aligned}$$

Der erste Term sind die Oberflächenladungen induziert durch das äußere Feld. Der zweite Term ist eine homogene Verteilung durch das vorgegebene Potential, auf dem die Kugel sich befinden soll.

Die Gesamtladung kann ausgerechnet werden durch die Integration der Oberflächenladungsdichte

$$Q = \int_{(\text{Kugel})} d f \eta(R) = 4\pi\epsilon_0 R \phi_0 + \epsilon_0 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\gamma d\phi \sin \gamma R^2 3E_0 \cos \gamma$$

$$= 4\pi\epsilon_0 R\phi_0$$

Wir können als letztes noch explizit das Potential angeben im Rahmen der zweiten Grundaufgabe. Im Rahmen dieser zweiten Grundaufgabe ist die Gesamtladung auf der Kugeloberfläche Q_0 vorgegeben. Da $Q_0 = C\phi_0 + Q^{\text{in}} = C\phi_0$ beträgt, folgt

$$\rightarrow \phi_0 = \frac{Q_0}{C} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \rightarrow \phi_0 \Gamma(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Damit ergibt sich für das Potential

$$\phi(\mathbf{r}) = -E_0 z + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_z z}{r^3}$$

Dies ist das gleiche Ergebnis wie vorher bereits allgemein berechnet, nur mit einem ganz konkreten Q_0 eingesetzt.

Raumladungsfreie Probleme - die Kapazität Im Folgenden wollen wir uns noch einem speziellen Aspekt widmen, der Diskussion von raumladungsfreien Problemen. Bei diesen ist also $\rho(\mathbf{r}) = 0$ und das Potential im gesamten Raum wird bestimmt durch die geometrische Anordnung der Leiter im Raum und dem Potential, auf dem diese sich befinden. Es gilt also

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_i \phi_i \Gamma_i(\mathbf{r})$$

mit

$$\Gamma_i(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \int_{(V_i)} df' \frac{\partial G}{\partial n'_i}$$

und es gilt für die Gesamtladung auf den Leitern

$$Q_j = \sum_i C_{ji} \phi_i$$

mit

$$C_{ji} = C_{ij} = -\epsilon_0 \int_{(V_j)} df \frac{\partial \Gamma_i(\mathbf{r})}{\partial n_j} = \epsilon_0 \int_{(V_i)} \int_{(V_j)} df df' \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'_i \partial n_j}$$

Beachten Sie bitte wieder: gestrichener Normalenvektor zeigt in den Leiter hinein, der ungestrichene Normalenvektor zeigt aus dem Leiter hinaus. Falls die Greensche Funktion eines konkreten Problems bekannt ist, sind dies auch die Geometrieoeffizienten und die entsprechenden Kapazitätskoeffizienten. Die beiden Grundaufgaben können gelöst werden. Bei Vorgabe des festen Potentials auf der Oberfläche jedes einzelnen Leiters kann das Potential im gesamten Raum und die Gesamtladung mit den oben dokumentierten Gleichungen ausgerechnet werden. Für das zweite Grundproblem, in dem die Gesamtladung Q_j jedes Leiters vorgegeben ist, kann man das entsprechende Potential

des Leiters ausrechnen durch $\phi_i = \sum_j C_{ij}^{-1} Q_j$ und anschließend wieder das Potential wie beim ersten Grundproblem ausrechnen. Dieses Vorgehen soll im Folgenden an Hand ausgewählte Beispiele demonstriert werden.

Beispiel 1: 2 Leiter

Für zwei Leiter konkretisieren sich die obigen Formeln zu

$$Q_1 = C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2$$

$$Q_2 = C_{21}\phi_1 + C_{22}\phi_2$$

Hier versteht man den Diagonalterm in der Kapazitätsmatrix als die Eigenkapazität des entsprechenden Leiters, die Außerdiagonalelemente bezeichnen die Kapazität der Anordnung. Sie sind ein Maß für die Größe der induzierten Ladung eines Leiters, z.B. 2, auf einem anderem Leiter, z.B. 1.

Für zwei beliebige Leiter, die räumlich lokalisiert sind, lassen sich folgende Aussagen treffen. Unter der Annahme, dass wir eine Oberfläche finden können, welche die Oberfläche der beiden Leiter einschliesst, z.B. ein Koaxialkabel, können wir den Gaußschen Satz anwenden

$$\epsilon_0 \int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = 0 = Q_1 + Q_2 \rightarrow Q_1 = -Q_2$$

Das Feld verschwindet natürlich im Leiter und die eingeschlossene Ladung entspricht der Gesamtladung auf der Oberfläche der beiden Leiter. Dann muss aber auch gelten

$$(C_{11} + C_{21})\phi_1 + (C_{12} + C_{22})\phi_2 = 0$$

Da das Potential, auf dem sich die beiden Leiter befinden können, komplett frei ist, müssen folgende Gleichungen individuell gelten.

$$C_{11} + C_{21} = 0$$

$$C_{12} + C_{22} = 0$$

Da aber die Greensche Funktion invariant gegenüber Vertauschung ihrer Argumente ist, muss $C_{21} = C_{12} \equiv -C$. Daraus folgt

$$C_{11} = C_{22} = -C_{12} = C$$

Damit können wir einen allgemeinen Ausdruck für die Kapazität der Anordnung finden

$$Q_1 = C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2 = C(\phi_1 - \phi_2) \rightarrow C = \frac{Q_1}{(\phi_1 - \phi_2)}$$

Die Kapazität einer Anordnung von zwei Leitern ist damit proportional zur Ladung auf deren Oberfläche und indirekt proportional zur Potentialdifferenz.

Wir können exemplarisch hier die Kapazität eines Plattenkondensators einmal berechnen. Wir betrachten den Fall, dass das Potential beiden Platten bekannt ist, welche sich im Abstand d zueinander befinden. Wir nehmen an, dass die Fläche des Plattenkondensators sehr groß ist und betrachten ihn formal als unendlich ausgedehnt mit einer Fläche F . Dann gilt $\phi(0) = \phi_1$ und $\phi(d) = \phi_2$. Zum Bestimmen des Potentials müssen wir die 1D Laplace Gleichung lösen (wir betrachten keine externe Ladungen).

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = 0 \rightarrow \phi(x) = Ax + B$$

Mit den beiden Randbedingungen $\phi_1 = B$ und $\phi_2 = Ad + B$ folgt

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{\phi_2 - \phi_1}{d}x + \phi_1 = \phi_1 \left(1 - \frac{x}{d}\right) + \phi_2 \frac{x}{d} = \phi_1 \Gamma_1(x) + \phi_2 \Gamma_2(x) \\ \Gamma_1(x) &= 1 - \frac{x}{d} \rightarrow \Gamma_1(0) = 1, \Gamma_1(d) = 0 \\ \Gamma_2(x) &= \frac{x}{d} \rightarrow \Gamma_2(0) = 0, \Gamma_2(d) = 1\end{aligned}$$

Die Kapazität berechnet sich dann zu

$$C = C_{11} = -\epsilon_0 \int_{(1)} df \left. \frac{\partial \Gamma_1(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \epsilon_0 \frac{F}{d}$$

Die anderen Kapazitätskoeffizienten ergeben sich aus den obigen Beziehungen ($C_{21} = C_{12} = -C$ und $C_{22} = C$) bzw. aus einer analogen Berechnung über den Geometriefaktor.

Beispiel 2: Kugelkondensator

Als zweites Beispiel betrachten wir einen Kugelkondensator. Dieser ist beschrieben durch zwei kugelförmige Leiteroberflächen, zwischen denen sich ein Vakuum befindet. Der innere Radius ist R_1 , der äußere Radius ist R_2 und wir fixieren hier das Potential, auf dem sich die Leiter befinden. Wir betrachten den Fall, dass das Potential auf dem äußeren Leiter verschwindet ($\phi_2 = 0$), auch wenn dies nicht notwendigerweise angenommen werden muss. Wir suchen das Potential im Raumbereich $R_1 < r < R_2$. Die Lösung der Laplace Gleichung lautet

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= \frac{A}{r} + B \rightarrow \phi_1 = \frac{A}{R_1} + B \text{ und } \phi_2 = \frac{A}{R_2} + B \\ B &= -\frac{A}{R_2} \rightarrow A = -\phi_1 \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \text{ und } B = \phi_1 \frac{R_1}{R_1 - R_2}\end{aligned}$$

Die Lösung lässt sich zusammenfassend schreiben als

$$\phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \phi_1 \frac{R_1}{R_2 - R_1} \left(\frac{R_2}{r} - 1 \right) & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \phi_1 & r \leq R_1 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

Diese Lösung des Potential hilft wieder, den Geometriekoeffizient zu bestimmen

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_1 \Gamma_1(r) \rightarrow \Gamma_1(r) = \frac{R_1}{R_2 - R_1} \left(\frac{R_2}{r} - 1 \right) \rightarrow \Gamma_1(R_1) = 1, \Gamma_1(R_2) = 0$$

Die Kapazität berechnet sich als

$$C = C_{11} = -\epsilon_0 \int_{(V_1)} d\Omega R_1^2 \frac{\partial \Gamma_1(r)}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = -\epsilon_0 4\pi R_1^2 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left(-\frac{1}{R_1^2} \right) = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Mit einer ähnlichen Rechnung kann man zeigen, dass $C_{12} = -C$ ist.

Die gespeicherte Ladung ist

$$\begin{aligned} Q_1 &= C\phi_1 = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \phi_1 \\ Q_2 &= -C\phi_1 = -Q_1 \end{aligned}$$

4.4 Energie und Kräfte

4.4.1 Energie

Im Vakuum haben wir früher bereits einmal die in einer Ladungsverteilung gespeicherte Energie berechnet. Da das gesamte Potential im Raum nur durch diese Ladungen verursacht wird, erhielten wir für die Energie

$$W = \frac{1}{2} \int_V dV \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r})$$

In der Anwesenheit von Leitern müssen wir zusätzlich jetzt noch die Oberflächenladungsdichte berücksichtigen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V dV \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \sum_i \phi_i \int_{L_i} \eta_i(\mathbf{r}) df_i \\ &= \frac{1}{2} \int_V dV \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \sum_i \phi_i Q_i \end{aligned}$$

wobei $Q_i = Q_i^{\text{ind}} + \sum_j \phi_j C_{ji}$ entspricht, die Selbstwechselwirkungsterme sind also enthalten. Die Bedeutung dieser Energie ist die gleiche wie früher. Sie entspricht der Arbeit, die notwendig ist, um die Ladungsverteilung aufzubauen.

Im Rahmen der ersten Grundaufgabe, in der das Potential auf der Leiteroberfläche vorgegeben ist, können wir die Energie explizit ausdrücken mittels

$$W = \frac{1}{2} \int_V dV \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \sum_i Q_i^{\text{ind}} \phi_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j C_{ij} \phi_i \phi_j$$

Im Rahmen der zweiten Grundaufgabe, in der die Ladung auf der Leiteroberfläche vorgegeben ist als Q_i , können wir die Energie ausdrücken

mit dem Potential auf der Leiteroberfläche

$$\phi_i = \sum_j C_{ij}^{-1} (Q_j - Q_j^{\text{ind}})$$

zu

$$W = \frac{1}{2} \int_V dV \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j C_{ij}^{-1} (Q_j - Q_j^{\text{ind}}) Q_i$$

Die Energie ist eine quadratisch Funktion als Funktion des Potentials bzw. als Funktion der Ladungen, wenn die beiden Gleichungen für die entsprechenden Grundaufgaben spezifiziert werden für raumladungsfreie Probleme. In diesem Falle würde die Raumladungsdichte verschwinden.

4.4.2 Kraft auf Ladungsverteilung

Allgemein gibt es hier nichts spezielles zu sagen. Die Kraft wird wie immer ausgedrückt über den Gradienten der Energie

$$\mathbf{F} = -\text{grad}W$$

Beachten Sie aber bitte wieder das besondere in der Anwendung der obigen Ausdrücke auf Punktladungen. Dort führen die Terme, welche die Selbstwechselwirkung beschreiben, wieder zu Divergenzen. Betrachten Sie als Beispiel dazu eine Punktladung vor einem geerdeten Halbraum, also einem verschwindenden Potential auf der Leiteroberfläche. Die Ladungsdichte wird beschrieben als

$$\rho(\mathbf{r}) = Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

Mit den entsprechenden Ergebnissen aus diesem Kapitel können wir das Potential hinschreiben zu

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0s}|} \right]$$

wobei Ladung und Spiegelladung an den folgenden Raumpunkten sich befinden sollen

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} -x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_{0s} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

Die Energie berechnet sich dann zu

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0s}|} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{0s}|} \right] \end{aligned}$$

Der erste Term beschreibt hier wieder die Selbstwechselwirkung. Dieser divergiert und wir wollen ihn daher nicht weiter betrachten. Die

Wechselwirkungsenergie, also die Energie gespeichert durch die Wechselwirkung der Ladung mit seiner Spiegelladung, ist gegeben durch

$$W_{\text{WW}} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2|x_0|} = -\frac{1}{16} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x_0|}$$

Die Wechselwirkungsenergie ist also kleiner als null und wird vor allem stärker negativ, wenn der Abstand kleiner wird. Das heißt es wird Arbeit gewonnen. Die Ladung würde sich also durch seine eigene induzierte Spiegelladung anziehen.

5 Elektrostatik in Dielektrika

5.1 Die dielektrische Polarisierung

Bisher haben wir ausschließlich Elektrostatik im Vakuum betrachtet. Dies ist natürlich völlig unbefriedigend. Unsere Natur besteht aus mehr als nur aus Vakuum. In einfachster Näherung können wir uns Materie vorstellen als aufgebaut aus Atomen. Diese Atome können durch äußere Felder polarisiert werden. Darunter würde man die räumliche Trennung von positiven und negativen Ladungen verstehen, welche zusammen einen Dipol darstellen. Dieser induzierte Dipol erzeugt ein neues elektrisches Feld, welches sich überlagert mit dem ursprünglichen Feld, und so auf dieses wieder zurück wirkt. Dadurch verändern sich wiederum die induzierten Dipole. Dies ist ein kompliziertes Problem, welches eine selbstkonsistente Lösung der Maxwell'schen Gleichungen verlangt. Im Gegensatz zu den Ladungen in Leitern sind jedoch diese polarisierbaren Atome nicht mehr frei beweglich, sondern fest im Raum.

Experimentell kann man sich dem Phänomen nähern, wenn man die Kapazität eines Plattenkondensators misst, wenn man in diesen ein dielektrisches Material einbringt. Der Ausdruck Dielektrika wird hier als Synonym zu einem nicht leitenden Material verwendet. Insbesondere stellt man fest, dass die Kapazität wächst. Die Änderung der Kapazität hängt dabei vom Material ab. Die Kapazität des Plattenkondensators haben wir früher bereits berechnet. Diese ergibt sich zu

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi}$$

Da die Ladung auf der Kondensatoroberfläche konstant bleibt und nicht abfließen kann, muss die Potentialdifferenz kleiner werden, mithin wird auch das elektrische Feld kleiner.

Zur Beschreibung dieses Effektes betrachten wir phänomenologisch die Materie als aufgebaut aus Atomen mit einem positiv geladenen unbeweglichen Kern und einer schwach auslenkbaren negativen Ladung. Insgesamt herrscht Ladungsneutralität, die Anzahl der positiven und negativen Ladungen sollen also gleich groß sein. Durch ein elektrisches Feld wird die positive von der negativen Ladung räumlich

getrennt, sie werden separiert. Durch diese räumliche Trennung werden Dipole induziert. Die induzierte Polarisationsladungsdichte ist die Quelle eines neuen Feldes, der Polarisation. Insgesamt werden aber Ladungen weder zu- noch abgeführt. Die gesamte Polarisationsladung muss als verschwinden. Obwohl diese gesamte Polarisationsladung verschwindet, wird jedoch lokal eine endliche Polarisationsladungsdichte auftreten, wo die Divergenz der Polarisation ungleich null ist. Dies ist z.B. auf der Oberfläche des Dielektrika der Fall. Zusammen mit der externen Oberflächenladungsdichte auf der Leiteroberfläche des Plattenkondensators, sind das dann die Quellen und Senken des elektrischen Feldes. Im Gegensatz zum Leiter, der feldfrei sein soll, befindet sich im Inneren des Dielektrikum aber nun ein elektrisches Feld.

Eine mathematische Beschreibung aller beteiligter Ladungen in diesem Prozess würde aber jenseits dessen liegen, was möglich ist. Die Dichte der Ladungen entspricht ungefähr 10^{23} pro cm^3 . Das können wir mikroskopisch nicht mehr exakt diskutieren. Stattdessen betrachten wir in der makroskopischen Elektrodynamik Raumgebiete, welche ausreichend groß sind relativ zu der Anzahl der Atome, und mitteln alle Feldgrößen über diese Volumina. In einem hypothetisches Volumen von 10^{-6}cm^3 befinden sich immer noch 10^{17} Atome.

Wir betrachten dazu im Folgenden ein räumlich gemitteltes elektrisches Feld in einem ausreichend großen Volumen

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d\bar{V} \mathbf{E}(\mathbf{r} + \bar{\mathbf{r}})$$

Für uns speziell interessant ist aber das Auftreten eines neu zu betrachtenden Dipolfeld. Dieses wird verursacht durch die Ansammlung von Dipolen. Diese möchten wir durch eine Dipoldichte

$$\mathbf{P}_D(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{p}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

und dem dazugehörigen Potential

$$\phi_D(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \mathbf{P}_D(\mathbf{r}') \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

beschreiben. In Analogie zur oben durchgeführten räumlichen Mittelung des elektrischen Feldes wird das Potential gemittelt

$$\begin{aligned} \langle \phi_D(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d\bar{V} \phi_D(\mathbf{r} + \bar{\mathbf{r}}) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \int_V d\bar{V} dV' \mathbf{P}_D(\mathbf{r}') \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} + \bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}'|} \end{aligned}$$

Unter der Einführung der neuen Variabel $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - \bar{\mathbf{r}}$ wird daraus

$$\langle \phi_D(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \int_V d\bar{V} dV'' \mathbf{P}_D(\mathbf{r}'' + \bar{\mathbf{r}}) \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|}$$

Von jetzt an verwenden wir nur noch die gemittelte Polarisationsdichte. Wir ändern weiterhin den Namen Variabel zur besseren Übersichtlichkeit von \mathbf{r}'' zu \mathbf{r}' . Die gemittelte Polarisationsdichte ist dann definiert als

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}') = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d\bar{V} \mathbf{P}_D(\mathbf{r}' + \bar{\mathbf{r}})$$

und können das räumlich gemittelte Potential schreiben als

$$\langle \phi_D(\mathbf{r}) \rangle = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Den Integralterm können wir noch explizit aufspalten in einen Teil der die Oberflächenladungsdichte und einen Teil der die Raumladungsdichte enthält. Dies können wir mit der folgenden Umformung erreichen

$$\begin{aligned} \text{div}_{\mathbf{r}'} \left[\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{div}_{\mathbf{r}'} \mathbf{P}(\mathbf{r}') + \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{div}_{\mathbf{r}'} \mathbf{P}(\mathbf{r}') - \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned}$$

Umgeformt nach dem zweiten Term auf der rechten Seite, eingesetzt und Anwenden des Gausschen Satzes ergibt

$$\langle \phi_D(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(V)} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{f}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\text{div}_{\mathbf{r}'} \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Unter Einführung der Polarisationsraumladungsdichte

$$\rho_{\text{Pol}}(\mathbf{r}) = -\text{div} \mathbf{P}(\mathbf{r})$$

und der entsprechenden Oberflächenladungsdichte

$$\eta_{\text{Pol}}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_n$$

können wir die gemittelte Polarisation final schreiben als

$$\langle \phi_D(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(V)} d\mathbf{f}' \frac{\eta_{\text{Pol}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho_{\text{Pol}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Hieran erkennen wir, dass das gemittelte Potential einer Dipolverteilung (Oberfläche+Volumen) von einer Polarisationsladungsdichten erzeugt wird. Diese Polarisationsladungen sind die Senken des Polarisationsfeldes, es gilt $\text{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}) = -\rho_{\text{Pol}}(\mathbf{r})$.

Diese Polarisationsladungen treten zusätzlich zu den externen oder freien Ladungen auf und beschreiben den Einfluss von Materie. Die Maxwell'schen Gleichungen behalten ihre Gültigkeit in Materie im Sinne dieser Mittelung mit einem neuen Feld \mathbf{P} . Die Quellen des Polarisationsfeldes sind die Polarisationsladungen. Für eine homogene Polarisation im Medium dürfen dabei nur Oberflächenquellen auftreten. Weiterhin wird, wie wir an der Gleichung oben gesehen haben, die Normalkomponente des Polarisationsfeldes an der Oberfläche durch die Flächenladungsdichte der Polarisationsladung definiert. Im Medium selbst sind

die Quellen des elektrischen Feldes alle Ladungen. Die Quellen des Polarisationsfeldes sind aber nur die Polarisationsladungen.

Die zusätzliche Gesamtladung durch die Polarisationsladung eines Dielektrikums verschwindet dabei.

$$\begin{aligned} Q_p &= \int_V dV' \rho_{\text{pol}}(\mathbf{r}') + \int_{(V)} df' \eta_{\text{pol}}(\mathbf{r}') \\ &= - \int_{V_D} dV' \text{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}') + \int_{(V_D)} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{f}' \\ &= - \int_{(V_D)} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{f}' + \int_{(V_D)} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{f}' = 0 \end{aligned}$$

5.2 Die dielektrische Verschiebung

Wir haben also gesehen, dass wir die induzierte Polarisation, mithin die elektromagnetische Wirkung von Materie (im Rahmen unserer phänomenologischen Modellvorstellung), auf der Basis einer Polarisationsladungsdichte beschreiben können. Galt bisher im Vakuum

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})$$

so gilt jetzt mit Materie

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + \rho_{\text{pol}}(\mathbf{r})$$

Unter Berücksichtigung dieser zusätzlichen Ladung kann das Vorhandensein von Materie leicht in den Maxwell'schen Gleichungen berücksichtigt werden. Es ergibt sich

$$\epsilon_0 \text{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + \rho_{\text{pol}}(\mathbf{r}) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \text{div} \mathbf{P}(\mathbf{r})$$

Dies kann umgeschrieben werden zu

$$\text{div} [\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})] = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})$$

Als Alternative zum Polarisationsfeld $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ kann man ein neues Feld einführen $\mathbf{D}(\mathbf{r})$, die dielektrische Verschiebung.

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})$$

Die Quellen des elektrischen Feldes \mathbf{E} sind die gesamten Ladungen, also $\rho_{\text{ges}}(\mathbf{r}) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + \rho_{\text{pol}}(\mathbf{r})$. Die Quellen des Polarisationsfeldes \mathbf{P} sind die Polarisationsladungen, also $-\rho_{\text{pol}}(\mathbf{r})$. Die Quellen der dielektrischen Verschiebung \mathbf{D} sind die externen Ladungen, also $\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})$.

Die differentielle erste Maxwell'sche Gleichung lautet dann im Dielektrikum

$$\text{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})$$

Die zweite differentielle Maxwell'sche Gleichung im Dielektrikum bleibt unverändert weiter

$$\text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

Wie bisher gilt auch weiterhin, dass das elektrische Feld der negative Gradient des skalaren Potentials ist, $-\text{grad}\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$.

5.3 Die Materialgleichungen

Was bisher noch nicht geklärt ist, ist der funktionelle Zusammenhang zwischen der induzierten Polarisationsladungsdichte bzw. der Polarisation und dem elektrischen Feld, welches ursprünglich dafür verantwortlich gemacht wurde, die Dipole induziert zu haben. Dieser Zusammenhang kann im Rahmen der Elektrodynamik nicht geklärt werden, sondern ist Gegenstand der Festkörperphysik bzw. der Quantenmechanik. Der funktionelle Zusammenhang von $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ wird daher im Rahmen der Elektrostatik (aber später auch der Elektrodynamik) phänomenologisch eingeführt.

Die erste Annahme, die i.A. getroffen wird, ist die eines linearen Zusammenhangs zwischen dem elektrischen Feld und der Polarisation. Für ausreichend schwache Felder ist diese Annahme immer gerechtfertigt. Weiterhin hat man allgemein einen vektoriellen Zusammenhang (jede Komponente i des elektrischen Feldes kann eine Polarisation in der Komponente j der Polarisation induzieren), wobei dieser anisotrope Zusammenhang entsprechend auch nur für anisotrope Medien relevant ist. Viele Medien, die uns interessieren, z.B. Wasser oder Gläser, sind isotrop.

Man kann verschiedene Materialien mit Bezug auf die Polarisation klassifizieren.

1. Als erstes gibt es die sogenannte Verschiebungspolarisation. Hier wird \mathbf{P} direkt durch \mathbf{E} erzeugt und der Zusammenhang ist einfach der einer skalaren, linearen Beziehung. Diese lässt sich schreiben als

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 N \alpha \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Hierbei ist N die Teilchendichte und α die Polarisierbarkeit eines einzelnen Teilchens, mithin eine Größe dafür, wie groß das induzierte Dipolmoment für ein bestimmtes elektrisches Feld ist.

2. Als zweites gibt es die sogenannte Orientierungspolarisation. Hier sind die Dipole in der Materie bereits vorhanden aber ungeordnet. Dadurch verschwindet die makroskopisch gemittelte Polarisationsladungsdichte. Durch ein angelegtes elektrisches Feld werden die Dipole aber makroskopisch ausgerichtet und führen so zu einer endlichen Polarisationsladungsdichte. Das referentielle Beispiel hier ist Wasser. Die Energie die notwendig ist zur Ausrichtung eines Dipols im elektrischen Feld berechnet sich zu $W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$. Die Natur strebt an, diese Energie durch eine geeignete Ausrichtung der Dipole

im Feld zur minimieren (siehe frühere Diskussion). Diese Ausrichtung wirkt dabei der thermischen Fluktuation entgegen, weshalb sich langfristig ein Mittelwert einstellen wird. Nur dieser Mittelwert ist für die Betrachtung im Rahmen der Elektrostatik relevant. Die Polarisierung lässt sich schreiben als

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{Np_0^2}{3kT}\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Beachten Sie hier bitte, dass es indirekt proportional zur Temperatur ist. Je größer die Temperatur, desto größer die thermischen Fluktuationen, desto kleiner die Polarisierung im Mittelwert.

- Als dritte Klasse von Materialien seien hier Ferroelektrika genannt, bei denen die Dipole schon in makroskopischen Domänen ausgerichtet sind. Unterhalb einer kritischen Temperatur haben diese Domänen eine spontane Ausrichtung und mitteln sich heraus im Durchschnitt. Oberhalb der Curie-Temperatur richten sich die Domänen dann aus. Die ausführliche Darstellung des funktionellen Zusammenhangs der Polarisierung soll hier nicht durchgeführt werden, da der Zusammenhang i.A. nicht mehr linear ist und kompliziert wird.

Für die ersten beiden Klassen lässt sich aber die Materialgleichung phänomenologisch schreiben als

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{r}) &= \epsilon_0\hat{\chi}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ P_i(\mathbf{r}) &= \epsilon_0\chi_{ij}(\mathbf{r})E_j(\mathbf{r})\end{aligned}$$

bzw für ein isotropes Medium mit Hilfe eines skalares Zusammenhangs. Die hier eingeführte Größe χ bezeichnet man als die statische elektrische Suszeptibilität.

Die dielektrische Verschiebung wird dann definiert als

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \epsilon_0\chi(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \epsilon_0\epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Hier ist die statische Dielektrizitätskonstante oder auch die relative elektrische Permittivität eingeführt worden¹

$$\epsilon(\mathbf{r}) = 1 + \chi(\mathbf{r})$$

Beispiele dafür sind z.B. Luft mit einem $\epsilon \approx 1.0006$. Glas hat einen Wert von 4-6 und Wasser hat einen Wert von 81.

¹ Beachten Sie bitte, nur in der Elektrostatik können Sie von der Dielektrizitätskonstante sprechen. In der Elektrodynamik werden Sie sehen, dass Dielektrizitätskonstante keine Konstante ist sondern eine Funktion der Frequenz. Es ist daher von der dielektrischen Funktion zu sprechen.

5.4 Übergangsbedingungen an Grenzflächen dielektrischer Medien

Für die Bestimmung der Übergangsbedingungen an einer dielektrischen Grenzfläche gehen wir in völliger Analogie zu der früheren

Betrachtung vor. Im Speziellen evaluieren wir wieder die Maxwellgleichungen in einem kleinen Volumen (Model Schuhdose) an der Grenzfläche zwischen zwei Medien. Diese werden abgekürzt im Folgendem mit dem Subskript 'a' für außen und 'i' für innen². Dadurch gelangen wir an Bedingungen für einmal die tangentialen und einmal die normalen Komponenten der dielektrischen Verschiebung. Aus diesen Übergangsbedingungen für die dielektrische Verschiebung ergeben sich dann entsprechende Übergangsbedingungen für das elektrische Feld bzw. das Potential.

² Was außen und innen ist, ist ziemlich willkürlich.

Unter Betrachtung der ersten Maxwellschen Gleichung $\text{div}\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ und entsprechender Integration

$$\int_{(V)} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = Q_{\text{ext}} v$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} D_{n_a}(\mathbf{r}) - D_{n_i}(\mathbf{r}) &= \eta_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \\ \epsilon_0 \epsilon_a E_{n_a}(\mathbf{r}) - \epsilon_0 \epsilon_i E_{n_i}(\mathbf{r}) &= \eta_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \\ -\epsilon_0 \epsilon_a \frac{\partial \phi_a(\mathbf{r})}{\partial n} + \epsilon_0 \epsilon_i \frac{\partial \phi_i(\mathbf{r})}{\partial n} &= \eta_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Im Allgemeinen haben wir keine externen Ladungen. Dann reduzieren sich die Gleichungen zu

$$\begin{aligned} D_{n_a}(\mathbf{r}) &= D_{n_i}(\mathbf{r}) \\ \epsilon_a E_{n_a}(\mathbf{r}) &= \epsilon_i E_{n_i}(\mathbf{r}) \\ \epsilon_a \frac{\partial \phi_a(\mathbf{r})}{\partial n} &= \epsilon_i \frac{\partial \phi_i(\mathbf{r})}{\partial n} \end{aligned}$$

Die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung ist stetig an der Grenzfläche. Die Normalkomponente der Polarisation und des elektrischen Feldes sind unstetig an der Grenzfläche. Die Polarisation ist kleiner in Medien mit größerer Dielektrizitätskonstante. Wie man sieht, muss das Produkt aus Dielektrizitätskonstante und elektrischer Feldstärke konstant bleiben.

Unter Betrachtung der zweiten Maxwellschen Gleichung $\text{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ und entsprechender Integration

$$\int_{(F)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} E_{t_a}(\mathbf{r}) &= E_{t_i}(\mathbf{r}) \\ \frac{D_{t_a}(\mathbf{r})}{\epsilon_a} &= \frac{D_{t_i}(\mathbf{r})}{\epsilon_i} \end{aligned}$$

Die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes sind stetig an der Grenzfläche zweier dielektrischer Medien. Die Tangentialkomponenten der dielektrischen Verschiebung sind unstetig.

5.5 Potentialberechnung in Isolatoren

5.5.1 Allgemeines

Was wir im Folgenden lösen wollen sind die Maxwell'schen Gleichungen. Dafür suchen wir das Potential bzw. dann das elektrische Feld und die dielektrische Verschiebung für eine feste Ladungsverteilung in einem Raum, der durch eine räumliche Verteilung von dielektrischen Medien definiert ist. Wir müssen also

$$\epsilon_0 \operatorname{div} [\epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})] = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})$$

und

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

lösen. Das Problem kann verschiedene Ausmaße an Komplexität annehmen, in Abhängigkeit von der räumlichen Verteilung der Permittivität.

1. Das Medium kann inhomogen sein, $\epsilon(\mathbf{r})$. Dann muss der Nablaoperator in der ersten Maxwellgleichung explizit auch auf die Permittivität angewandt werden und wir müssen die folgende Gleichung lösen

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} \epsilon(\mathbf{r}) + \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \\ -\epsilon_0 \operatorname{grad} \phi(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} \epsilon(\mathbf{r}) - \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r}) &= \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \\ \Delta \phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})} \operatorname{grad} \epsilon(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} \phi(\mathbf{r}) &= -\frac{\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})}{\epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

Das Lösen dieser Gleichung ist i.A. kompliziert, da der Gradient der Permittivität nicht senkrecht auf dem Gradienten des Potentials (bzw. dem elektrischen Feld) steht und dieser Term nicht vernachlässigt werden kann. Diese Gleichung können Sie nur numerisch lösen, z.B. mit der Methode der finiten Differenzen.

2. Das Medium kann homogen sein, $\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon = \text{konstant}$, $\operatorname{grad} \epsilon(\mathbf{r}) = 0$. Dann vereinfacht sich die obige Gleichung zu

$$\begin{aligned} \Delta \phi(\mathbf{r}) &= -\frac{\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})}{\epsilon_0 \epsilon} \\ \rightarrow \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon} \int_V dV' \frac{\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist identisch zur im Vakuum studierten mit der einzigen Ersetzung von $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon$

3. Das Medium kann aufgebaut sein aus räumlichen Gebieten mit stückweise konstanter Permittivität. Zur Lösung wird zunächst in jedem Teilgebiet die Poissongleichung gelöst

$$\Delta \phi_i(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_{\text{ext } i}(\mathbf{r})}{\epsilon_0 \epsilon_i}$$

wobei $\rho_{\text{ext } i}(\mathbf{r})$ die externe Ladungsdichte im Gebiet i ist. Anschließend werden die Potentiale zusammengeführt, so dass an den Grenzflächen die Übergangsbedingungen beachtet werden. Diese Forcierung der Übergangsbedingung erfolgt wieder mit der Methode der Spiegelladung. Diese werden außerhalb des betrachteten Gebietes platziert. Deren Ladung und Position werden wieder so angepasst, dass die Übergangsbedingungen für das Potential an den Grenzflächen erfüllt werden. Diese Methode wollen wir im folgenden genauer untersuchen.

5.5.2 Methode der Greenschen Funktion

Wir betrachten einen unendlich ausgedehnten Raum, der aus Teilgebieten mit stückweise konstantem ϵ besteht. In jedem der Raumgebiete muss die Poissongleichung erfüllt sein

$$-\epsilon_0 \epsilon_i \Delta \phi_i(\mathbf{r}) = \rho_{\text{ext } i}(\mathbf{r})$$

und die Übergangsbedingungen müssen erfüllt sein. Diese besagen, dass das Potential an der Grenzfläche stetig sein muss, da ansonsten der Betrag des elektrischen Feldes divergieren würde, $\phi_i = \phi_j$. Weiterhin muss die Normalableitung des Potentials multipliziert mit der Permittivität im entsprechenden Gebiet konstant sein an der Grenzfläche, $\epsilon_i \frac{\partial \phi_i}{\partial n} = \epsilon_j \frac{\partial \phi_j}{\partial n}$.

Die Lösung kann auch geschrieben werden mit natürlichen Randbedingungen und unter Beachtung der Übergangsbedingungen mittels einer Greenschen Funktion. Die formale Lösung lautet

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V dV' \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

wobei die Greensche Funktion die Lösung der folgenden Gleichung ist unter der Annahme, dass sich der Aufpunkt in dem Raumgebiet i befindet

$$\begin{aligned} -\epsilon_0 \epsilon_i \Delta G_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') && \text{Ladung in } i \\ -\epsilon_0 \epsilon_i \Delta G_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 0 && \text{Ladung nicht in } i \end{aligned}$$

Die Greensche Funktion G ist hierbei verschieden in den verschiedenen Raumgebieten im gesamten Raum \mathbf{r} . In Analogie zu den Übergangsbedingungen für das Potential, fordern wir als Übergangsbedingung für die Greensche Funktion, dass die Greensche Funktion G_i und die Normalableitung multipliziert mit der Permittivität $\epsilon_i \frac{\partial G_i}{\partial n}$ an der Grenzfläche konstant bleiben.

Als ein kanonisches Beispiel wollen wir eine beliebige Ladungsverteilung im Gebiet 1 (ϵ_1) vor einem dielektrischem Halbraum (ϵ_2) betrachten. Als erstes müssen wir die Greensche Funktion für \mathbf{r} in den beiden Halbräumen berechnen. In Konkretisierung der obigen

Gleichung müssen wir die folgenden Gleichungen lösen

$$\begin{aligned} -\epsilon_0\epsilon_1\Delta G_1(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') & \mathbf{r} \text{ in } 1 \\ \epsilon_2\Delta G_2(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= 0 & \mathbf{r} \text{ in } 2 \end{aligned}$$

Im Gebiet mit der Ladung wählen wir den gleichen Ansatz wie früher, also mit einer Spiegelladung.

$$G_1(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1} \left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{A}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_s|} \right]$$

mit der Position der Spiegelladung als

$$\mathbf{r}'_s = \begin{pmatrix} -x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Im Gebiet ohne die Ladung wählen wir als Ansatz

$$G_2(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \left[\frac{B}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right]$$

Diese Wahl stellt sicher, dass $\Delta G_2 = 0$ ist, da der Punkt der Ladung in Raum 1 liegen soll. Beachten Sie bitte, dies sind zunächst einmal Ansätze. Die Größe der noch unbekannt Amplituden A und B müssen durch Forcierung der Übergangsbedingungen gefunden werden. Wir haben zwei unbekannt Größen mit zwei Übergangsbedingungen, das sollte also kein Problem darstellen.

Wir fordern also zunächst, dass

$$G_1(\bar{\mathbf{r}},\mathbf{r}') = G_2(\bar{\mathbf{r}},\mathbf{r}')$$

gilt. Hierbei ist $\bar{\mathbf{r}}$ wieder ein beliebiger Punkt an der Grenzfläche zwischen den beiden dielektrischen Halbräumen. Einsetzen der obigen Ansätze führt auf

$$\frac{1}{\epsilon_1} \left[\frac{1}{|\bar{\mathbf{r}}-\mathbf{r}'|} + \frac{A}{|\bar{\mathbf{r}}-\mathbf{r}'_s|} \right] = \frac{1}{\epsilon_2} \left[\frac{B}{|\bar{\mathbf{r}}-\mathbf{r}'|} \right]$$

Für $\bar{x} = 0$ sind alle Nenner gleich und wir erhalten

$$\frac{1}{\epsilon_1} [1 + A] = \frac{B}{\epsilon_2}$$

Als zweites fordern wir, dass die Normalableitung multipliziert mit der Permittivität entsprechend konstant bleibt, $\epsilon_i \frac{\partial G_i}{\partial x} \Big|_{x=0}$. Mit den beiden obigen Ansätzen erhalten wir so

$$-\frac{x'}{|\bar{\mathbf{r}}-\mathbf{r}'|^3} + \frac{x'A}{|\bar{\mathbf{r}}-\mathbf{r}'_s|^3} = -\frac{x'B}{|\bar{\mathbf{r}}-\mathbf{r}'|^3}$$

Diese Gleichung muss wieder für eine beliebige Position x' gelten und wir erhalten

$$-1 + A = -B \rightarrow 1 - A = B$$

Kombinieren wir die beiden Ergebnisse und lösen nach den Amplituden auf, erhalten wir

$$B = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \quad A = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

Damit erhalten wir als expliziten Ausdruck für die Greensche Funktion

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_s|} \right]$$

$$G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{2}{4\pi\epsilon_0(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]$$

Der Spezialfall eines Metalls (perfekter Leiter) ist hier bereits enthalten. Für dieses können wir die Permittivität des zweiten Halbraums gegen minus unendlich gehen lassen ($\epsilon_2 \rightarrow -\infty$) und würden die früher bestimmte Greensche Funktion bestimmen.

Die Lösung des Potentials einer beliebigen Ladungsverteilung im Gebiet 1 vor einem dielektrischen Halbraum wäre demnach

$$\phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \int_V dV' \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}') G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & \mathbf{r} \in 1 \\ \int_V dV' \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}') G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & \mathbf{r} \in 2 \end{cases}$$

Als Beispiel betrachten wir das Potential einer Punktladung vor dem dielektrischen Halbraum $\rho(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)$. Dann löst sich das Potential zu

$$\phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0s}|} \right] & \mathbf{r} \in 1 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right] & \mathbf{r} \in 2 \end{cases}$$

Als letztes wollen wir uns die Polarisationsladungsdichte des dielektrischen Halbraumes ansehen. Es gilt für die Berechnung der Volumenladungsdichte folgende Assoziationskette

$$\text{div}\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0\chi\text{div}\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Außerhalb von Ladungen gilt aber

$$\text{div}\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon\text{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \rightarrow \text{div}\mathbf{P}(\mathbf{r}) = 0 \rightarrow \rho_{\text{Pol}}(\mathbf{r}) = 0$$

Für die Oberflächenladungsdichte berechnen wir

$$\begin{aligned} \eta_{\text{pol}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{P}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{P}_2(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= [\mathbf{P}_2(\mathbf{r}) - \mathbf{P}_1(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{e} = P_{2n}(\mathbf{r}) - P_{1n}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Mit

$$P_i(\mathbf{r}) = \epsilon_0 [\epsilon_i(\mathbf{r}) - 1] E_i(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 [\epsilon_i(\mathbf{r}) - 1] \text{grad}\phi_i(\mathbf{r})$$

und

$$P_{in} = -\epsilon_0 [\epsilon_i(\mathbf{r}) - 1] \left. \frac{\partial\phi(x)}{\partial x} \right|_{x=0}$$

folgt

$$\eta_{\text{pol}}(x=0) = \frac{1}{4\pi} \frac{2q(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{x_0}{[(x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}}$$

5.6 Raumladungsfreie Probleme

Vergleichbar zu unserem Vorgehen im Rahmen der Elektrostatik in Anwesenheit von Leitern wollen wir uns im Folgenden noch raumladungsfreie Probleme ansehen. Diese sind charakterisiert durch $\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = 0$.

5.6.1 Die homogen polarisierte Kugel

Im einfachsten Falle wollen wir uns zunächst eine spezifische Polarisierung \mathbf{P} vorgeben. Wir wollen hier im speziellen keine induzierten Dipole betrachten, sondern verstehen die Polarisationsladungsdichte an der Oberfläche als die einzigen Quellen des elektrischen Feldes.

Es sei hier angemerkt, dass diese Betrachtung die erste in einer Reihe von zwei Betrachtungen sind, welche wir benötigen, um aus der atomaren Polarisierbarkeit schlussendlich eindeutig auf die Suszeptibilität schlussfolgern zu können. Diese Clausius-Mosotti-Formel würden wir im übernächsten Unterkapitel besprechen.

Wir geben uns also eine Kugel mit dem Radius R vor, in welcher eine konstante Polarisierung existieren soll

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = P\mathbf{e}_z \quad \text{für } r < R$$

mit P einer ortsunabhängigen skalaren Größe. Die Oberflächenladungsdichte berechnet sich dann zu

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_r = P \cos \gamma = \eta_{\text{pol}}$$

Das Potential dieser (Polarisations-)Dipoldichte berechnet sich dann wie folgt

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Kugel}} dV' \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \text{grad}_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= -\mathbf{P} \cdot \text{grad}_r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Kugel}} dV' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist formal identisch zum Potential einer homogen geladenen Kugel mit $\rho(\mathbf{r}') = 1$. Daher können wir das früher gewonnene Ergebnis übernehmen

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= -\mathbf{P} \cdot \text{grad}_r \begin{cases} \frac{R^3}{3\epsilon_0 r} & r > R \\ \frac{3R^2 - r^2}{6\epsilon_0} & r \leq R \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{R^3}{3\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{r^3} & r > R \\ \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{3\epsilon_0} & r \leq R \end{cases} \end{aligned}$$

Mit $\mathbf{p} = \frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{P} = V\mathbf{P}$ ergibt sich daraus final

$$\phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} & r > R \\ \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{3\epsilon_0} & r \leq R \end{cases}$$

Das ist das Potential eines Dipols im Außenraum. Das elektrische Feld berechnet sich dann als der negative Gradient des Potentials zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}-r^2\mathbf{p}}{r^5} & r > R \\ -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} & r \leq R \end{cases}$$

Das ist das Feld eines Dipols mit dem Dipolmoment $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_z$. In der Berechnung für das Feld im Inneren der Kugel haben wir ausgenutzt, dass $\text{grad}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{r}) = (\mathbf{P}\cdot\text{grad})\mathbf{r} = \mathbf{P}$.

Wir erkennen hier, dass \mathbf{E} und \mathbf{P} unstetig sind an der Grenzfläche. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da wir eine nichtverschwindende Oberflächenladungsdichte der Polarisationsladung haben. Weiterhin erkennen wir, dass \mathbf{E} und \mathbf{P} antiparallel sind im Kugellinneren. Beachten Sie bitte, dass die dielektrische Verschiebung in diesem Beispiel keine feldabhängige Quelle hat. Für die dielektrische Verschiebung im Innenraum \mathbf{D}_i können wir schreiben

$$\mathbf{D}_i(\mathbf{r}) = \epsilon_0\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0\left(-\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}\right) + \mathbf{P} = \frac{2}{3}\mathbf{P}$$

Ich möchte noch einmal betonen, dass die Polarisation in unserem Beispiel nicht von dem elektrischen Feld hervorgerufen wird.

5.6.2 Kugelförmiger Hohlraum im Dielektrikum

Wir betrachten nun die komplementäre Struktur, einen kugelförmigen Hohlraum in einem Dielektrikum. Wir wissen, dass ohne den Hohlraum wir auch ein homogenes elektrisches Feld \mathbf{E} und eine homogene Polarisation \mathbf{P} haben. Wie gehen wir jetzt mit der komplementären Struktur um?

Bei der Kugel haben wir bereits sehen können, dass die Polarisation auf der Kugeloberfläche endet und ein elektrisches Feld dadurch im Außenraum erzeugt wurde. Jetzt betrachten wir gerade die umgekehrte Situation. Wir untersuchen eine positive Polarisationsladung auf der Grenze des Hohlleiters, welche im Inneren der Kugel ein elektrisches Feld erzeugt. Dieses elektrische Feld selbst muss homogen sein, da es schlussendlich die gleiche Polarisationsladung wie in der vorher betrachteten Situation darstellt. Der Unterschied ist nur, dass die Polarisation die gleiche Orientierung haben soll wie das Feld, da die Polarisationsladung nun positiv ist.

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_a - \left(-\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}\right) = \mathbf{E}_a + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

Die Feldstärke im dielektrischen Hohlraum ist damit größer als in der Umgebung. Dies ist ein entscheidender Unterschied zur dielektrischen Kugel. Die Polarisation kann berechnet werden zu ³

$$P = \epsilon_0 \frac{3(\epsilon_a - \epsilon_i)}{2\epsilon_a + \epsilon_i} E_a$$

³ Siehe z.B. Jackson Kapitel 4.4, Seite 182

mit $\epsilon_i = 1$ und $\epsilon_a = \epsilon$, berechnet sich das elektrische Feld im Inneren zu

$$E_i = E_a + \frac{P}{3\epsilon_0} = E_a \left(1 + \frac{\epsilon - 1}{2\epsilon + 1} \right) = \frac{3\epsilon}{2\epsilon + 1} E_a$$

Das Feld im Außenraum erzeugt durch diese Polarisation ist wieder das Feld eines elektrischen Dipols.

5.6.3 Molekulares Modell der Polarisierbarkeit → die Clausius - Mosotti-Formel

Im Folgenden wollen wir einen genaueren Zusammenhang zwischen mikroskopischen Eigenschaften und makroskopischen Größen herstellen, im speziellen der Suszeptibilität. Bisher haben wir die folgenden Zusammenhänge betrachtet⁴

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}) &= N(\mathbf{r}) \langle \mathbf{p}_{\text{at}} \rangle \\ \langle \mathbf{p}_{\text{at}} \rangle &= \alpha_{\text{at}} \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{r}) &= \epsilon_0 N(\mathbf{r}) \alpha_{\text{at}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

⁴ Mit dem Subskript 'at' für atomar.

Im dielektrischen Medium wirkt aber die Polarisation der Umgebung auf das herausgeschnittenes Volumen, in welchem das Atom lokalisiert ist. Es ist also nicht das totale Feld, was die Polarisation induziert, sondern ein lokales elektrisches Feld, welches um die Polarisation selbst korrigiert wurde. Eine solche Situation haben wir gerade betrachtet. Man bezeichnet diese Lokalfeldkorrektur als das Lorentzfeld $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}_{\text{lok}}$. Es ergibt sich mit den Ergebnissen der vorherigen beiden Unterabschnitte

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{lok}} &= \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \\ \mathbf{P} &= \epsilon_0 N \alpha_{\text{at}} \mathbf{E}_{\text{lok}} = \epsilon_0 N \alpha_{\text{at}} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \right) \\ \mathbf{P} &= \epsilon_0 \frac{N \alpha_{\text{at}}}{1 - \frac{N \alpha_{\text{at}}}{3}} \mathbf{E} \rightarrow \chi = \epsilon - 1 = \frac{N \alpha_{\text{at}}}{1 - \frac{N \alpha_{\text{at}}}{3}} \end{aligned}$$

Das ist die Clausius-Mossotti Formel. Für eine gegebene atomare Polarisierbarkeit (welche Sie mit Hilfe einer anderen Theorie berechnen müssen), können Sie so die makroskopische Suszeptibilität ausdrücken.

5.7 Elektrostatische Energie und Kräfte in dielektrischen Medien

5.7.1 Energie

Zur Berechnung der in einer Ladungsanordnung gespeicherten Energie, im Gegensatz zu den früheren Betrachtungen im Vakuum, müssen wir im Folgenden alle Wechselwirkungen mit berücksichtigen. Diese betrifft die interne Wechselwirkung der externen Ladungen, aber

auch die Wechselwirkung zwischen externen Ladungen und induzierten Dipolmomenten und auch die Wechselwirkung der induzierten Dipolmomente untereinander.

Im Vakuum galt bisher für die in einer Ladungsanordnung gespeicherten Energie

$$W = \frac{1}{2} \int_V dV \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_V dV \mathbf{E}^2(\mathbf{r})$$

Die dabei zu berücksichtigende Ladung entsprach nur der externen Ladungsdichte, welche ein Potential erzeugt. In unserem jetzigen Sprachgebrauch wäre das nur die externe Ladungsdichte: $\rho(\mathbf{r}) \rightarrow \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \Delta \phi(\mathbf{r})$. Im Dielektrika müssen wir zunächst die Ladungsdichte ersetzen durch die gesamte Ladungsdichte und müssen dann das entsprechende Potential ausrechnen.

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow \rho_{\text{ges}}(\mathbf{r}) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + \rho_{\text{pol}}(\mathbf{r}) \\ &\rightarrow \rho_{\text{ges}}(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \Delta \phi(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Die Energie, die benötigt wird, um die Gesamtladungsdichte in das Feld zu bringen, berechnet sich daher zu

$$W_\rho = \frac{1}{2} \int_V dV \rho_{\text{ges}}(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_V dV \mathbf{E}^2(\mathbf{r})$$

Das elektrische Feld ist jetzt bereits das Feld, welches sich im Dielektrikum befindet.

Mit dieser Rechnung haben wir aber erst einen Teil der Energie berücksichtigt. Wir haben aber die falsche Annahme getroffen, dass die Polarisationsladung bereits vorhanden ist. Die Dipole müssen aber erst induziert werden, damit die Polarisationsladung entsteht. Dafür ist wiederum Energie notwendig, welche wir explizit berechnen müssen. Die Energie entspricht dabei der zu verrichtenden Arbeit, um alle Ladungen an ihre entsprechenden Orte \mathbf{r} zu bringen und die Dipole entsprechend zu spannen.

Für einen Dipol beträgt diese Arbeit

$$W_D = \frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

Die entsprechende Energiedichte beträgt

$$w_D = \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}$$

Damit beträgt dann die entsprechende Arbeit zur Erzeugung der Polarisationsladung

$$W_P = \frac{1}{2} \int_V dV \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Die Gesamtenergie ergibt sich dann aus der Summe der beiden Teilbeiträge

$$W = W_\rho + W_P = \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 \int_{V_\infty} dV \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) + \int_{V_\infty} dV \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right]$$

Auch wenn wir bisher nur lineare Polarisierungen betrachtet haben, gilt dieser Zusammenhang allgemein für beliebige Polarisierungen; im Speziellen auch für nichtlineare Polarisierungen. Beachten Sie bitte, da $|\mathbf{E}(\mathbf{r})| \neq |\mathbf{E}(\mathbf{r})|_{\text{vak}}$, kann die entsprechend gespeicherte Energie auch kleiner sein als die entsprechende Energie des gleichen Feldes im Vakuum.

Das große Ziel aller Feldtheorien ist es, alle Größen entsprechend mit Feldern auszudrücken. So versucht man auch vorzugsweise in Medien die Energie als Feldenergie auszudrücken. Im Zweifel ist die Polarisationsladungsdichte nicht bekannt. Mit dem früher gefundenen funktionellen Zusammenhang $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})$ erhält man

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} dV \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

In linearen Medien gilt mit dem Zusammenhang $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})$

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{V_\infty} dV \epsilon(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^2(\mathbf{r})$$

Alternativ können wir auch wieder eine Darstellung mit Hilfe des Potentials und der Ladungsdichte finden.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_{V_\infty} dV \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \int_{V_\infty} dV \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \text{grad} \phi(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{V_\infty} dV \text{div} [\mathbf{D}(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r})] + \frac{1}{2} \int_{V_\infty} dV \phi(\mathbf{r}) \text{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{V_\infty} dV \phi(\mathbf{r}) \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wurde wieder der Gaußsche Satz benutzt, um das Volumenintegral auf ein Oberflächenintegral im Unendlichen zu reduzieren. Der Integrand fällt wieder schneller auf null ab als die Oberfläche der Kugel ansteigt, so dass insgesamt das Integral verschwindet.

Beachten Sie hier bitte, dass zwar 'nur' die externe Ladungsdichte hier auftaucht, das Potential aber sowohl von den externen Ladungen als auch von den Polarisationsladungen induziert wird. Kann man dies einfach erklären? Wir betrachten dazu den Beitrag zur Energie, welcher durch das Spannen der Dipole verursacht wird und den Beitrag, welcher durch das Einbringen der Dipole in das Feld verursacht wird. Beide Terme wollen wir ausdrücken mit der Polarisation und dem Potential. Der Beitrag zum Spannen der Dipole berechnet sich aus

$$\frac{1}{2} \int dV \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \int dV \text{grad} \phi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})$$

Der Beitrag zum Einbringen der Dipole in das Feld berechnet sich aus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{V_\infty} dV \rho_{\text{pol}}(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{2} \int_{V_\infty} dV \text{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{V_\infty} dV \text{div} [\mathbf{P}(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r})] + \frac{1}{2} \int_{V_\infty} dV \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \text{grad} \phi(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{V_\infty} dV \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \text{grad}\phi(\mathbf{r})$$

Die beiden Beiträge heben sich also gerade genau auf. Daher taucht in dem obigen Ausdruck nur die externe Ladungsdichte auf.

Weiterhin kann man sich die Frage stellen, da wir bei gleicher externer Ladungsdichte auch die gleiche dielektrische Verschiebung besitzen, wo die Energie entsprechend größer ist; im Vakuum oder im Dielektrikum? Das können wir einfach ausrechnen.

$$\begin{aligned} W_V &= \frac{1}{2} \int_{V_\infty} dV \mathbf{D}_V(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_V(\mathbf{r}) \\ W_D &= \frac{1}{2} \int_{V_\infty} dV \mathbf{D}_D(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} dV \mathbf{D}_V(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_D(\mathbf{r}) \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \mathbf{D}_V(\mathbf{r}) = \mathbf{D}_D(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}_V(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}_D(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{E}_D(\mathbf{r}) &= \frac{\mathbf{D}(\mathbf{r}) - \mathbf{P}(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Für die Energie im Dielektrikum ergibt sich so

$$\begin{aligned} W_D &= \frac{1}{2\epsilon_0} \int_{V_\infty} dV \mathbf{D}^2(\mathbf{r}) - \frac{1}{2\epsilon_0} \int_{V_\infty} dV \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{V_\infty} dV \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_V(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \int_{V_\infty} dV \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_V(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$W_V - W_D = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} dV \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_V(\mathbf{r})$$

Die Energie im Dielektrikum ist kleiner. Sie entspricht der Wechselwirkungsenergie zwischen Dielektrikum und Feld.

5.7.2 Die Kraftdichte $\mathbf{f}(\mathbf{r})$

Zur Berechnung der Kraftdichte gehen wir von der prinzipiellen Idee aus, dass die Felder Ladungen bewegen können, sie üben somit eine Kraft auf Ladungen aus. Diese Ladungen können zum einen externe Ladungen ρ_{ext} sein, zum anderen aber auch gebundene Ladungen ρ_{pol} . Bei Beschränkung auf einen linearen Zusammenhang gilt

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Die Polarisationsladungen hängen also mit der Permittivität zusammen. Wir gehen also davon aus, dass vorhandene elektrische Felder eine kleine Ortsveränderungen $\delta\mathbf{r}$ der Ladungen ρ_{ext} und ρ_{pol} in Gebieten mit $\epsilon(\mathbf{r})$ hervorrufen. Die Materie zieht dann $\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r} - \delta\mathbf{r})$ und $\epsilon(\mathbf{r} - \delta\mathbf{r})$ mit an den Ort \mathbf{r} .

Wir gehen im Folgenden von der Annahme aus, dass wir eine Verschiebung und Deformation der Materie erlauben, aber keine Dilatation.

Wir vernachlässigen also Elektrostriktion. Wir fordern entsprechend als eine wichtige Nebenbedingung

$$\delta V = 0 = \int_{(V)} \delta \mathbf{r} \cdot d\mathbf{f} = \int_V \operatorname{div}(\delta \mathbf{r}) dV \rightarrow \operatorname{div}(\delta \mathbf{r}) = 0$$

Unser Ziel im Folgenden wird es sein, eine infinitesimale Änderung der Energie bei infinitesimalen Verrückungen auf folgende Form bringen

$$\delta W = \delta \left[\frac{1}{2} \int_V dV \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \right] = -\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = - \int_V dV \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{r}$$

Der Weg dahin besteht aus drei Schritten:

1. Wir berechnen die Änderung $\delta \epsilon(\mathbf{r})$ und $\delta \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ bei einer gegebenen infinitesimalen Änderung des Ortes $\delta \mathbf{r}$.
2. Wir berechnen die Änderung der Energie δW als Funktion von $\delta \epsilon(\mathbf{r})$ und $\delta \rho_{\text{ext}}$.
3. Wir finden einen Ausdruck, der δW in Verbindung bringt mit $\int_V dV \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{r}$.

Diese drei Schritte wollen wir nun im Einzelnen diskutieren

$$\delta \mathbf{r} \rightarrow \delta \epsilon(\mathbf{r}), \delta \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})$$

Wir betrachten dazu ein Volumenelement bei $\mathbf{r} - \delta \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}$ und $\epsilon(\mathbf{r} - \delta(\mathbf{r}))$ und $\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r} - \delta(\mathbf{r}))$ werden dazu mitbewegt.

$$\begin{aligned} \delta \epsilon(\mathbf{r}) &= \epsilon(\text{neu}) - \epsilon(\text{alt}) = \epsilon(\mathbf{r} - \delta(\mathbf{r})) - \epsilon(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \epsilon(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{r} \\ \delta \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) &= \rho_{\text{ext}}(\text{neu}) - \rho_{\text{ext}}(\text{alt}) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r} - \delta \mathbf{r}) - \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{r} \\ &= -\operatorname{div}(\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \delta \mathbf{r}) + \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \operatorname{div}(\delta \mathbf{r}) \\ &= -\operatorname{div}(\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \delta \mathbf{r}) \end{aligned}$$

Wir haben jetzt hier explizite Ausdrücke und können damit berechnen, wie sich die Permittivität bzw. die externe Ladungsdichte bei einer kleinen Veränderung des Ortes verändern. Wir können somit zum zweiten Schritt übergehen.

$$\delta \epsilon(\mathbf{r}), \delta \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \rightarrow \delta W$$

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta \left[\frac{1}{2} \int_{V_\infty} dV \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \right] = \frac{1}{2} \delta \int_{V_\infty} dV \frac{\mathbf{D}^2(\mathbf{r})}{\epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r})} \\ &= \int_{V_\infty} \left[dV \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{D}(\mathbf{r}) - \frac{\mathbf{D}^2(\mathbf{r})}{2\epsilon_0 \epsilon^2(\mathbf{r})} \delta \epsilon(\mathbf{r}) \right] \end{aligned}$$

Den ersten Term des Integrals wollen wir noch geeignet umformen, so dass wir einen Ausdruck als Funktion von $\delta \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ erhalten.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{D}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \phi(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{D}(\mathbf{r})$$

$$\begin{aligned}
&= -\operatorname{div} [\phi(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{D}(\mathbf{r})] + \phi(\mathbf{r}) \operatorname{div} \delta \mathbf{D}(\mathbf{r}) \\
&= \phi(\mathbf{r}) \delta \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

Beachten Sie hier bitte wieder, der Divergenzterm im zweiten Schritt kann wieder vernachlässigt werden, da die Integration im unendlichen Volumen nach Anwendung des Gaußschen Satzes kein Beitrag liefern wird. Damit erhalten wir final

$$\delta W = \int_V dV \left[\phi(\mathbf{r}) \delta \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \frac{\mathbf{D}^2(\mathbf{r})}{2\epsilon_0 \epsilon^2(\mathbf{r})} \delta \epsilon(\mathbf{r}) \right]$$

Damit haben wir auch den zweiten Schritt erledigt und kommen nun zum dritten.

$$\delta W \rightarrow \int_V dV \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{r}$$

Zur Berechnung dieses Ausdruckes nutzen wir die Ergebnisse des ersten Teilschrittes explizit aus und setzen diesen ein.

$$\begin{aligned}
\delta W &= \int_V dV \left[\phi(\mathbf{r}) \delta \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \frac{\mathbf{D}^2(\mathbf{r})}{2\epsilon_0 \epsilon^2(\mathbf{r})} \delta \epsilon(\mathbf{r}) \right] \\
&= \int_V dV \left[-\phi(\mathbf{r}) \operatorname{div} [\delta \mathbf{r} \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})] + \frac{\mathbf{D}^2(\mathbf{r})}{2\epsilon_0 \epsilon^2(\mathbf{r})} \operatorname{grad} \epsilon(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{r} \right] \\
&= \int_V dV \left[-\operatorname{div} [\phi(\mathbf{r}) \delta \mathbf{r} \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})] + \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \phi(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{r} + \frac{\mathbf{D}^2(\mathbf{r})}{2\epsilon_0 \epsilon^2(\mathbf{r})} \operatorname{grad} \epsilon(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{r} \right] \\
&= - \int_V dV \left(\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \epsilon(\mathbf{r}) \right) \cdot \delta \mathbf{r}
\end{aligned}$$

Auch hier liefert der Divergenzterm in der dritten Zeile keinen Beitrag. Da $\delta W = - \int_V dV \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{r}$ gelten soll, folgt für die Kraftdichte

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \epsilon(\mathbf{r})$$

Der erste Term entspricht hier einer Kraft auf eine externe Ladung. Der zweite Term entspricht der Kraft auf die Polarisationsladung.

Bezüglich der physikalischen Interpretation gibt es zwei Aussagen zu treffen. Zum einen ist die Kraftdichte antiparallel zum Gradienten der Permittivität. Materie mit großem ϵ verdrängt daher Materie mit kleinerem ϵ . Und in der Abwesenheit von externen Ladungen ist die Kraftdichte proportional zur Feldintensität.

Technisch haben wir jetzt noch ein kleines Problem. In der Abwesenheit externer Ladungen und für stückweise konstante Medien haben wir eine verschwindende Kraftdichte. Diese verschwindet außer an der Grenzfläche; dort divergiert der Gradient der Permittivität und die Kraftdichte wird unendlich. Dieses Problem wird behoben durch Verwendung des Maxwell'schen Spannungstensors.

5.7.3 Der Maxwellsche Spannungstensor

Die Energie wurde bisher in Abhängigkeit von Feldgrößen formuliert. Dies ist bisher nicht explizit der Fall für die Kraftdichte, in der die externe Ladungsdichte noch mit auftaucht. Der Maxwellsche Spannungstensor soll im Folgenden motiviert werden durch die Tatsache, dass wir die Kraftdichte selbst ebenfalls ausschließlich als Funktion der Felder berechnen möchten. Weiterhin wollen wir uns die Frage stellen, ob die Kraftdichte selbst eine Art von Potential besitzt. Wir werden später sehen, dass das gerade genau der Spannungstensor ist. Weiterhin wollen wir uns die Frage stellen, ob wir die Kräfte nicht besser als Oberflächenkräfte an Stelle von Volumenkräfte definieren können. Dies würde die Analyse erleichtern, insbesondere für stückweise konstante Medien. Alles was wir dazu machen müssen, ist, zunächst einmal die Kraftdichte geeignet umzuformulieren. Wir schreiben das im Folgenden in Komponentenschreibweise und ohne Angabe der Ortsabhängigkeit auf, welche aber implizit immer angenommen wird.

$$\begin{aligned}
 f_i &= \rho_{\text{ext}} E_i - \frac{1}{2} \epsilon_0 E_j E_j \epsilon_{,i} \\
 &= D_{j,j} E_i - \frac{1}{2} \epsilon_0 E_j E_j \epsilon_{,i} \\
 &= (D_j E_i)_{,j} - D_j E_{i,j} - \frac{1}{2} (E_j D_j)_{,i} + D_j E_{j,i} \\
 &= (D_j E_i)_{,j} - \frac{1}{2} (E_k D_k)_{,i} \\
 &= \left(E_i D_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E_k D_k \right)_{,j}
 \end{aligned}$$

In der dritten Zeile haben wir ausgenutzt, dass der zweite und vierte Term zusammengenommen $\text{rot} \mathbf{E} = 0$ darstellen. Damit bekommt die Kraftdichte die Form

$$f_i = T_{ij,j} \quad \rightarrow \quad \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \text{div} \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{r})$$

mit dem Maxwellschen Spannungstensor

$$T_{ij} = E_i D_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E_k D_k$$

Dieser Tensor stellt eine Art Potential dar, da die Kraftdichte die Ableitung dieses Tensors ist. Es gilt

$$T_{ij} = T_{ji}$$

Das Besondere ist, dass er nur mit Feldgrößen ausgedrückt werden kann. Wir können schreiben

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} E_x D_x - w & E_x D_y & E_x D_z \\ E_y D_x & E_y D_y - w & E_y D_z \\ E_z D_x & E_z D_y & E_z D_z - w \end{pmatrix}$$

wobei $w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ ist. Die Berechnung der Kraft auf der Oberfläche eines Volumens ist dann sehr einfach.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_V dV \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \int_V dV \operatorname{div} \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{r}) = \int_{(V)} \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f}$$

$$F_i = \int_V dV f_i = \int_V dV T_{ij,j} = \int_{(V)} df_j T_{ij} = \int_{(V)} df T_{ij} e_j$$

Die Gesamtkraft auf endliche dielektrische Körper kann immer mit Hilfe von Oberflächenkräften ausgedrückt werden.

6 Magnetostatik

Im Rahmen der Elektrostatik im Vakuum haben wir uns bisher nur mit stationären Ladungen beschäftigt, welches Potential sie hervorrufen und welches elektrische Feld daraus resultiert. Wir haben dies exemplarisch für einige konkrete Ladungsverteilungen diskutiert. Wir haben weiterhin diskutiert, welche Energie in Ladungsverteilungen gespeichert ist und wie das Potential in großer Entfernung zu einer räumlich begrenzten Ladungsverteilung vereinfacht beschrieben werden kann. Als letztes haben wir diskutiert, wie diese Potentiale aussehen in beliebigen Geometrien mit verschiedenen Randbedingungen in Anwesenheit von Leitern bzw. dielektrischen Medien. All diese Diskussionen wiederholen sich in der Magnetostatik mit einer einzigen veränderten Prämisse. Wir werden im Folgenden keine stationäre Ladungen ansehen, sondern stationäre Ströme, welche durch bewegte Ladungen verursacht werden. Ein stationärer Strom, ein Strom der sich zeitlich nicht verändert und verursacht wird durch eine konstante Bewegung von Ladungen, führt zu einem zeitunabhängigen Magnetfeld. So wie wir in der Elektrostatik diskutierten, welches Potential und somit elektrisches Feld durch eine Ladungsverteilung erzeugt wird, diskutieren wir in der Magnetostatik die Frage, welches Vektorpotential und somit welches magnetische Feld durch eine stationäre Stromverteilung erzeugt wird. In der Elektrodynamik werden dann beide Phänomene zusammengefasst bei der Berücksichtigung von zeitlich sich veränderlichen Quellen. Auch wenn dies verschiedenst bereits betont wurde, beachten Sie bitte die formale Symmetrie in der Diskussion der Phänomene im Rahmen der Magnetostatik zu diesen in der Elektrostatik.

6.1 Vorbetrachtung zum elektrischen Strom

6.1.1 Allgemeines

Ströme existieren auch dann, wenn keine externen Ladungen vorhanden sind ($\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = 0$). In der Elektrostatik war es so, dass Ladungen sich so lange bewegen, bis kein elektrisches Feld mehr im Leiter ist. Jetzt betrachten wir eine Stromquelle, aus der ständig neue Ladungen stammen. Das erlaubt es das elektrische Feld aufrechtzuerhalten, was zu stationären Strömen führt. Die Bewegungsgleichung für die Ladungen lautet

$$m_e (\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}}) = -e\mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Die Forderung nach Stationarität verlangt, dass die Ladungen nicht mehr beschleunigt werden, $\ddot{\mathbf{r}} = 0$. Das hat folgende Konsequenz

$$\ddot{\mathbf{r}} = 0 \rightarrow \dot{\mathbf{r}} = -\frac{e\mathbf{E}}{m_e\gamma} \rightarrow \mathbf{j} = -Ne\dot{\mathbf{r}} = \frac{Ne^2}{m_e\gamma}\mathbf{E}$$

Dabei wurde die Stromdichte \mathbf{j} eingeführt. Dieser funktionelle Zusammenhang zwischen Stromdichte und elektrischem Feld entspricht einer Materialgleichung. Dieses Ohmsche Gesetz lautet

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

mit der Leitfähigkeit $\sigma = \frac{Ne^2}{m_e \gamma}$. Elektronendichte N , Elektronenladung e , Elektronenmasse m_e und ein phänomenologischer Dämpfungsparameter γ treten hier auf. Der Strom im Leiter wird als Konduktionsstrom bezeichnet. \mathbf{j} ist eine Stromdichte und ergibt sich aus der Größe Strom pro Fläche.

Im Gegensatz dazu gibt es noch den Konvektionsstrom. Diese entsteht, wenn ein geladener Körper sich im Raum bewegt, $\mathbf{j}(\mathbf{r})_{\text{conv}} = \dot{\mathbf{r}} \rho_{\text{ext}}^1$. Einen solchen Konvektionsstrom, der die räumliche Verschiebung von Materie benötigt, wollen wir hier nicht betrachten. Daher werden wir den entsprechend Index von nun an immer weglassen.

Der Strom durch eine Fläche ist damit

$$I = \int_F \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f}$$

Als Beispiel sei hier ein dünner Leiter betrachtet

$$I = \int_F \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = \sigma \int_F \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = \sigma F \frac{\Delta\phi}{l} = \frac{\sigma F}{l} V = \frac{V}{R}$$

mit dem Ohmschen Widerstand $R = \frac{l}{\sigma F}$.

¹ Stellen Sie sich eine geladene Kugel, welche von Ihnen durch den Raum getragen wird.

6.1.2 Die Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung gilt immer, nicht nur in Statik. Es ist ein Gesetz, welches auf der Ladungserhaltung basiert bzw. diese beschreibt. Dort wo Ladung entsteht oder vernichtet wird, muss der Strom eine Quelle bzw. eine Senke besitzen.

$$-\delta Q = I \delta t \rightarrow -\dot{Q} \delta t = I \delta t \rightarrow \dot{Q} + I = 0$$

Dieser funktionelle Zusammenhang muss in einem beliebigen mathematischen Volumen gelten.

$$\int_V \dot{\rho}(\mathbf{r}) dV + \int_{(V)} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = 0$$

$$\int_V [\dot{\rho}(\mathbf{r}) + \text{div } \mathbf{j}(\mathbf{r})] dV = 0$$

Da das Volumen beliebig ist muss gelten

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Dieses Gesetz gilt für alle Ladungen und alle Ströme, welche wir bisher betrachtet haben

$$\rho_{\text{ges}} \leftrightarrow \mathbf{j}_{\text{ges}}, \rho_{\text{ext}} \leftrightarrow \mathbf{j}_{\text{ext}}, \rho_{\text{pol}} \leftrightarrow \mathbf{j}_{\text{pol}}$$

In der Statik gilt im Speziellen, da $\dot{\rho} = 0$:

$$\rightarrow \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$$

6.1.3 Zusammenhang zwischen Strom und externer Ladung

Allgemein gilt in der Statik $\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$. Nun definiert mir aber die Stromdichte das elektrische Feld $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})$ und das elektrische Feld definiert mir meine dielektrische Verschiebung

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r})}{\sigma(\mathbf{r})} \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

Die Divergenz der dielektrischen Verschiebung ist die externe Ladungsdichte. Daher können wir im Folgenden einen Zusammenhang zwischen Strom und externer Ladungsdichte herstellen und diesen für konkrete Fälle diskutieren.

- Wir betrachten als erstes den Fall $\sigma = \text{const}$ und $\epsilon = \text{const}$. Sie hängen also nicht vom Ort ab, das Medium ist homogen. Dann gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \rightarrow \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \rightarrow \rho_{\text{ext}} = 0$$

- Wir betrachten den Fall, dass σ und ϵ stückweise konstant aber diskontinuierlich sind an der Grenzfläche zwischen zwei Medien. Wir evaluieren wieder in einem sehr kleinen Volumen um die Grenzfläche (Modell Schuhchremedose!) die uns bekannten Differentialgleichungen. Dann gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \rightarrow \int_{(V)} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = 0$$

Aus dieser Gleichung können wir schlussfolgern, dass j_n , die Normalkomponente der Stromdichte auf der Oberfläche, stetig ist. Für die über ein Volumen integrierte dielektrische Verschiebung erhalten wir

$$\int_{(V)} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = Q_{\text{ext}}$$

$$\epsilon_0 \int_{(V)} \frac{\epsilon(\mathbf{r})}{\sigma(\mathbf{r})} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = \epsilon_0 \int_F \left(\frac{\epsilon_r}{\sigma_r} - \frac{\epsilon_l}{\sigma_l} \right) j_n df = \int_F \eta_{\text{ext}} df$$

Als entsprechenden Zusammenhang zwischen Strom und externer Ladung erhalten wir

$$\left(\frac{\epsilon_r}{\sigma_r} - \frac{\epsilon_l}{\sigma_l} \right) j_n = \frac{\eta_{\text{ext}}}{\epsilon_0}$$

Die Grenzfläche zwischen zwei Medien ist also geladen mit einer entsprechenden Oberflächenladungsdichte, z.B. mit $\epsilon_r = \epsilon_l$ aber $\sigma_r <$

$\sigma_l \rightarrow \eta_{\text{ext}} > 0$. Es gibt also so etwas wie einen Ladungsstau zum schlechter leitenden Medium hin. Es sei abschließend angemerkt, dass die Oberflächenladungsdichte einen Sprung des elektrischen Feldes verursacht, sie ist mithin eine Quelle. Dies ist aber auch notwendig, um den Strom an der Grenzfläche konstant zu enthalten.

6.2 Maxwellgleichungen der Magnetostatik

6.2.1 Das Amperésche Gesetz

So wie das experimentell gefundene Coulombsche Gesetz die Kraft zwischen zwei Ladungen beschreibt, gibt es in der Magnetostatik ein empirisch gefundenes Gesetz, welches die Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern beschreibt. Dies ist das Amperésche Gesetz².

Wir sollten daher noch einmal kurz betonen, dass alle Betrachtungen, die wir im Folgenden im Rahmen der Magnetostatik durchführen werden, in Analogie verstanden werden können zur Elektrostatik. Damit die Gesamtargumentation klar wird, hier noch einmal die Assoziationskette, wie wir ausgehend von den observablen Größen (Kraft auf Ladung) zu den Maxwell'schen Gleichungen der Elektrostatik gelangen:

Coulombkraft (Punktladung) \rightarrow Feldbegriff durch Abstraktion der Kraft auf einer Probeladung \rightarrow Feld entspringt in Quellen \rightarrow Übergang von Punktladung zu kontinuierlicher Ladungsverteilung \rightarrow Maxwellgleichung

Wir werden im Folgenden nahezu genauso vorgehen mit dem einzigen kleinen Unterschied. Wir ersetzen die Ladungsdichte mit der Stromdichte.

Wir betrachten dazu die Kraftwirkung zwischen zwei elektrisch neutralen Leitern, so dass wir keine Coulombkraft befürchten müssen. Diese Kraftwirkung einer (unendlich dünnen) Leiterschleife 1 auf eine (unendlich dünne) Leiterschleife 2 wurde experimentell gefunden und beträgt demnach

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{I_2 d\mathbf{s}_2 \times [I_1 d\mathbf{s}_1 \times (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)]}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2|^3}$$

Hierbei beschreiben \mathbf{s} Punkte auf der Leiterschleife und $d\mathbf{s}$ sind die entsprechenden vektoriellen Linienelemente über die integriert wird. Diese magnetische Kraft wird auch als Lorentzkraft bezeichnet. Man beachte hier, dass das Verhältnis von elektrischer zu magnetischer Kraft proportional zu c^2 ist.

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \rightarrow \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{Vs/Am}$$

² Vergleichbare Kräfte wurden auch von Oersted (1819 zeigte er, dass ein elektrischer Strom eine Kompassnadel ablenken konnte) und Biot-Savart (1820) diskutiert. Die Arbeiten von Amperé stammen aus der Zeit von 1820-25. Sein Hauptbeitrag bestand in der Postulierung, dass alle magnetischen Phänomene durch bewegte Ladungen verursacht werden

Beachten Sie hier bitte, die Lichtgeschwindigkeit ist eine Naturkonstante und damit fix. Die Wahl von Permittivität und Permeabilität des Vakuums ist bis zu einem gewissen Grade frei. Man definiert im Allgemeinen den Wert von $4\pi 10^{-7} \text{Vs/Am}$. Dieser Wert ist also exakt. Aus diesem Wert lässt sich dann die Permittivität des Vakuums berechnen.

Vergleichbare, allgemein gültige Aussage wie bei der Coulombkraft zum qualitativen Verhalten der Kräfte lassen sich auch für die Lorentzkraft finden. So ist die Kraft proportional zu den beiden Strömen $\propto I_1$ und $\propto I_2$ und indirekt proportional zum Abstandsquadrat $\propto 1/r^2$. Wenn die beiden Linienelemente parallel sind (und die Ströme das gleiche Vorzeichen haben), ist die Kraft anziehend; sind die beiden Linienelemente antiparallel, sind die Kräfte abstoßend. In jedem Fall ist die Kraft bei zwei parallelen Leitern senkrecht zu den Strömen.

6.2.2 Das Biot-Savartsche Gesetz

Ähnlich wie wir zum Feldbegriff in der Elektrostatik übergegangen sind in dem wir eine Probeladung betrachtet haben, können wir eine Abstraktion von Leiter 1 durchführen und ihn als einen Testkreis verstehen, welcher das magnetische Feld erzeugt von Leiter 2 mittels der auf ihn wirkenden Kraft vermisst

$$\mathbf{F}_{12} = \int_{L_1} I_1 d\mathbf{s}_1 \times \mathbf{B}_2(\mathbf{s}_1)$$

Das Magnetfeld erzeugt durch den Leiter 2 ist damit

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{s}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_2} \frac{I_2 d\mathbf{s}_2 \times (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2|^3}$$

Ein solcher Ausdruck ist in völliger Analogie zur Punktladung aufgeschrieben. Dies führt uns zum Biot-Savartschen Gesetz, welches das Magnetfeld eines unendlich dünnen stromdurchflossenen Drahtes beschreibt.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_L \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}$$

Hier ist $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ die magnetische Induktion, welche als neue Feldgröße verstanden werden muss. Diese kann mit Teststromkreisen ausgemessen werden. Die Größe besitzt die Einheit Vs/m^2 bzw. Weber/m^2 . Wir wollen diesen Term

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}$$

kurz interpretieren, um die Physik besser verstehen zu können. Dieser beschreibt also das vom Leiterstück ds erzeugte Magnetfeld $d\mathbf{B}$. Das erzeugte Magnetfeld steht dabei senkrecht auf ds und senkrecht auf $\mathbf{r} - \mathbf{s}$. Der Betrag des erzeugten Magnetfeld ist entsprechend

$$|d\mathbf{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{|ds| \sin \theta}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2}$$

Ein Beispiel zur Illustration dieser Diskussion ist die Analyse des Feldes im Mittelpunkt eines stromdurchflossenen Kreisrings. Wir wenden

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_L \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}$$

auf das konkrete Beispiel an und betrachten $\mathbf{r} = 0$, $|\mathbf{s}| = R$ und $\mathbf{s} \perp d\mathbf{f}$. Die Leiterschleife soll in der x-y-Ebene liegen. Dann gilt $d\mathbf{s} \times (0 - \mathbf{s}) = R d\mathbf{s} \times \mathbf{s} = R^2 d\phi \mathbf{e}_z$. Für die magnetische Induktion im Inneren gilt dann

$$\mathbf{B}(0) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} d\phi \frac{R^2}{R^3} \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \mathbf{e}_z$$

In der Berechnung der magnetischen Induktion von mehreren Leitern gilt wieder das Superpositionsprinzip

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i I_i \int_L \frac{d\mathbf{s}_i \times (\mathbf{r} - \mathbf{s}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i|^3} \\ &= \sum_i \mathbf{B}_i(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Der Übergang zur kontinuierlichen Stromverteilung kann gegangen werden mittels $I d\mathbf{s} = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \Delta F d\mathbf{s} = \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV$, so dass gilt

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Dies ist die magnetische Induktion einer beliebigen Stromdichteverteilung, welche nicht notwendigerweise an Drähte gebunden sein muss. Damit definiert sich die allgemeine Lorentzkraft als

$$\mathbf{F} = \int_V dV [\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]$$

6.3 Die Maxwellgleichungen

6.3.1 Die differentielle Formulierung

Betrachten wir als erstes die Quellen des Magnetfeldes. Dazu können wir die Gleichung für die magnetische Induktion wie folgt umformen

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \text{grad}_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \text{grad}_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot}_r \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass $\text{rot}[\mathbf{A}u(\mathbf{r})] = \text{grad } u(\mathbf{r}) \times \mathbf{A}$ ist. Die magnetische Induktion lässt sich damit immer

als ein Wirbelfeld schreiben. Da die Divergenz eines Rotationsfeldes verschwindet, muss gelten

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

Das ist die erste Maxwellsche Gleichung der Magnetostatik, Sie besagt, dass es keine Quellen des magnetostatischen Feldes gibt (keine magnetischen Ladungen o. magnetische Monopole). Das magnetische Feld verläuft entlang geschlossener Feldlinien.

Durch Anwenden der Rotation auf den letzten Ausdruck, erhält man die zweite Maxwellsche Gleichung der Magnetostatik.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_r \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot}_r \operatorname{rot}_r \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\operatorname{grad}_r \operatorname{div}_r \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \Delta_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{grad}_r \int_V dV' \operatorname{div}_r \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

In der Umformung von der zweiten zur dritten Zeile haben wir ausgenutzt, dass $\Delta_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ beträgt. Anschliessende Evaluation des Integrals über die gestrichene Ortskoordinate führt zur Stromdichte im Raumpunkt \mathbf{r} .

Wir formen weiter um

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_r \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{grad}_r \int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \operatorname{grad}_{r'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{grad}_r \int_V dV' \operatorname{div}_{r'} \left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{grad}_r \int_{(V)} d\mathbf{f}' \left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Hier haben wir im ersten Schritt ausgenutzt, dass $\operatorname{div}[\mathbf{A}u(\mathbf{r})] = \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad}u(\mathbf{r})$ ist und im zweiten, dass $\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ ist. Das Integral über die Oberfläche abschließend verschwindet, da $\mathbf{j}(\mathbf{r}') \rightarrow 0$ für $|\mathbf{r}'| \rightarrow \infty$. Die zweite Maxwellgleichung der Magnetostatik lautet damit:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

Diese Gleichung wird als das Amperésches oder Oerstedtsches Gesetz bezeichnet. Die Wirbel des magnetostatischen Feldes sind die stationären Ströme. Die magnetische Induktion ('Magnetfeld') ist für stationäre Ströme ein verwirbeltes, quellenfreies Feld. Wie erwartet, haben wir keine Kopplung zu elektrischen Feldern.

6.3.2 Die integrale Formulierung

Eine integrale Formulierung erhalten wir, wenn wir die erste Maxwellgleichung der Magnetostatik integrieren über ein Volumen

$$\int_V dV \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_F \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = 0$$

Für die zweite Gleichung integrieren wir über eine Fläche

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = \mu_0 \int_F \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f}$$

$$\int_{(F)} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I_f$$

wobei I_f der Strom ist, der durch den Rand der umschlossenen Fläche fließt.

Wir wollen im Folgenden ein Beispiel rechnen, welche die Anwendung der integralen Formulierung der Maxwell'schen Gleichungen demonstrieren sollen.

Magnetfeld eines unendlichen, stromdurchflossenen Zylinders

Gegeben sei ein unendlich ausgedehnter stromdurchflossener Zylinder mit endlichem Radius

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \begin{cases} j_0 \mathbf{e}_z & r < R \\ 0 & r \geq R \end{cases}$$

Wir wollen mit Hilfe der zweiten Maxwellgleichung

$$\int_{(F)} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I_f$$

das Magnetfeld ausrechnen. Aufgrund der Zylindersymmetrie des Problems wird das Magnetfeld nur eine Komponente in tangentialer Richtung besitzen, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_\phi(\mathbf{r}) \mathbf{e}_\phi$. Das Linienelement beträgt $d\mathbf{r} = rd\phi \mathbf{e}_\phi$ und das entsprechende Flächenelement $d\mathbf{f} = df \mathbf{e}_z = r dr d\phi \mathbf{e}_z$. Wir müssen rechnen

$$\int_0^{2\pi} B_\phi(\mathbf{r}) r d\phi = \mu_0 j_0 \int_0^r \int_0^{2\pi} r d\phi dr$$

Für den Innenraum erhalten wir

$$2\pi r B_\phi(\mathbf{r}) = \mu_0 j_0 2\pi \frac{r^2}{2}$$

$$B_\phi(\mathbf{r}) = \mu_0 j_0 \frac{r}{2}$$

Für den Außenraum erhalten wir

$$2\pi r B_\phi(\mathbf{r}) = \mu_0 j_0 2\pi \frac{R^2}{2} = \mu_0 I$$

$$B_\phi(\mathbf{r}) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

Das Magnetfeld im Außenraum verhält sich wie das Magnetfeld eines dünnen Drahtes.

6.4 Das Vektorpotential und Eichfreiheit

Im Prinzip können wir jetzt schon das Grundproblem der Magnetostatik vollständig lösen. Bei einer vorgegebenen Stromdichteverteilung können wir mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetz die magnetische Induktion ausrechnen. Dies ist in Analogie zur Elektrostatik. Gerade dort haben wir aber auch gesehen, dass wir mit Einführen des elektrostatischen Potential eine wesentlich elegantere Lösung für das Problem erhalten können. Etwas vergleichbares wollen wir auch im Rahmen der Magnetostatik durchführen, was uns abschließend zur Einführung des Vektorpotentials bringen wird.

Als Erinnerung sei noch einmal kurz wiederholt, wie die Argumentation für die Elektrostatik ausgesehen hat bzw. eine der beiden möglichen Argumentationsketten. Da die Rotation des elektrischen Feldes verschwindet, können wir das elektrische Feld auch als Gradient eines skalaren Potentials schreiben³. Dieses genügt dann der Poissongleichung, welche wir mit der Methode der Greenschen Funktion sehr einfach lösen können. Die Greensche Funktion ist ebenfalls Lösung der Poissongleichung für eine punktförmige Quelle. Potential und Greensche Funktion genügen dabei natürlichen Randbedingungen, welche wir benötigen, um die Poissongleichung zu lösen. Mit Hilfe der Multipolentwicklung kann dann das Potential einer beliebigen räumlich begrenzten Ladungsverteilung explizit berechnet werden, wenn die Multipolmomente der Ladungsverteilung einmal bekannt sind.

Alles was wir jetzt machen wollen, ist, ein Vektorpotential einführen und zeigen, dass die einzelnen Komponenten des Vektorpotentials bei einer geeigneten Eichung ebenfalls Lösung einer Poissongleichung für die einzelnen Komponenten der Stromverteilung sind. Auch das Vektorpotential wird dann natürlichen Randbedingungen genügen. Das erlaubt uns anschließend, alle bekannten Lösungen der Elektrostatik unmittelbar auf die Magnetostatik zu übertragen, ohne noch einmal neue Rechnungen durchführen zu müssen.

Wir gehen im Folgenden von der ersten Maxwellgleichung der Magnetostatik aus, die besagt, dass die Divergenz der magnetischen Induktion verschwindet, $\text{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$. Da die Divergenz eines Rotorfeldes immer verschwindet ($\text{div} \text{rot } \mathbf{A} = 0$), können wir die magnetische Induktion immer als Rotation eines anderen Vektorfeldes darstellen

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

$\mathbf{A}(\mathbf{r})$ bezeichnet hier das Vektorpotential. Einsetzen in die zweite Maxwellsche Gleichung liefert

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \text{rot } \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \\ \text{grad } \text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

³ Die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet immer.

Das ist keine sehr angenehme Darstellung, da alle vektoriellen Komponenten miteinander verkoppelt sind.

Wir erinnern uns aber, dass das skalare Potential nur bis auf eine Konstante bestimmt ist. Ein Potential $\phi'(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) + C$ führt zur dem gleichen elektrischen Feld, welches die eigentlich observable Größe ist. Das Potential muss daher als mathematisches Konstrukt verstanden werden, mit dem wir einfacher rechnen können⁴. Diese Freiheit in der Wahl des offsets des skalaren Potentials wird als Eichfreiheit verstanden. Das Potential wird transformiert durch eine Eichtransformation. Es gibt viele Eichtransformationen; man wählt aber praktischerweise eine solche, in welche die transformierten Gleichungen eine möglichst einfache mathematische Struktur annehmen. Dies ist ein grundlegendes Konzept der theoretischen Physik.

⁴ Das Potential ist eine skalare Größe, während das elektrische Feld eine vektorielle Größe ist.

Das Ziel der im Folgenden durchzuführenden Eichtransformation ist die Entkopplung der verschiedenen vektoriellen Komponenten in der obigen Gleichung. Wir erreichen dies, in dem wir ein neues Vektorpotential $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ finden, für das gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}'(\mathbf{r})$$

Da $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f(\mathbf{r}) = 0$ gilt, können wir die Eichtransformation

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \operatorname{grad} f(\mathbf{r})$$

wählen. Wir können also den Gradienten eines zunächst beliebigen skalaren Potentials zu der dem Vektorpotential hinzuaddieren, ohne die sich daraus ergebende magnetische Induktion zu verändern. Die Invarianz der magnetischen Induktion unter dieser Eichtransformation lässt sich leicht zeigen

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \operatorname{rot} \operatorname{grad} f(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

Die Frage ist, wie muss das skalare Feld $f(\mathbf{r})$ gewählt werden, damit $\operatorname{div} \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = 0$ gilt? Dies ist einfach zu beantworten. Wir gehen dabei davon aus, dass das ursprüngliche Vektorpotential nicht quellfrei ist. Es sei

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r})$$

Unser Ziel ist es

$$\operatorname{div} \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = 0 \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \operatorname{grad} f(\mathbf{r})$$

Wir suchen also eine passende Funktion $f(\mathbf{r})$, welches uns genau zu einem Vektorpotential führt, welches quellfrei ist.

Wir suchen

$$\operatorname{div} \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \operatorname{div} \operatorname{grad} f(\mathbf{r}) = 0$$

$$0 = g(\mathbf{r}) + \Delta f(\mathbf{r}) \rightarrow \Delta f(\mathbf{r}) = -g(\mathbf{r})$$

Die letzte Gleichung besagt, wie bei einer gegebenen Quelldichte des ursprünglichen Vektorpotentials die Korrekturfunktion $f(\mathbf{r})$ gewählt werden muss, damit das Vektorpotential quellfrei wird. Im Speziellen ist das die Lösung einer Potentialgleichung. Das Auffinden dieser Lösung ist immer möglich mit den Methoden, die wir in der Elektrostatik kennengelernt haben. Wir können daher das Vektorpotential immer so eichen (verändern ohne die Werte einer observablen Größe zu beeinflussen), dass die Divergenz verschwindet.

Beachten Sie bitte, dass wir in den seltensten Fällen interessiert sind, wie diese Funktion $f(\mathbf{r})$ genau aussieht. Es ist für unsere Belange völlig ausreichend zu wissen, dass sie existiert!

Dieser Art der Eichung nennt man Coulomb-Eichung.

$$\operatorname{div} \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = 0$$

Die dazugehörige Eichtransformation lautet

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \operatorname{grad} f(\mathbf{r})$$

Im Folgenden wollen wir immer von einem geeignet geeichten Vektorpotential ausgehen, und wir bezeichnen dieses nicht mehr als eine gestrichene, sondern nur noch als eine ungestrichene Größe, $\mathbf{A}'(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Mit dem Verschwinden der Divergenz des Vektorpotentials, reduziert sich die Gleichung

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

zu einer Poissongleichung, in der jede Komponente des Vektorpotentials assoziiert ist mit einer Komponente der Stromdichte.

$$-\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

Diese Entkopplung stellt eine enorme Reduzierung dar. Alles was Sie gelernt haben über Lösungen der Poissongleichungen können Sie unmittelbar anwenden. Speziell betrachten wir hier eine endliche Stromverteilung und natürliche Randbedingungen

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow \infty$$

So lautet die allgemeine Lösung für eine endliche Stromdichteverteilung

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_V dV' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

mit $-\frac{1}{\mu_0} \Delta G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rightarrow G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$. Die Greensche Funktion genügt hier ebenfalls natürlichen Randbedingungen

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow \infty$$

Was wir noch zeigen können, ist das Verschwinden der Divergenz dieses Vektorpotentials, dass also in der Tat gilt $\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_r \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \operatorname{grad}_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \operatorname{grad}_{r'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \operatorname{div}_{r'} \left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \operatorname{div}_{r'} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \\ &= 0 \end{aligned}$$

Der erste Term verschwindet nach Anwenden des Gausschen Satzes (Stromdichteverteilung soll im endlichen lokalisiert sein und verschwindet somit auf der Oberfläche eines Randes im Unendlichen) und der zweite Term verschwindet, da die Divergenz der Stromdichteverteilung als Konsequenz der Kontinuitätsgleichung verschwindet.

6.5 Multipolentwicklung des Vektorpotentials einer endlichen Stromverteilung

Genauso wie wir die Multipolentwicklung in der Elektrostatik durchgeführt haben, können wir sie in der Magnetostatik durchführen. Ziel ist es, einen einfachen Ausdruck für das Vektorpotential in großer Entfernung zu einer endlichen Stromverteilung zu erhalten. Ausgangspunkt ist die Gleichung für das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_V dV' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Dies sieht identisch aus zu der Gleichung der Elektrostatik, wenn wir die folgende Ersetzung machen

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \quad \text{und} \quad \rho(\mathbf{r}) \leftrightarrow j_i(\mathbf{r})$$

Wir können mit dieser Ersetzung das Ergebnis in Analogie direkt hinschreiben

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{j_{k_1 \dots k_l}^i}{l! r^{2l+1}} x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_l}$$

mit den Multipolmomenten der Stromverteilung

$$j_{k_1 \dots k_l}^i = \frac{4\pi}{\mu_0} (-1)^l \int_V dV' j_l(\mathbf{r}') r'^{2l+1} G_{0, k_1 \dots k_l}(\mathbf{r}')$$

Hier entspricht wieder $l = 0$ der 0^{ten} Ableitung und $l = 1$ der 1^{ten} der Greenschen Funktion. Diese wollen wir im Folgenden konkretisieren, um ausgehend von dem allgemein gültigen Ausdruck etwas konkreter und physikalisch einfach zu diskutierende Ausdrücke zu bekommen.

Die Multipolmomente des Vektorpotentials einer lokalisierten Stromdichteverteilung im Vakuum in einer expliziten Reihe lauten demnach

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{4} j_0^i + \frac{1}{r^3} j_{1j}^i x_j + \dots \right)$$

Der erste Term ist hier der Monopol, der zweite der Dipolterm. Diese können expliziert durch Anwendung der Gleichung für die Momente der Stromverteilung

$$j_{k_1 \dots k_l} = \frac{4\pi}{\mu_0} (-1)^l \int_V dV' j_l(\mathbf{r}') r'^{2l+1} G_{0,k_1 \dots k_l}(\mathbf{r}')$$

berechnet werden.

$$\begin{aligned} j_0^i &= \frac{4\pi}{\mu_0} \int_V dV' j_i(\mathbf{r}') r' G_0(\mathbf{r}') = \frac{4\pi}{\mu_0} \int_V dV' j_i(\mathbf{r}') r' \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r'} = \int_V dV' j_i(\mathbf{r}') \\ j_{1j}^i &= \frac{4\pi}{\mu_0} (-1) \int_V dV' j_i(\mathbf{r}') r'^3 G_{0,j} = -\frac{4\pi}{\mu_0} \int_V dV' j_i(\mathbf{r}') r'^3 \left(-\frac{x_j}{r'^3} \right) \frac{\mu_0}{4\pi} \\ &= \int_V dV' j_i(\mathbf{r}') x_j' \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$A_i(\mathbf{r}) = A_i^{\text{MP}}(\mathbf{r}) + A_i^{\text{D}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int_V dV' j_i(\mathbf{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int_V dV' j_i(\mathbf{r}') x_j x_j' + \dots$$

In einer vektoriellen Formulierung schreibt sich das Potential als

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') + \dots$$

Die einzelnen Terme wollen wir im Folgenden diskutieren.

Magnetische Monopole

Der erste Term bezeichnet man als das magnetische Monopol.

$$\mathbf{A}_{\text{MP}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}')$$

Die Vermutung muss ganz klar die sein, dass der magnetische Monopol verschwindet. Wir haben immerhin ständig betont, dass es keine magnetische Ladung gibt, welches als Äquivalent zur elektrischen Ladung existieren könnte. Dies lässt sich auch mathematisch beweisen.

Da wir die Stromdichte schreiben können als $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = [\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \text{grad}] \mathbf{r} \rightarrow j_k x_{i,k} = j_k \delta_{ik} = j_i$, können wir auch $j_k x_{i,k} = (j_k x_i)_{,k} - x_i j_{k,k}$ in Indexnotation schreiben. Da die Divergenz der Stromdichte in der Magnetostatik verschwindet, ist der letzte Term null. Somit können wir weiter schreiben

$$\int_V dV' j_i = \int_V dV' (j_k x_i)_{,k} = \int_{(V)} df_k' \cdot (j_k x_i)$$

Da das Integral über die Oberfläche des Volumens außerhalb der Stromverteilung geht, verschwindet das Integral

$$\mathbf{A}_{\text{MP}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$$

Dies ist eine logische Konsequenz der Tatsache, dass die Divergenz des Magnetfeldes verschwindet ($\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$). Was eine anderer Ausdruck dafür ist, dass es keinen magnetischen Monopol gibt.

Magnetische Dipole

Den zweiten Term in der obigen Reihenentwicklung bezeichnet man als magnetischen Dipol

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')$$

Wir können diesen Term noch in einer Form überführen, welcher die Analogie zum elektrischen Dipol sichtbar werden lässt. Dazu formen wir den Integralkern um und zeigen, dass in dem Ausdruck

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') = [\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')] \mathbf{r}' - \mathbf{r} \times [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')]$$

der Term auf der linken Seite identisch ist zum ersten Term auf der rechten Seite, aber mit unterschiedlichem Vorzeichen. Wir wollen also zeigen, dass

$$\int_V dV' (x_l x'_l) j_i(x'_k) = - \int_V dV' [x_l j_l(x'_k)] x'_i$$

Dazu gehen wir wie folgt vor

$$\begin{aligned} \int_V dV' x'_i [x_l j_l(x'_k)] &= \int_V dV' x'_i [x_l (j_k x'_l)_{,k}] = x_l \int_V dV' x'_i (j_k x'_l)_{,k} \\ &= x_l \int_{(V)} df'_k x'_i (j_k x'_l) - x_l \int_V dV' x'_i j_k x'_{i,k} \\ &= -x_l \int_V dV' x'_l j_i = - \int_V dV' (x_l x'_l) j_i \end{aligned}$$

In dem ersten Schritt haben wir ein Zwischenergebnis aus der Betrachtung des Monopols verwendet und für den dritten Schritt haben wir wieder partiell integriert und den Gausschen Satz auf den ersten Term angewandt. Dieser Term verschwindet dann wieder bei einer räumlich lokalisierten Stromdichteverteilung. Vektoriell aufgeschrieben ist dies genau das, was wir zeigen wollten

$$\int_V dV' [\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')] \mathbf{r}' = - \int_V dV' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}')$$

Damit erhalten wir aus dem obigen Ausdruck

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') = [\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')] \mathbf{r}' - \mathbf{r} \times [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')]$$

den folgenden Ausdruck

$$2 \int_V dV' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') = - \int_V dV' \mathbf{r} \times [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')]$$

Für das Vektorpotential des magnetischen Dipols bedeutet dies

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \frac{1}{2} \int_V dV' [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')]$$

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

mit dem magnetischen Dipolmoment

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V dV' [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')]]$$

Merken Sie sich bitte, dass der niedrigster Term der Entwicklung ein magnetischer Dipol ist. ⁵ Eine stationäre Stromverteilung ruft ein magnetisches Dipolmoment hervor. Es gilt eine formale Äquivalenz zwischen einem Strom und einem magnetischen Dipol. Beachten Sie bitte: atomare Ströme besitzen ein magnetisches Dipolmoment \mathbf{m} . Polarisierte Moleküle besitzen ein elektrisches Dipolmoment \mathbf{p} .

Im Speziellen gilt für einen Kreisstrom in einem dünnen Draht

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' \rightarrow I ds'$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} I \int_{(F)} (\mathbf{s}' \times d\mathbf{s}') = \frac{1}{2} I \int_{(F)} 2d\mathbf{f}' = I\mathbf{F}$$

Wir sehen hier, dass ein Ringstrom I äquivalent ist zu einer Dipolflächendichte \mathbf{m}/F . Ab einem gewissen Abstand haben sie das gleiche Vektorpotential.

Aus dem Vektorpotential lässt sich auch leicht das Magnetfeld ausrechnen.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \left[\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}r^2}{r^5}$$

Dies ist ein klassisches Dipolfeld.

6.6 Das Magnetfeld in Materie

6.6.1 Die Magnetisierung $\mathbf{M}(\mathbf{r})$

Bisher haben wir uns immer eine feste Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ vorgegeben und haben die dazu gehörende magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ berechnet. Die Stromdichte haben wir als einen makroskopischen Strom betrachtet, der assoziiert ist mit dem Transport makroskopischer Ladungen, z.B. Elektronen im Leiter.

Jetzt wollen wir die Felder in magnetischer Materie betrachten. Diese sind charakterisiert durch die Möglichkeit molekulare (Ring)Ströme zu induzieren, welche molekularen magnetischen Dipolen entsprechen und entsprechende Felder hervorrufen. Ziel muss es wieder sein, eine selbstkonsistente Beschreibung der magnetischen Induktion zu erhalten. Diese induziert die Ringströme und deren abgestrahltes Feld wirkt aber auch auf das treibende Feld zurück und überlagert dieses.

Wir gehen auch hier wieder in völliger Analogie zur Elektrostatik vor, um die magnetische Antwort von Materie zu berücksichtigen. Unser Ziel wird es sein, einen Zusammenhang zwischen dem räumlich

⁵Erinnern Sie sich bitte in Analogie zum skalaren Potential des Punktdipoles $\phi_{DP}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$

gemittelten molekularen Vektorpotential $\langle \mathbf{A}_{\text{mol}} \rangle$ und der molekularen Stromdichte \mathbf{j}_{mol} herzustellen. Wie in der Elektrostatik gehen wir wieder folgendermaßen vor.

Wir kennen das Vektorpotential eines Dipols

$$\mathbf{A}^{(i)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}^{(i)} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

Dies entspricht einem atomaren Strom. Mit einer Summe über alle Dipole können wir eine Dipoldichte einführen

$$\mathbf{M}_{\text{mol}}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{m}^{(i)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

Wir mitteln formal das molekulare Potential in einem ausreichend großen Volumen. Dies ist ausreichend groß relativ zur Ausdehnung der Atome, aber immer noch ausreichend klein, um alle räumlichen Änderungen dieses gemittelten Vektorpotentials richtig zu beschreiben.

$$\langle \mathbf{A}_{\text{mol}}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d\bar{V} \mathbf{A}_{\text{mol}}(\mathbf{r} + \bar{\mathbf{r}})$$

Bei der Benutzung von

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d\bar{V} \mathbf{M}_{\text{mol}}(\mathbf{r} + \bar{\mathbf{r}})$$

als mittlere Dipoldichte erhalten wir in Analogie zur Elektrostatik

$$\langle \mathbf{A}_{\text{mol}}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Den Integranden selbst können wir noch einmal umschreiben durch eine geeignete Nebenrechnung

$$\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \text{grad}_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{rot}_{\mathbf{r}'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') - \text{rot}_{\mathbf{r}'} \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]$$

Den letzten Schritte konnten wir durchführen, da $\text{rot}[\mathbf{A}(\mathbf{r})u(\mathbf{r})] = \text{grad}u(\mathbf{r}) \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) + u(\mathbf{r})\text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Auf den letzten Term können wir den verallgemeinerten Gausschen Satz anwenden $\int_V dV \text{rot}\mathbf{C} = - \int_{(V)} \mathbf{C} \times d\mathbf{f}$ und können das Ergebnis der Nebenrechnung in den ursprünglichen Ausdruck einsetzen

$$\langle \mathbf{A}_{\text{mol}}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\text{rot}_{\mathbf{r}'} \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_{(V)} \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \times d\mathbf{f}'$$

Der letzte Ausdruck verschwindet wieder bei einem Integral im Unendlichen. Durch Vergleich mit dem Vektorpotential einer Stromverteilung erhalten wir

$$\langle \mathbf{A}_{\text{mol}}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}_{\text{Mol}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

folgt hier der molekulare Strom

$$\mathbf{j}_{\text{Mol}}(\mathbf{r}) = \text{rot}\mathbf{M}(\mathbf{r})$$

Die Wirbel des Magnetisierungsfeldes sind die molekularen Ströme. So wie wir in der Elektrostatik die Anwesenheit von Dielektrika beschrieben haben als eine Polarisationsladungsdichte, können wir in der Magnetostatik die Anwesenheit von Materie beschreiben durch eine molekulare Stromdichte.

6.6.2 Die Maxwellgleichungen

Im Folgenden wollen wir die Maxwellgleichungen (und anschließend auch die Übergangsbedingungen) der Magnetostatik in magnetischen Materialien finden. Wie wir oben gesehen haben, können wir die Wirkung von Materie mit Hilfe einer induzierten Magnetisierung ausdrücken. Deren Wirbel sind die molekularen Ströme. Der funktionelle Zusammenhang zwischen Magnetisierung und magnetischer Induktion, zur vollständigen Lösung der Gleichungen, würden wir im Folgenden noch diskutieren. Das wären wieder die Materialgleichungen. Diese müssen zusätzlich zu den Maxwellgleichungen definiert werden, damit wir diese lösen können.

Also, zur Berücksichtigung von Materie brauchen wir nichts weiter zu tun, als den Gesamtstrom und nicht nur den makroskopischen Strom zu betrachten.

$$\mathbf{j}_{\text{ges}}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_{\text{Mol}}(\mathbf{r})$$

Aus der zweiten Maxwellgleichung (die erste bleibt unverändert) wird so

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mu_0 \mathbf{j}_{\text{ges}}(\mathbf{r}) = \mu_0 [\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_{\text{Mol}}(\mathbf{r})] \\ &= \mu_0 [\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}) + \text{rot}\mathbf{M}(\mathbf{r})] \end{aligned}$$

Damit ergeben sich als die beiden Maxwellgleichungen der Magnetostatik

$$\text{rot} \left[\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{M}(\mathbf{r}) \right] = \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}) \quad \text{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

Die Gleichungen können wir noch einmal (formal) vereinfachen, wenn wir ein passendes Hilfsfeld einführen, das Magnetfeld in Materie. Dieses ist zunächst einmal einfach definiert als

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{M}(\mathbf{r})$$

Beachten Sie bitte, dies ist identisch zur historischen Definition von

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 [\mathbf{H}(\mathbf{r}) + \mathbf{M}(\mathbf{r})]$$

In dieser Form gibt es weiterhin eine formale Symmetrie zur Elektrostatik. Es gibt nur den kleinen Unterschied, dass hier der Vorfaktor μ_0 explizit vor der Summe beider Feldgrößen steht. Das ist aber kein Problem und die Gleichungen können durch eine einfache Reskalierung

auch in eine exakte Symmetrie überführt werden. Vorsicht ist geboten, wenn Sie mit verschiedenen Lehrbüchern lernen. Diese schreiben die Vorfaktoren in der Definition dieser Hilfsfelder in Materie unter Umständen leicht unterschiedlich auf.

Beachten Sie aber bitte, experimentell messbare Felder ⁶ sind das \mathbf{E} und das \mathbf{B} Feld. Das \mathbf{D} und das \mathbf{H} Feld sind zunächst einmal nur Hilfsgrößen. Die Maxwellgleichungen der Magnetostatik in Materie lauten damit abschließend

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}) \quad \operatorname{div}\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\operatorname{div}\mathbf{M}(\mathbf{r}) \leftrightarrow \operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

Die Wirbel des \mathbf{H} Feldes sind die makroskopischen Ströme, die Quellen des \mathbf{H} Feldes sind die Senken des \mathbf{M} Feldes, das \mathbf{B} -Feld ist quellenfrei also:

Wirbel	Quellen
$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{j}_{\text{ges}}(\mathbf{r})$	$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \rightarrow \text{keine}$
$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r})$	$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \rightarrow \text{Senken von } \mathbf{M}(\mathbf{r})$
$\mathbf{M}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{j}_{\text{Mol}}(\mathbf{r})$	$\mathbf{M}(\mathbf{r}) \rightarrow \text{Senken von } \mathbf{H}(\mathbf{r})$

⁶ Auf der Basis von Kräften.

6.6.3 Die Materialgleichungen

Genauso wie in der Elektrostatik, müssen wir belastbare Modelle für die Magnetisierung finden, welche die Materialantwort richtig beschreiben. Dafür können wir zum einen einen linearen Zusammenhang definieren, welcher z.B. Para- und Diamagnetismus sehr gut beschreibt, $\mathbf{M}(\mathbf{r}) \propto \mathbf{B}(\mathbf{r})$. Wir können aber auch einen nichtlinearen Zusammenhang definieren, wie er z.B. benötigt wird bei Ferromagnetismus $\mathbf{M}(\mathbf{r}) [\mathbf{B}(\mathbf{r})]$.

Linearer Zusammenhang: Paramagnetismus und Diamagnetismus

Allgemein können wir schreiben

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

mit der magnetischen Suszeptibilität χ_m . Der etwas ungewöhnlich aussehende Vorfaktor erklärt sich aus der Tatsache, dass historisch ein funktionelle Zusammenhang zwischen $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ gefunden wurde, der dann einfach proportional zu χ_m war. Damit ergibt sich

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{M}(\mathbf{r}) \right] = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{1 + \chi_m} \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

Mit Definition der Permeabilität $\mu = 1 + \chi_m$ ergibt sich

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0 \mu} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \leftrightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mu \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

Damit folgt für konstantes μ die Potentialgleichung

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mu \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r})$$

Diese Gleichung ist identisch zur Gleichung für die Potentialberechnung im Vakuum, wenn wir nur $\mu_0 \rightarrow \mu_0\mu$ ersetzen.

Als ein erstes Beispiele für diese Art der Materialgleichung gilt der Paramagnetismus, z.B. bei O_2 oder Al. Hier haben wir eine nicht abgeschlossene Elektronenschale, welche einen Drehimpuls besitzt. Diese führt zu einem molekularen Kreisstrom, was wiederum zu einem permanenten molekularen magnetischen Dipolmoment \mathbf{m} führt. Dieses ist aber zunächst noch ungerichtet. Erst ein vorhandenes \mathbf{B} Feld richtet dieses magnetischen Momente partiell aus. In diesen Materialien ist die magnetische Suszeptibilität größer als 0, so dass die Permeabilität größer ist als 1. Die magnetische Suszeptibilität ist meistens aber auch sehr viel kleiner als 1. Die magnetische Suszeptibilität ist indirekt proportional zur Temperatur, da eine endliche Temperatur der Ordnung der molekularen Ringströme entgegenwirkt. Diese Art der Materialantwort entspricht der von polarisierten Molekülen, welche wir als Orientierungspolarisation kennengelernt haben.

Ein zweites Beispiel für eine lineare Materialantwort ist der Diamagnetismus. Er tritt z.B. bei H_2 , H_2O , N_2 oder Ag auf. Er tritt auf bei Molekülen oder Atomen mit einer abgeschlossenen Elektronenschale, solche die also edelgasähnlich sind. Dort induziert erst ein externes Magnetfeld Kreisströme, welche dem Feld entgegenwirken. In Konsequenz ist die magnetische Suszeptibilität kleiner als 0 und die Permeabilität somit auch kleiner als 1. Der Betrag der magnetische Suszeptibilität ist selbst aber auch wieder sehr klein. Er ist unabhängig von der Temperatur.

Ferromagnetismus

Ferromagnetismus ist eine Art Sättigungsmagnetismus in den Weißschen Bezirken. Diese Weißschen Bezirken sind normalerweise stochastisch orientiert und führen zu einer im Mittel verschwindenden Magnetisierung $\langle \mathbf{M}(\mathbf{r}) \rangle = 0$. Ein äußeres Feld führt aber zur Ausrichtung der Weißschen Bezirke und somit zu einer Magnetisierung als Funktion der magnetischen Induktion $\mathbf{M}(\mathbf{r}) [\mathbf{B}(\mathbf{r})]$. Diese Prozess ist nichtlinear. Oberhalb einer kritischen Temperatur (T_C Curie-Temperatur) beobachtet man einen Phasenübergang und die Materialien verhalten sich wie normale Paramagneten, bei denen die Suszeptibilität dann indirekt proportional zur Temperatur ist $\chi_m \propto \frac{1}{T-T_C}$. Diese kritische Temperatur ist bei Eisen z.B. 774°C und bei Nickel 372°C .

6.6.4 Übergangsbedingungen für die Felder

In Analogie zur Elektrostatik muss man die Maxwellgleichungen an der Grenzfläche zwischen zwei Medien evaluieren (Modell Schuhcremedose) und Rückschlüsse auf die entsprechenden Normal- bzw. Tangential-

komponenten ziehen, welche durch die entsprechenden Gleichungen diskutiert werden.

Für eine stückweise konstante Permeabilität erhält man so als Übergangsbedingung

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 \rightarrow \mathbf{B}_n(\mathbf{r}) \text{ stetig} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{H}_{t1}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_{t2}(\mathbf{r}) = [\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r})]_{\text{OB}}\end{aligned}$$

Da die Oberflächenströme meistens null sind, geht die Tangentialkomponente des Magnetfeldes ebenfalls stetig über.

6.6.5 *Stromfreie Probleme bei vorgegebener Magnetisierung*

In Analogie zur Elektrostatik in Dielektrika wollen wir uns abschließend eine Klasse von Problemen ansehen, bei welcher wir uns eine Magnetisierung $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ vorgeben, um dann sich das daraus ergebende Magnetfeld zu berechnen. Dabei sollen keine zusätzlichen makroskopischen Ströme auftreten $\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}) = 0$.

Das magnetostatische Potential

Die Grundgleichungen, welche wir lösen möchten, lauten also

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= 0\end{aligned}$$

Um diese Gleichung zu lösen, wollen wir alles auf das \mathbf{H} -Feld umstellen. Dieses wird dann Gleichungen genügen, welche das exakte Analogon zu Gleichungen der Elektrostatik sind, so dass wir dann alle dort gefundenen Ergebnisse formal übertragen können. Die Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0$$

erlaubt es zunächst ein skalares Potential einzuführen.

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \phi_m(\mathbf{r})$$

Dieses wird oftmals als magnetostatisches Potential bezeichnet. Die erste Gleichung können wir umschreiben zu

$$\operatorname{div} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\operatorname{div} \mathbf{M}(\mathbf{r}) = \rho_m(\mathbf{r})$$

Hier ist formal eine magnetische Ladungsdichte eingeführt worden, welche die Analogie explizit sichtbar werden lassen soll. Es gibt natürlich keine physikalisch sinnvolle magnetische Ladungen. Wir können auch eine magnetische Gesamtladung definieren (mit dem Gausschen Satz hier als Oberflächenintegral formuliert)

$$Q_m = - \int_{(V_m)} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r})$$

Kombination der beiden Gleichung ergibt

$$\Delta\phi_m(\mathbf{r}) = -\rho_m(\mathbf{r}) = \operatorname{div}\mathbf{M}(\mathbf{r})$$

Damit können formal alle aus der Elektrostatik bekannten Lösungen für 'Probleme mit vorgegebener Ladungsverteilung im Vakuum' übernommen werden. Es müssen lediglich die beiden folgenden Ersetzungen gemacht werden: $\epsilon_0 \rightarrow 1$ und $\rho(\mathbf{r}) \rightarrow -\operatorname{div}\mathbf{M}(\mathbf{r})$.

Also gilt für eine räumlich begrenzte Magnetisierung:

$$\phi_m(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{\operatorname{div}_{\mathbf{r}'} \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}_r \int_V dV' \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Für die Berechnung des Potentials in großer Entfernung von der Magnetisierung kann die folgende Näherung wieder durchgeführt werden $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r}$. Damit ergibt sich für das Potential in niedrigster Ordnung

$$\phi_m(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}_r \frac{1}{r} \int_V dV' \mathbf{M}(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

mit $\mathbf{m} = \int_V dV' \mathbf{M}(\mathbf{r}')$. Eine beliebige Materieverteilung mit vorgegebener Magnetisierung erzeugt damit ein Dipolfeld. Das entsprechende Magnetfeld kann dann wieder berechnet werden mittels $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\phi_m(\mathbf{r})$.

Homogene Magnetisierung im endlichen Volumen

Im Folgenden wollen wir noch kurz explizit eine Volumen- und Oberflächenmagnetisierung berücksichtigen. Zur Erinnerung, wie wir das beschrieben haben in der Elektrostatik:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{pol}}(\mathbf{r}) &= -\operatorname{div}\mathbf{P}(\mathbf{r}) \rightarrow \text{Volumenladung} \\ \eta_{\text{pol}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_n \rightarrow \text{Oberflächenladung} \end{aligned}$$

Diese Aufteilung können wir auch in der Magnetostatik bei der Berechnung des magnetischen Potentials durchführen

$$\phi_m(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{\operatorname{div}_{\mathbf{r}'} \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_{(V)} df' \frac{\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Bei einer quellenfreien Magnetisierung ergibt sich so

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{(V)} df' \frac{\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Als Beispiel können wir eine homogen magnetisierte Kugel in voller Analogie zur homogenen elektrischen Polarisation betrachten und die Ergebnisse von dort übernehmen.

Das konstante Magnetfeld im Inneren beträgt $\mathbf{H}_{\text{in}} = -\frac{\mathbf{M}}{3}$, das Magnetfeld im Außenraum entspricht dem eines Dipols mit dem Dipolmoment $\mathbf{m} = V\mathbf{M}$. Die magnetische Induktion im Inneren ist $\mathbf{B}_{\text{in}} = \mu_0 (\mathbf{H}_{\text{in}} + \mathbf{M}) = \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}$.

6.7 Energie des magnetostatischen Feldes oder einer stationären Stromverteilung

In völliger Analogie zur Elektrostatik, wo Feldenergie nicht von der spezifischer Ladungsverteilung abhängt, solange nur das Feld identisch ist, können wir in der Magnetostatik die Feldenergie direkt aus dem Magnetfeld berechnen. Unter der Annahme eines linearen Materialgesetzes

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0\mu} \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

ergibt sich für die Feldenergie

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} dV \mathbf{B}(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

Dies kann auch ausgedrückt werden als Energie gespeichert in den Strömen und im Vektorpotential

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2\mu_0\mu} \int_{V_\infty} dV \mathbf{B}^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mu_0\mu} \int_{V_\infty} dV \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \text{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2\mu_0\mu} \int_{V_\infty} dV \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \text{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \int_{V_\infty} dV \text{div} [\mathbf{A}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] \end{aligned}$$

Der letzte Term fällt raus nach Anwenden des Gausschen Satzes und Diskussion des Abfalls der unterschiedlichen Funktionen ($\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$ und r^2). Damit ergibt sich

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} dV \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \text{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} dV \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r})$$

Als weitere alternative Formulierung können wir die Energie auch mit den Strömen ausdrücken. Wir benutzen dazu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

und erhalten

$$W = \frac{\mu_0\mu}{8\pi} \int_{V_j} \int_{V_j} dV dV' \frac{\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Ein wichtiger Spezialfall für diesen allgemeinen Ausdruck ist der für Ströme, die in dünnen Leitern im Vakuum fließen. Für diese lässt sich die makroskopische Stromdichte schreiben als

$$\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}) dV \rightarrow \sum_i I_i d\mathbf{s}_i$$

Damit erhalten wir für die Energie

$$W = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_i \sum_k \int_{(F_i)} \int_{(F_k)} \frac{I_i I_k}{|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k|} d\mathbf{s}_k d\mathbf{s}_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k$$

wobei hier die Induktionskoeffizienten L_{ik} eingeführt wurden

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(F_i)} \int_{(F_k)} \frac{d\mathbf{s}_k d\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k|} = L_{ki}$$

Beachten Sie auch hier bitte wieder die Analogie zur Berechnung der Energie in der Elektrostatik mit Hilfe der Kapazitätskoeffizienten. Die Induktionskoeffizienten sind genau wie die Kapazitätskoeffizienten in der Elektrostatik nur von der Geometrie abhängig. Und genau wie dort ist die Diskussion von Selbstinduktionskoeffizienten unstatthaft und führt zu Divergenzen.

Eine letzte Darstellung für diskrete Leiterschleifen führt uns zur Einführung einer neuen Größe, welche im weiteren Verlauf der Vorlesung noch sehr wichtig werden wird: **der magnetische Fluss**

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_j} dV \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_k \int_{(F_k)} I_k d\mathbf{s}_k \cdot \mathbf{A}(\mathbf{s}_k) = \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_k$$

Dabei ist der magnetische Fluss durch die Leiterschleife 'k' definiert worden als

$$\Phi_k = \int_{(F_k)} d\mathbf{s}_k \cdot \mathbf{A}(\mathbf{s}_k) = \int_{F_k} d\mathbf{f}_k \cdot \text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}_k) = \int_{F_k} d\mathbf{f}_k \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_k)$$

Die Energie mehrerer Leiterschleifen kann dann berechnet werden als

$$W = \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k$$

Damit kann der magnetische Fluss durch die Leiterschleife 'k' berechnet werden als

$$\Phi_k = \sum_i L_{ik} I_i$$

Dieser Fluss wird damit von allen anderen Strömen bestimmt und über gegenseitigen Induktionskoeffizienten vermittelt.

6.8 Kraft auf eine eng begrenzte Stromverteilung im äußeren Magnetfeld

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass ein äußeres Magnetfeld $\mathbf{B}_a(\mathbf{r})$ vorgegeben ist. Die Kraftdichte auf eine räumliche begrenzte Stromdichte (gestrichene Koordinaten) ist dann

$$\mathbf{f}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') = \mathbf{j}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \times \mathbf{B}_a(\mathbf{r} + \mathbf{r}')$$

Wir können das Magnetfeld $\mathbf{B}_a(\mathbf{r} + \mathbf{r}')$ für sehr kleine Stromdichteverteilungen (die Dipolnäherung soll dann später Anwendung finden können) ausdrücken als

$$\mathbf{B}_a(\mathbf{r} + \mathbf{r}') = \mathbf{B}_a(\mathbf{r}) + (\mathbf{r}' \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}'}) \mathbf{B}_a(\mathbf{r} + \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}}$$

und die Kraft somit ausdrücken als

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left[\int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \right] \times \mathbf{B}_a(\mathbf{r}) + \int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \times (\mathbf{r}' \cdot \text{grad}_r) \mathbf{B}_a(\mathbf{r})$$

Das erste Integral verschwindet, da für eine räumliche begrenzte Stromverteilung das Integral über diese (das Monopolmoment) verschwindet. Weiterhin können wir das zweite Integral umformen mit

$$\text{grad} [\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{r})] = (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{C}(\mathbf{r}) + \mathbf{A} \times [\text{rot} \mathbf{C}(\mathbf{r})]$$

Damit berechnet sich die Kraft dann zu

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \times \{ \text{grad}_r [\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B}_a(\mathbf{r})] - \mathbf{r}' \times \text{rot}_r \mathbf{B}_a(\mathbf{r}) \}$$

Der zweite Term im Integranden verschwindet, da $\mathbf{j}_a = 0$ sein soll, wir uns also außerhalb der Stromdichte befinden, welche das Magnetfeld selbst verursacht. Damit

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \times \text{grad}_r [\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B}_a(\mathbf{r})] \\ &= - \int_V dV' \text{grad}_r [\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B}_a(\mathbf{r})] \times \mathbf{j}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \\ &= - \text{grad}_r \times \int_V dV' [\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B}_a(\mathbf{r})] \mathbf{j}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \end{aligned}$$

Beachten Sie hier bitte, dass der Gradient nicht auf die Stromdichte wirkt. Ähnliche Ausdrücke haben wir bereits früher diskutiert. Zum Beispiel konnten wir zeigen, dass

$$\int_V dV' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \int_V dV' \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')$$

Mit der Ersetzung $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{B}_a(\mathbf{r})$ können wir die Kraft umformen in

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \text{grad}_r \times \left[\mathbf{B}_a(\mathbf{r}) \times \frac{1}{2} \int_V dV' \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \right] \\ &= \text{grad}_r \times [\mathbf{B}_a(\mathbf{r}) \times \mathbf{m}_r] \\ &= [(\mathbf{m}_r \cdot \text{grad}_r) \mathbf{B}_a(\mathbf{r}) - \mathbf{m}_r \text{div} \mathbf{B}_a(\mathbf{r})] \end{aligned}$$

Hier verschwindet der letzte Term in Übereinstimmung mit den Maxwell'schen Gleichungen und wir erhalten als Endergebnis für die Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (\mathbf{m}_r \cdot \text{grad}_r) \mathbf{B}_a(\mathbf{r}) = \text{grad} [\mathbf{m}_r \cdot \mathbf{B}_a(\mathbf{r})]$$

Die letzte Umformung war möglich, da $\text{grad} [\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{r})] = (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{C}(\mathbf{r}) + \mathbf{A} \times (\text{rot} \mathbf{C}(\mathbf{r}))$ ist und da aber $\text{rot} \mathbf{B}_a(\mathbf{r}) = 0$ gelten soll, fällt der letzte Term weg.

Die Kraft können wir als den negativen Gradienten der Energie schreiben

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\text{grad} W$$

was es mir erlaubt, die Energie zu schreiben als

$$W = - \int \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = -\mathbf{m}_r \cdot \mathbf{B}_a(\mathbf{r})$$

Das Drehmoment berechnet sich zu

$$\mathbf{M}_r = \mathbf{m}_r \times \mathbf{B}_a(\mathbf{r})$$

Das Dipolmoment ist, wie man hier sieht, sehr wichtig. Es drückt gleichzeitig Energie, Kraft und Drehmoment auf einen magnetischen Dipol in einem vorgegebenem magnetostatischen Feld aus.

6.9 Der magnetische Spannungstensor

Wir haben früher bereits die Lorentzkraft

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

eingeführt und benutzt. Wir wollen diese jetzt wieder auf die Felder umschreiben, wie wir das auch in der Elektrostatik schon getan haben. Die Kraft auf eine Stromverteilung im magnetostatischen Feld, hier in Komponentenschreibweise, berechnet sich zu

$$\begin{aligned} f_i &= \epsilon_{ijk} j_j B_k = \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} H_{m,l} B_k = -\epsilon_{jik} \epsilon_{jlm} H_{m,l} B_k \\ &= (-\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}) H_{m,l} B_k = -H_{k,i} B_k + H_{i,k} B_k \end{aligned}$$

Da $B_k = \mu_0 \mu H_k$ und $H_{i,i} = 0$ ist, folgt für die Kraft

$$\begin{aligned} f_i &= -\frac{1}{2} (H_k B_k)_{,i} + H_{i,k} B_k + H_{k,k} B_i \\ &= -\frac{1}{2} (H_j B_j)_{,i} + H_{i,k} B_k + (H_k B_i)_{,k} - H_k B_{i,k} \\ &= (B_i H_k)_{,k} - \frac{1}{2} (H_j B_j)_{,i} \\ &= (B_i H_k)_{,k} - \frac{1}{2} \delta_{ik} (H_j B_j)_{,k} \\ &= [(B_i H_k) - \delta_{ik} w^{\text{magn}}]_{,k} \end{aligned}$$

Unter Einführung des magnetischen Spannungstensors

$$T_{ik}^{\text{magn}} = (B_i H_k) - \delta_{ik} w^{\text{magn}}$$

kann die Kraft in Komponentenschreibweise ausgedrückt werden als

$$f_i = T_{ik,k}^{\text{magn}}$$

bzw. in vektorieller Form als

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \text{div } \hat{\mathbf{T}}^{\text{magn}}(\mathbf{r})$$

Diese Definition des Spannungstensors ist damit auch wieder in kompletter Analogie zur Elektrostatik.

7 Das Induktionsgesetz - langsam veränderliche Felder

Bisher haben wir uns im Rahmen dieses Kurses mit statischen Phänomenen beschäftigt. Feste Ladungen oder Ladungsverteilungen im Raum erzeugen ein elektrisches Feld, welches mittels eines skalaren Potentials beschrieben werden kann. Stationäre Ströme oder Stromverteilungen im Raum erzeugen ein magnetisches Feld, welches mittels eines vektoriellen Potentials beschrieben werden kann. Jetzt wollen wir die volle Zeitabhängigkeit dieser Größen betrachten, also $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, was der eigentliche Untersuchungsgegenstand der Elektrodynamik ist. Wir werden sehen und diskutieren, dass elektrische und magnetische Felder koppeln und sich gegenseitig beeinflussen. Ein räumlich veränderliches elektrisches Feld wird ein magnetisches Feld induzieren und vice versa. Alle diese Phänomene werden mit dem vollständigen Satz der Maxwell'schen Gleichungen beschrieben, deren Lösungen wir im Folgenden diskutieren wollen.

7.1 Das Faradaysche Gesetz

Um die Sache nicht gleich unnötig zu verkomplizieren, betrachten wir im Folgenden zeitlich veränderliche Felder mit einer Einschränkung. Die Felder sollen sich zeitlich so langsam verändern, dass sie nicht abstrahlen, die Felder bewegen sich mit den Quellen. Solche langsam sich veränderlichen Felder sind typisch für die Elektrotechnik. Wechselstrom zum Beispiel oszilliert mit 50 Hz.

Die erste Korrektur zu den bisher betrachteten Maxwell'schen Gleichungen wird darin bestehen, dass $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ nicht mehr gelten wird. Im Speziellen werden wir sehen, dass ein zeitlich sich veränderliches Magnetfeld Wirbel des elektrischen Feldes verursachen wird. Wir werden also noch etwas auf die rechte Seite der obigen Gleichung als Quelle schreiben.

Um einen phänomenologischen Zugang zu dem Thema zu finden, können wir uns wieder experimentelle Befunde zu nütze machen. In einem geschlossenen Leiter entsteht ein Induktionsstrom infolge einer induzierten Spannung

- a) bei Annäherung eines Magneten,
- b) bei einer zeitlichen Änderung des Stromes in einem benachbarten Leiter und
- c) bei dem Verdrehen der Leiterschleife in einem konstanten Ma-

gnetfeld. Dieses konstante Magnetfeld kann durch einen Permanentmagnet oder eine stromdurchflossene Leiterschleife verursacht werden.

Die gemeinsame Ursache aller dieser Phänomene ist die Änderung des magnetischen Flusses Φ durch die Leiterschleife. Dieser magnetische Fluss war definiert als

$$\Phi = \int_F \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f},$$

wobei wir im vorigen Kapitel keine zeitliche Abhängigkeit für die magnetische Induktion berücksichtigt haben. Der induzierte Strom in der Leiterschleife hat die folgenden Eigenschaften:

1. Richtung: der Strom wirkt der Ursache entgegen, er will den alten Zustand der Anordnung beibehalten. Der induzierte Strom ist also stets so gerichtet, dass sein Magnetfeld der Induktionsursache entgegenwirkt. In Zuordnung zu den obigen Szenarien können wir die folgenden Aussagen treffen.
 - a) Er stößt den sich annähernden Magneten wieder ab.
 - b) Er induziert eine entgegengesetzte Stromänderung im benachbarten Leiter.
 - c) Er induziert ein entgegengesetztes Drehmoment in der verdrehten Leiterschleife.
2. Die Stärke des induzierten Stromes ist proportional zur zeitlichen Änderung des Flusses

$$I_{\text{ind}} \propto -\frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f} = -\frac{d}{dt} \Phi(t)$$

Im speziellen Fall eines ruhenden Leiters mit einer konstanten Fläche gilt dabei

$$I_{\text{ind}} \propto -\int_F \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{f}$$

Der induzierte Strom ist also proportional zur zeitlichen Änderung der magnetischen Induktion.

Die Ursache des induzierten Stroms liegt in einem induzierten Potentialgefälle im Leiter. Dieses Potentialgefälle bewirken eine Kraft auf die Elektronen und beschleunigen diese. Diese induzierte Spannung wird auch als elektromotorischen Kraft (EMK) bezeichnet. Das Potentialgefälle wird als induzierte Spannung ausgedrückt.

$$U_{\text{ind}} = \int_{(F)} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r}$$

Diese hier durchgeführten Betrachtungen gelten für beliebige Kurven. Das erlaubt eine gewisse Abstraktion des Leiters und führt zum Faradayschen Induktionsgesetz

$$\int_{(F)} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f}$$

Ändert sich der magnetische Fluss durch eine Fläche, entsteht längs der Berandung eine Spannung. Die Gleichung in der obigen Version entspricht der endgültigen Form der zweiten Maxwellschen Gleichung (in der Integralform).

Der für die Elektrotechnik besonders wichtige Zusammenhang zwischen induzierter Spannung und zeitlich sich veränderlichem Fluss lässt sich daraus einfach konstruieren zu

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \Phi(t)$$

Das obige Gesetz wird als die Lenzsche Regel bezeichnet.

In einer idealen aber geöffneten Leiterschleife, an der die Enden ('1' und '2') auf zwei verschiedenen Potentialen sitzen (verursacht durch eine Spannungsquelle), berechnet sich die induzierte Spannung wie folgt:

$$U_{\text{ind}} = \int_{(F)} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = \int_{(F)'} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} + U_{12}$$

mit der Spannung zwischen den beiden Enden '1' und '2'

$$U_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r}$$

Im idealen Leiter mit einer unendlich hohen Leitfähigkeit verschwindet das elektrische Feld. Die induzierte Spannung ist damit

$$U_{\text{ind}} = U_{12}$$

Für mehrere Leiterschleifen, durch die jeweils der magnetische Fluss Φ_i fließt, mit

$$\Phi_i = \sum_k L_{ik} I_k$$

berechnet sich die induzierte Spannung zu

$$U_i^{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \sum_k L_{ik} I_k$$

In dieser Formulierung taucht wieder der rein geometrieabhängige Induktionskoeffizient auf.

Für den Fall, dass die Geometrie fest ist, berechnet sich die induzierte Spannung zu

$$U_i^{\text{ind}} = -\sum_k L_{ik} \frac{\partial}{\partial t} I_k$$

Für den Fall, dass die Ströme konstant sind, berechnet sich die induzierte Spannung zu

$$U_i^{\text{ind}} = - \sum_k I_k \frac{\partial}{\partial t} L_{ik}$$

Die differentielle Formulierung der Maxwellgleichung erhält man durch Anwendung des Stokesschen Satzes auf die linke Seite der Integralformulierung der Maxwellschen Gleichung unter der Annahme, dass die Leiterschleife fest ist; bzw. dass gar kein Leiter vorhanden ist und man das Integral auf einer abstrakten mathematischen Kurve evaluiert

$$\int_{(F)} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{d}{dt} \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = - \int_F d\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

$$\int_F d\mathbf{f} \cdot \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \int_F d\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Da auch hier wieder die Fläche selbst beliebig gewählt sein kann, muss die Differenz der beiden Argumente der Integrale auch lokal verschwinden

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

So erhalten Sie eine der homogenen Maxwellgleichung. Die üblich Form diese aufzuschreiben lautet ¹

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$$

Dies ist die erste differentielle Maxwellsche Gleichung in seiner endgültigen Form. Sie wird als das Induktionsgesetz bezeichnet.

Als nächstes wollen wir uns die Potentialgleichungen ansehen. Die homogenen Maxwellgleichungen

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

können gelöst werden nach der Einführung des skalaren Potentials und des Vektorpotentials.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \text{rot} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] = 0 \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\text{grad } \phi(\mathbf{r}, t)$$

Sind die zeitabhängigen skalaren und Vektorpotentiale bekannt, kann man die Felder berechnen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \text{grad } \phi(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

Die so eingeführten Potential sorgen dafür, dass die beiden homogenen Maxwellgleichungen befriedigt werden. Wir können diese Potentiale auch in die beiden inhomogenen Maxwellgleichungen einsetzen (betrachten hier Ladungen und Ströme im Vakuum)

$$\epsilon_0 \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \quad \text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t)$$

¹ Quellterme werden immer auf der rechten Seite geschrieben.

Im Folgenden lassen wir den Index weg zur besseren Übersichtlichkeit und setzen die Potentiale ein

$$-\epsilon_0 \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \epsilon_0 \Delta \phi(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

Diese Gleichungen zu lösen für die beiden Potentiale selbst ist noch zu kompliziert; und vor allem auch nicht notwendig. Wir können die mathematische Struktur der Gleichung durch eine geeignete Eichung vereinfachen

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \operatorname{grad} \chi(\mathbf{r}, t)$$

was zu einem identischen Magnetfeld führt. Wir können diese Gleichung nutzen, um sicherzustellen, dass im Rahmen der Coulombbeziehung

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$$

gilt. Dann erhalten wir als die Bestimmungsgleichung für die Potentiale

$$-\epsilon_0 \Delta \phi(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$$

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

Beachten Sie hier, und das ist die definierende Eigenschaft der langsam veränderlichen Felder, dies sind die identischen Gleichungen wie in der Statik. Die Potentiale folgen adiabatisch den Quellen, die Potentiale verändern sich nur langsam. Die Gleichungen suggerieren den Eindruck einer Fernwirkung², die Lichtgeschwindigkeit spielt bei der Ausbreitung des Potentials keine Rolle. Dies ist aber gerade der Tatsache geschuldet, dass wir nur sehr langsame Änderungen zulassen; im Zweifel adiabatisch langsame.

Die Lösung der obigen Gleichungen bei natürlichen Randbedingungen lauten

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int_V dV' G_0^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}', t)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int_V dV' G_0^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)$$

Die entsprechenden Maxwellgleichungen in Medien lauten

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Abschließend wollen wir noch klären, was es genau bedeutet, ein langsam veränderliches Feld zu haben. Wir fordern hier im Speziellen, dass wir keine Änderung in der zweiten Maxwellgleichung haben, dass also $|\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}| \ll |\mathbf{j}|$ gilt.

² Eine zeitlich sich veränderliche Quelle hat instantan eine Auswirkung auf das Potential in einer unendlichen Entfernung

Unter der Annahme, dass Ströme und Felder zeitharmonisch bei einer festen Frequenz ω oszillieren, können wir die zeitliche Differentiation in einen algebraisch (besser greifbaren) Ausdruck überführen

$$(\mathbf{D}, \mathbf{j}) = (\bar{\mathbf{D}}, \bar{\mathbf{j}})e^{-i\omega t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D}, \mathbf{j}) = -i\omega(\bar{\mathbf{D}}, \bar{\mathbf{j}})e^{-i\omega t}$$

Mit dem Ohmschen Gesetz ergibt sich

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} \mathbf{D} \rightarrow \bar{\mathbf{j}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} \bar{\mathbf{D}}$$

Aus der obigen Forderung ergibt sich dann

$$|\omega \bar{\mathbf{D}}| \ll \left| \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} \bar{\mathbf{D}} \right| \rightarrow \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon}{\sigma} \ll 1$$

Wir müssen also fordern, dass wir Felder bei sehr kleinen Frequenzen betrachten, die Metalle sehr große Leitfähigkeiten haben sollen und die Permittivität auch nicht sehr groß sein darf.

Abschließend wollen wir noch überprüfen, wie sich die Gleichungen für langsam veränderliche Felder verhalten in Bezug auf die Kontinuitätsgleichung. Aus der Maxwellgleichung folgt

$$\text{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \text{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Wie wir es auch drehen, dieser Ausdruck scheint im Widerspruch zu stehen zu der allgemein gültigen Kontinuitätsgleichung, die eine Konsequenz der Ladungserhaltung ist

$$\text{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Aus dieser Gleichung kann man die folgende Differentialgleichung für die Ladungsdichte bekommen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div} \mathbf{j} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} \text{div} \mathbf{D} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} \rho$$

Die Lösung lautet

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

mit $\tau = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\sigma}$. Für klassische gute Leiter, z.B. Kupfer, ist diese Zeitkonstante sehr klein, $\tau_{\text{Kupfer}} \approx 10^{-17} \text{s}$, so dass jede im an sich neutralen Material vorhandene Ladungsverteilung schnell abklingt. Die Kontinuitätsgleichung in der Form $\text{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$ ist damit gewährleistet.

7.2 Grundelemente der Wechselstromtechnik

Im Folgenden möchten wir die Maxwellgleichungen und das Ohmsche Gesetz auf dünne Leiter anwenden. Unter Verwendung der Kirchhoffschen Regeln können wir dann bereits die Eigenschaften von beliebig

komplizierten Schwingkreisen berechnen. Ausgangspunkt sind also die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= 0 & \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) & \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \mathbf{j}_{\text{cond}}(\mathbf{r}, t) &= \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

7.2.1 Die Kirchhoffschen Regeln

Stromregel

Zur Herleitung der Stromregel ('Knotensatz'), wenden wir die Kontinuitätsgleichung auf ein Volumen an, welche einen Knoten von verschiedenen Stromleitungen beinhaltet. Über jede diese Leitungen kann ein Strom in den Knoten rein- oder rausfließen. Wir wissen, dass folgende Aussage gelten muss:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V dV \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int_{(V)} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \\ &\rightarrow \sum_k \int_{E_k} d\mathbf{f}_k \cdot \mathbf{j}_k(\mathbf{r}, t) = \sum_k I_k = 0 \end{aligned}$$

Damit besagt der Knotensatz

$$\sum_k I_k = 0,$$

dass die Summe aller in einen Knoten rein- und rausfließenden Ströme verschwinden muss. Im Zweifel ist dies einfach eine Konsequenz der Ladungserhaltung. Der Strom hierbei ist positiv ($I > 0$) für $\mathbf{j}_k(\mathbf{r}, t)$ parallel zu $d\mathbf{f}_k$. Der Strom hierbei ist negativ ($I < 0$) für $\mathbf{j}_k(\mathbf{r}, t)$ antiparallel zu $d\mathbf{f}_k$.

Spannungsregel

Im Folgenden berechnen wir den Spannungsabfall über einen geschlossenen Leiterkreis 'k' ('Maschensatz').

$$\begin{aligned} \int_{C_k} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{d\Phi(\mathbf{r}, t)}{dt} = U_k^{\text{ind}} \\ \int_{C_k} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - U_k^{\text{ind}} &= 0 \end{aligned}$$

Die Summe aller Spannungen im Leiterkreis verschwindet also.

Beachten Sie hier bitte, dass das Integral über die Kontur der Leiterschleife auch die Spannungsquelle selbst enthält. Um das zu spezifizieren, unterscheiden wir einen Leiterkreis 'C' der aus zwei Teilen besteht. Eine Spannungsquelle induziert eine Potentialdifferenz in dem offenen Leiterstück gegeben als C'' . Damit existiert eine Potentialdifferenz zwischen den Enden in dem verbleibenden Teil der Leiterschleife. Dieser Teil soll als C' bezeichnet werden. Dann gilt

$$\int_{C'_k} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{C''_k} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - U_k^{\text{ind}} = 0$$

Mit der oben formulierten geometrischen Vorstellung gilt also

$$\int_{C_k'} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -U_k^{\text{ext}}(t)$$

Damit ergibt sich

$$\int_{C_k'} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - U_k^{\text{ext}}(t) - U_k^{\text{ind}} = 0$$

Unter Annahme einer festen Geometrie können wir die induzierte Spannung ausdrücken mit Hilfe der Induktionskoeffizienten und den Strömen in anderen Leiterschleifen zu

$$\int_{C_k'} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \sum_i L_{ki} \frac{\partial I_i(t)}{\partial t} = U_k^{\text{ext}}(t)$$

Dies ist die sogenannte Maschenregel.

Zusammengefasst lauten die Kirchhoffschen Regeln

$$\sum_k I_k = 0 \quad \int_{C_k'} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \sum_i L_{ki} \frac{\partial I_i(t)}{\partial t} = U_k^{\text{ext}}(t)$$

Für jedes beliebig komplizierte System aus einzelnen oder gekoppelten Leiterschleifen ergeben diese Regeln einen Satz von Gleichungen, welche man zur eindeutigen Lösung der Ströme benutzen kann.

7.2.2 Beispiel: Elektrische Schwingkreise

Wir wollen im Folgenden einen kanonischen Schwingkreis diskutieren, einen Schwingkreis mit einer externen Spannungsquelle und einen in Reihe geschalteten Widerstand, Kondensator und Spule. Das Ziel ist eine Differentialgleichung zu erhalten für den Strom als Funktion einer zeitlichen sich veränderlichen externen Spannung. Wir wenden zunächst die Maschenregel an

$$\int_{C_R} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{C_C} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{C_{\text{Draht}}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + L \frac{\partial I(t)}{\partial t} = U_{\text{ext}}(t)$$

und untersuchen jeden einzelnen Term individuell. Zunächst den Widerstand:

$$U_R(t) = \int_{C_R} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{C_R} d\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{\sigma} = I(t) \int_{C_R} \frac{dr}{\sigma F}$$

Mit

$$R = \int_{C_R} \frac{dr}{\sigma F} = \frac{l}{\sigma F}$$

ergibt sich für eine konstante Leitfähigkeit und eine konstante Fläche

$$U_R(t) = RI(t)$$

Diese Diskussion ist für den Draht und den Spulendraht analog. Er sollte nur eine kleine Korrektur geben und wir können den Spannungsabfall entsprechend vernachlässigen.

Für den Spannungsabfall über die Kapazität erhalten wir

$$U_C(t) = \int_{C_C} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{Q(t)}{C}$$

mit C dem Kapazitätskoeffizienten. Damit ergibt sich als abschließende Differentialgleichung

$$RI(t) + \frac{Q(t)}{C} + L \frac{\partial I(t)}{\partial t} = U_{\text{ext}}(t)$$

mit $\frac{\partial Q(t)}{\partial t} = I(t)$ ergibt sich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für den Strom zu

$$L \frac{\partial^2 I(t)}{\partial t^2} + R \frac{\partial I(t)}{\partial t} + \frac{I(t)}{C} = \frac{\partial U_{\text{ext}}(t)}{\partial t}$$

Beachten Sie bitte die formale Analogie dieser Gleichung zu einem getriebenem, gedämpftem harmonischen Oszillator in der klassischen Mechanik. Ersetzen Sie dazu lediglich $L \leftrightarrow m$, $R \leftrightarrow \gamma$ und $C \leftrightarrow 1/k$ und Sie können alle Ergebnisse der Mechanik direkt anwenden. Wir wollen im Folgenden einige Lösungen kurz diskutieren:

Freie Schwingung ($U_{\text{ext}}(t) = 0$)

Die Lösung für die zeitliche Entwicklung des Stromes lautet dann

$$I(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(a e^{i\Omega t} + c.c. \right)$$

mit

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad \tau = \frac{2L}{R}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

wobei letzteres die Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung ist. Wir können in Abhängigkeit von Ω verschiedene Fälle unterscheiden:

- Ω ist reell: gedämpfte Schwingung. Das verlangt, dass $R^2 < \frac{4L}{C}$ ist.
- $\Omega = 0$: aperiodischer Grenzfall. Hier muss $R^2 = \frac{4L}{C}$ sein.
- Ω ist imaginär: Kriechfall. Das verlangt, dass $R^2 > \frac{4L}{C}$ ist.

Erzwungene Schwingung

Hier wollen wir die externe Spannung als eine zeitharmonische Spannung schreiben

$$U_{\text{ext}}(t) = \Re \left[\tilde{U}_0 e^{i\omega t} \right] \quad \text{mit } \tilde{U}_0 = |\tilde{U}_0| e^{i\Phi_U}$$

Im eingeschwungenen Zustand wird der Strom die gleiche Zeitabhängigkeit besitzen:

$$I(t) = \Re \left[\tilde{I}_0 e^{i\omega t} \right] \quad \text{mit } \tilde{I}_0 = |\tilde{I}_0| e^{i\Phi_I}$$

Da die Maxwellgleichungen linear sind, ist mit den beiden bekannten Lösungen $\tilde{I}_0 e^{i\omega t}$ und $\tilde{I}_0^* e^{-i\omega t}$ der Strom

$$I(t) = \frac{1}{2} \left(\tilde{I}_0 e^{i\omega t} + \tilde{I}_0^* e^{-i\omega t} \right) = \Re \left[\tilde{I}_0 e^{i\omega t} \right]$$

auch eine Lösung. Setzen wir einen der beiden zeitharmonischen Ansätze für den Strom und die Spannung in die Differentialgleichung ein, erhalten wir

$$e^{i\omega t} \left(-L\omega^2 + i\omega R + \frac{1}{C} \right) \tilde{I}_0 = i\omega \tilde{U}_0 e^{i\omega t}$$

Dies führt zu einer einfachen Gleichung für den Zusammenhang von Spannung und Strom. Deren Verhältnis bezeichnet man als den Scheinwiderstand \tilde{R} .

$$\tilde{R} = \frac{\tilde{U}_0}{\tilde{I}_0} = R + i\omega L - i\frac{1}{\omega C} = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Beachten Sie hier bitte, die Amplitude der Spannung und des Stromes, in völliger Übereinstimmung mit dem Ansatz, können komplexwertig sein. Wir unterscheiden zwischen dem reellen Wirkwiderstand R und dem imaginären Blindwiderstand \tilde{R}_B

$$\tilde{R}_B = i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Der Widerstand der Induktivität $\tilde{R}_L = i\omega L$ und der Kapazität $\tilde{R}_C = -i\frac{1}{\omega C}$ können individuell definiert werden. Der Scheinwiderstand ist komplex $\tilde{R} = |\tilde{R}|e^{i\delta}$. Mit diesen Gleichungen können wir das Verhältnis von Spannung und Strom explizit ausdrücken

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0 = \tilde{R}\tilde{I}_0 &\rightarrow |\tilde{U}_0|e^{i\Phi_U} = |\tilde{R}|e^{i\delta}|\tilde{I}_0|e^{i\Phi_I} \\ \rightarrow |\tilde{U}_0| = |\tilde{R}||\tilde{I}_0| &\quad \text{und} \quad \Delta\Phi = \Phi_U - \Phi_I = \delta \end{aligned}$$

In Abhängigkeit von der Phasendifferenz unterscheidet man verschiedene Szenarien.

- Der Strom hinkt der Spannung hinterher. $\delta > 0$, $\omega L > \frac{1}{\omega C} \rightarrow \omega^2 > \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.
- Strom und Spannung sind in Phase. $\delta = 0$, $\omega L = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \omega^2 = \omega_0^2$.
- Der Strom ist der Spannung vorraus. $\delta < 0$, $\omega L < \frac{1}{\omega C} \rightarrow \omega^2 < \omega_0^2$.

Nun wollen wir uns abschließend noch die aufgenommene Leistung ansehen. Die instantane aufgenommene Leistung ist definiert als

$$\begin{aligned} N(t) &= U_{\text{ext}}(t)I(t) = \Re \left[\tilde{U}_0 e^{i\omega t} \right] \Re \left[\tilde{I}_0 e^{i\omega t} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left(\tilde{U}_0 \tilde{I}_0^* + \tilde{U}_0^* \tilde{I}_0 e^{2i\omega t} + c.c. \right) \end{aligned}$$

Wir mitteln im Folgenden über eine Oszillationsperiode $\Delta t = \frac{1}{\omega}$ und erhalten für die mittlere aufgenommene Leistung

$$\begin{aligned}\bar{N} &= \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} d\tau N(\tau) \\ &= \frac{1}{2} \Re(\tilde{U}_0 \tilde{I}_0^*) = \frac{1}{2} |\tilde{U}_0| |\tilde{I}_0| \cos \Delta\Phi\end{aligned}$$

Mit der Definition einer effektiven Spannung und einem effektiven Strom

$$U_{\text{eff}} = \frac{|\tilde{U}_0|}{\sqrt{2}} \quad I_{\text{eff}} = \frac{|\tilde{I}_0|}{\sqrt{2}}$$

können wir auch eine Wirkleistung

$$\bar{N}_W = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \Delta\Phi$$

und eine Blindleistung

$$\bar{N}_B = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \Delta\Phi$$

definieren.

Abschließend können wir noch die Frage beantworten, wo denn eigentlich die Leistung verbraucht wird? Am Widerstand³?

$$\begin{aligned}\bar{N}_R &= R \cdot \left[\Re(\tilde{I}_0 e^{i\omega t}) \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} R |\tilde{I}_0|^2 \\ &= \frac{1}{2} R |\tilde{I}_0| \frac{|\tilde{U}_0|}{|\tilde{R}|} = \frac{1}{2} |\tilde{U}_0| |\tilde{I}_0| \cos \Delta\Phi \\ &= \bar{N}\end{aligned}$$

³ Na gut, kann man sich einfach überlegen. Wenn ohne den Widerstand die Oszillation nicht gedämpft ist, kann eigentlich keine Leistung verbraucht werden. Man kann das aber auch explizit zeigen.

Wir können auch einen Energiesatz aufstellen, welcher uns die Quellen und Senken von Energie in Verbindung bringt und uns sagt, wo die elektromagnetische Energie gespeichert ist ⁴.

$$\begin{aligned}RI(t) + \frac{Q(t)}{C} + L \frac{\partial I(t)}{\partial t} &= U_{\text{ext}}(t) \quad \text{mit } I(t) = \frac{\partial Q(t)}{\partial t} \\ R \frac{\partial Q(t)}{\partial t} + \frac{Q(t)}{C} + L \frac{\partial^2 Q(t)}{\partial t^2} &= U_{\text{ext}}(t) \\ L \frac{\partial^2 Q(t)}{\partial t^2} \frac{\partial Q(t)}{\partial t} + R \left[\frac{\partial Q(t)}{\partial t} \right]^2 + \frac{Q(t)}{C} \frac{\partial Q(t)}{\partial t} &= U_{\text{ext}}(t) \frac{\partial Q(t)}{\partial t} \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{L}{2} \left[\frac{\partial Q(t)}{\partial t} \right]^2 \right\} + \frac{d}{dt} \left[\frac{Q^2(t)}{2C} \right] &= -R \left[\frac{\partial Q(t)}{\partial t} \right]^2 + U_{\text{ext}}(t) \frac{\partial Q(t)}{\partial t} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{L}{2} I^2(t) \right] + \frac{d}{dt} \left[\frac{CU^2(t)}{2} \right] &= -RI^2(t) + U_{\text{ext}}(t)I(t) \quad \text{da } Q(t) = CU(t)\end{aligned}$$

⁴ Vergleichbare Sätze werden wir später in der vollständigen Elektrodynamik diskutieren.

Der erste Term auf der linken Seite bezeichnet die zeitliche Änderung der magnetischen Energie. Der zweite Term auf der linken Seite

bezeichnet die zeitliche Änderung der elektrischen Energie. Und die Quellen/Senken dieser zeitlichen Änderung der Energie sind zum einen die Joulsche Wärme (erster Term auf der rechten Seite) und zum anderen die Leistung der Quelle (zweiter Term auf der rechten Seite).

8 Das vollständige System der Maxwellgleichungen

8.1 Ladungserhaltung und Maxwellsche Ergänzung

Im Folgenden wollen wir alle Annahmen fallen lassen und verlassen die Welt der Statik und den Gültigkeitsbereich zeitlich langsam veränderlicher Felder. Alle Größen sollen von jetzt an vom Ort \mathbf{r} und von der Zeit t ohne Einschränkung abhängen. Was weiterhin gelten soll ist der Erhaltungssatz für alle Ströme und Ladungen. In einer globalen Formulierung lautet dieser

$$\frac{\partial Q_{\text{ges}}(t)}{\partial t} + I_{\text{ges}}(t) = 0$$

Dieser Zusammenhang soll nicht nur global gelten sondern auch lokal. In dieser lokalen Formulierung verlangen wir daher, dass

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$$

gilt. Dies ist nichts weiter als die Kontinuitätsgleichung.

Wir können uns jetzt fragen, ob diese Kontinuitätsgleichung mit den bisherigen Maxwellschen Gleichungen übereinstimmen? Aus der Magnetostatik wissen wir, dass

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \mathbf{j}_{\text{ges}}(\mathbf{r}, t) \\ \text{div rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \text{div } \mathbf{j}_{\text{ges}}(\mathbf{r}, t) \\ 0 &= -\mu_0 \frac{\partial \rho_{\text{ges}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

Offensichtlich ist dies nicht richtig und nicht in Übereinstimmung zu bringen mit der Kontinuitätsgleichung. Es war die Leistung von Maxwell, diesen Widerspruch aufzuheben. Wir addieren dazu zu der vorher betrachteten Maxwellschen Gleichung einen Vektor, der so gewählt sein soll, dass wir keinen Widerspruch zu der Kontinuitätsgleichung erhalten.

$$\text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{C}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{j}_{\text{ges}}(\mathbf{r}, t)$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{C}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{ges}}(\mathbf{r}, t) \\
&= -\mu_0 \frac{\partial \rho_{\text{ges}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\
&= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial [\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]}{\partial t}
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

gilt. Dieser Term wird als Maxwell'sche Ergänzung bezeichnet und führt zu der endgültigen Form der Maxwell'schen Gleichung¹.

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Diese Gleichung ist das Gegenstück zum Induktionsgesetz und erlaubt die Kopplung von elektrischen und magnetischen Feld. Damit sind wir beim vollständigen Satz der Maxwell'schen Gleichungen angelangt.

¹ Um ganz genau zu sein, sollten wir betonen, dass die Maxwell'schen Gleichungen in der von uns benutzten Form erst später von Oliver Heaviside und unabhängig von Josiah Willard Gibbs und Heinrich Hertz formuliert wurden.

8.2 Das System der Maxwell'schen Gleichungen

Die Feldgleichungen lassen sich auf zwei Ebenen diskutieren. Zunächst können wir sie formal für alle Ströme und Ladungen aufschreiben und verbinden in dem geschlossenen System der Maxwell'schen Gleichungen die Quellen der Felder mit den entsprechenden Wirbeln der Felder. Beachten Sie bitte, diese Schreibweise muss zunächst erst einmal als formal betrachtet werden, da wir im Allgemeinen nicht alle Ladungen und Ströme kennen; insbesondere nicht die Polarisationsladungen und die molekularen Ströme. Die Gleichungen sind daher im Sinner einer mikroskopischen Formulierung richtig.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= 0 \\
\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \rho_{\text{ges}}(\mathbf{r}, t) \\
\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\
\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{j}_{\text{ges}}(\mathbf{r}, t)
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen erfüllen automatisch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho_{\text{ges}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{ges}}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Das Problem in dieser Formulierung ist, dass $\rho_{\text{ges}}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}_{\text{ges}}(\mathbf{r}, t)$ noch Fremdkörper in dieser Theorie sind. Deren Abhängigkeit als Funktion der Felder muss noch berücksichtigt werden. Außerdem muss beachtet werden, dass eine zeitlich sich veränderliche Polarisationsladung zu einer zeitlich sich veränderlichen Polarisationsstromdichte führt. Der explizite funktionelle Zusammenhang wird durch

eine entsprechende Kontinuitätsgleichung gegeben. Langfristig wollen wir einen Satz von Maxwellgleichungen erhalten, in denen nur die externen Ladungen und die makroskopischen Ströme als Quellen auftauchen. Die entsprechenden Polarisationsladungen und die molekularen Ströme sollen hingegen nur räumlich gemittelt vorkommen. Daher müssen wir Ladungen und Ströme in einer zweiten Ebene der Betrachtung konkretisieren und separieren. Durch Forderung der Gültigkeit von Kontinuitätsgleichungen, lassen sich wertvolle Aussagen über den funktionellen Zusammenhang der Ladungen und Ströme und den entsprechenden Hilfsfeldern treffen, welche die Polarisation bzw. die Magnetisierung beschreiben.

Die Ladungen ergeben sich in der Summe aus den externen Ladungen und den Polarisationsladungen

$$\rho_{\text{ges}}(\mathbf{r}, t) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) + \rho_{\text{pol}}(\mathbf{r}, t)$$

Wenden wir darauf die Zeitableitung an, erhalten wir

$$\frac{\partial \rho_{\text{ges}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{\text{pol}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \text{div} \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Die Ströme ergeben sich aus den makroskopischen Strömen, den molekularen Strömen und den Polarisationsströmen

$$\mathbf{j}_{\text{ges}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_{\text{mol}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_{\text{pol}}(\mathbf{r}, t)$$

Die Divergenz angewandt auf diesen Ausdruck ergibt

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{j}_{\text{ges}}(\mathbf{r}, t) &= \text{div} \left[\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_{\text{mol}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_{\text{pol}}(\mathbf{r}, t) \right] \\ &= \text{div} \left[\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_{\text{pol}}(\mathbf{r}, t) \right] + \text{div} \text{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \\ &= \text{div} \left[\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_{\text{pol}}(\mathbf{r}, t) \right] \end{aligned}$$

Beachten Sie hier bitte, dass wir die molekularen Ströme wieder als Wirbel der Magnetisierung geschrieben haben. Die Divergenz eines Wirbelfeld verschwindet immer, so dass die Divergenz der molekularen Ströme verschwindet. Die verschwindende Divergenz erklärt auch, warum wir in der Gesamtladung nicht noch einen zusätzlichen Term berücksichtigen mussten, der uns möglicherweise die molekularen Ladungen beschrieben hätte.

Fügen wir die beiden Teilterme zusammen, erhalten wir die Kontinuitätsgleichung

$$\text{div} \left[\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_{\text{pol}}(\mathbf{r}, t) \right] + \frac{\partial \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \text{div} \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$$

Damit diese Gleichung sichergestellt ist, muss die Polarisationsstromdichte gewählt werden als

$$\mathbf{j}_{\text{pol}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Weiterhin können wir die makroskopische Stromdichte klassifizieren und zwei Arten, wie früher schon einmal durchgeführt, definieren

$$\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_{\text{cond}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_{\text{conv}}(\mathbf{r}, t)$$

Der Konduktionsstrom ist elektrisch neutral und nicht assoziiert zu einer Ladungsdichte $\rightarrow \text{div} \mathbf{j}_{\text{cond}}(\mathbf{r}, t) = 0$. Wenn ein Konduktionsstrom fließt, entstehen also keinen neuen Ladungen in einem Volumen. Genau so viele Ladungen wie in ein betrachtetes Volumen reinfließen, fließen auch wieder heraus.

Der Konvektionsstrom definiert sich aus physisch bewegten externen Ladungen

$$\mathbf{j}_{\text{conv}}(\mathbf{r}, t) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \mathbf{v} \rightarrow \text{div} \mathbf{j}_{\text{conv}}(\mathbf{r}, t) = \text{div} [\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}] = \mathbf{v} \cdot \text{grad} \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$$

Weiterhin gilt aber auch die Erhaltung der externen Ladungsdichte. Da die Divergenz des Konduktionsstromes verschwindet, muss die Divergenz des Konvektionsstromes in Verbindung gebracht werden mit der zeitlichen Änderung der gesamten externen Ladungsdichte. Die entsprechende Kontinuitätsgleichung lautet also

$$\text{div} \mathbf{j}_{\text{conv}}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$$

Daher muss gelten

$$0 = \frac{d\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \mathbf{v} \cdot \text{grad} \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Wir wollen jetzt die Ausdrücke für die gesamte Ladungsdichte und die gesamte Stromdichte in die Maxwellgleichungen einführen und vorher noch die entsprechenden Materiefelder benutzen. Daher ergibt sich

$$\rho_{\text{ges}}(\mathbf{r}, t) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) + \rho_{\text{pol}}(\mathbf{r}, t) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) - \text{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{j}_{\text{ges}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_{\text{mol}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_{\text{pol}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) + \text{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Eingesetzt in die Maxwellgleichungen erhalten wir

$$\epsilon_0 \text{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) - \text{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \text{div} [\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)] = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$$

$$\text{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \left[\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) + \text{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

$$\text{rot} \left[\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \right] = \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)]$$

Daraus erhalten wir als komplettes System der Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= 0 \\ \text{div} [\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)] &= \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \operatorname{rot} \left[\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \right] &= \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)]\end{aligned}$$

Zur Lösung dieser Gleichungen muss noch der materialspezifische Zusammenhang angegeben werden für

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}[\mathbf{E}, \mathbf{B}], \quad \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}[\mathbf{E}, \mathbf{B}], \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}[\mathbf{E}, \mathbf{B}]$$

Dies sind die Materialgleichungen. Dieser Zusammenhang kann nicht im Rahmen der Elektrodynamik erschlossen werden, sondern muss aus anderen Theorien stammen.

Unter Einführung der folgenden Hilfsfelder

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}$$

erhalten die Maxwellgleichungen ihre endgültige Form

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}$$

Zu diesen Gleichungen sind abschließend noch einige Bemerkungen zu machen:

- Die Quellen der Felder sind die externen Ladungen.
- Die Wirbel der Felder sind die makroskopischen Ströme.
- Die mikroskopischen Quellen und Wirbel werden durch die Materialgleichungen für \mathbf{M} und \mathbf{P} berücksichtigt.
- Die Quellen und Wirbel selbst sind Fremdkörper der Theorie. Sie werden eingeführt, ohne sie aber selbst erklären zu können.
- Die Elektrodynamik selbst kann die Existenz von Ladungen nicht erklären; dies mag man in Analogie zur Kraft in der Mechanik verstehen. Zur Erklärung der Ladung benötigt man Elementarteilchentheorien.
- Die Elektrodynamik ist eine Feldtheorie. Vorsicht ist aber geboten bei der Interpretation der Bedeutung der Felder. Schlussendlich werden immer nur Kräfte auf Probeladungen bzw. Probestrome vermessen. Sie sind die einzigen experimentell zugänglichen Größen
- In einer möglichen Prüfung zu Themen der Elektrodynamik, stellen Sie bitte auf alle Fälle sicher, dass Sie diese Gleichungen kennen.

8.3 Die Materialgleichungen

8.3.1 Statik

Wie bereits gerade diskutiert, muss der Zusammenhang zwischen der Polarisation, der Magnetisierung und der makroskopischen Stromdichte mit den entsprechenden Feldern aus anderen Theorien bzw. Modellen geholt werden. Schlussendlich können Sie aber jeden beliebigen Zusammenhang postulieren und experimentell beobachtbare Größen vorhersagen. Je nachdem wie gut oder wie schlecht ihre Vorhersagen mit dem gewählten funktionellen Zusammenhang sind, sind Ihre Materialgleichungen geeignet oder entsprechend eher ungeeignet, die Eigenschaften eines spezifischen Materials zu beschreiben. Im Allgemeinen versucht man natürlich das einfachst mögliche Modell zu finden, welches belastbare Vorhersagen ermöglicht.

In Anerkennung dieses Wunsches beschränkt man sich i.A. in der Betrachtung der Materialantwort auf eine rein elektrische oder eine rein magnetische Antwort.

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}[\mathbf{E}], \quad \mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}[\mathbf{B}], \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}[\mathbf{E}]$$

Das heisst aber nicht, dass andere Materialgesetze nicht existieren würden. Man spricht z.B. von einem bianisotropen Material, wenn ein magnetisches Feld eine elektrische Polarisation induzieren kann. Solche Medien führen zu optischer Aktivität und sind von großer Bedeutung. Die Beschränkung auf obigen Zusammenhang ist aber hier völlig ausreichend.

Weiterhin können wir uns meistens auf eine lineare und isotrope Antwort beschränken. Der im Rahmen der Elektrostatik bzw. Magnetostatik gefundene Zusammenhang lautet

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi_e(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{\chi_m(\mathbf{r})}{1 + \chi_m(\mathbf{r})} \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{j}_{\text{cond}}(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Wir beschränken uns hier wieder auf die Betrachtung eines Leitungsstrom (Konduktionsstrom) und betrachten die Möglichkeit eines Konvektionsstromes nicht weiter.

Entsprechend können wir für die vorher eingeführten Hilfsfelder im Material auch schreiben

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0 \mu(\mathbf{r})} \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

mit

$$\epsilon(\mathbf{r}) = 1 + \chi_e(\mathbf{r}), \quad \mu(\mathbf{r}) = 1 + \chi_m(\mathbf{r})$$

In anisotropen Medien, z.B. Kristallen, benötigen wie einen tensoriellen Zusammenhang als Materialgesetz

$$P_i(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^3 \epsilon_0 \chi_{e \ ij}(\mathbf{r}) E_j(\mathbf{r})$$

Wenn wir die Medien mit starken Feldern wechselwirken lassen, habe wir keinen linearen Zusammenhang mehr, sondern einen nicht-linearen. Wir können die Antwort außerhalb von Resonanzen in eine Taylorreihe bezüglich der Potenz des elektrischen Feldes entwickeln und können schreiben

$$P_i(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \left[\chi_e^{(1)}{}_{ij}(\mathbf{r}) E_j(\mathbf{r}) + \chi_e^{(2)}{}_{ijk}(\mathbf{r}) E_j(\mathbf{r}) E_k(\mathbf{r}) + \chi_e^{(3)}{}_{ijkl}(\mathbf{r}) E_j(\mathbf{r}) E_k(\mathbf{r}) E_l(\mathbf{r}) + \dots \right]$$

Beachten Sie hier wieder, dass die Einsteinsche Summenkonvention angewandt wird; über doppelt auftretende Indizes wird summiert.

Wir können aber auch zunächst völlig allgemein gültige funktionelle Zusammenhänge definieren, z.B. $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}[\mathbf{B}]$ wie beim Ferromagnetismus.

8.3.2 Zeitabhängige Felder \rightarrow Dynamik

Die Materialantwort auf zeitabhängige Felder wird umfassend im Rahmen der Dispersionstheorie diskutiert. Eine ausführliche Diskussion würde über den Rahmen einer Elektrodynamikvorlesung hinaus gehen. Wir möchten aber trotzdem die Grundprinzipien dieser sogenannten (linearen) Resonsetheorie diskutieren.

Zur Diskussion der Materialantwort auf eine zeitlich sich veränderliche externe Anregung kann man zwei physikalisch identische Betrachtungsweisen heranziehen. Sie diskutieren die Materialantwort entweder im Zeitbereich oder im Frequenzbereich.

Im Zeitbereich kann man sagen, dass das Medium nicht momentan (instantan) reagiert auf eine Veränderung der anregenden Felder. Die Medien werden also noch eine Polarisation bzw. eine Magnetisierung besitzen, auch wenn kein anregendes Feld mehr vorhanden ist. Die Medien sind in dem Sinne träge, als dass sie eine zeitlich verzögerte Antwort besitzen.

Alternativ kann man im Frequenzbereich sagen, dass das Medium auf Felder mit unterschiedlichen Frequenzen unterschiedlich reagiert. Dies ist einfach vorstellbar im Grenzfall einer sehr hohen Frequenz. Irgendwann wird das Medium durch seine oben bereits beschriebene Trägheit nicht mehr auf eine sehr hochfrequente Anregung reagieren; weil dies einfach eine zu schnelle Änderung verlangen wird.

Wie Sie hier vielleicht erahnen können, ist das Konzept einer linearen Antwort sehr wichtig. Ein zeitlich sich veränderliches Signal kann mittels Fouriertransformation zerlegt werden in ein Spektrum zeitharmonischer Schwingungen (Oszillationen). Die Materialantwort jeder dieser Oszillationen kann individuell betrachtet werden. Eine Superposition der Antworten gibt mir die Gesamtantwort auf die zeitlich sich veränderliche Anregung an. Diese Grundidee wollen wir im Folgenden ausführlicher diskutieren.

Für schnelle zeitliche Veränderungen, z.B. uns interessiert Licht bei optischen Frequenzen, sind \mathbf{B} und $\mu_0\mathbf{H}$ nahezu identisch. Die meisten Medien sind magnetisch nicht dispersiv. Wir beschränken uns daher im Folgenden auf die Diskussion einer elektrischen Antwort. Betrachtungen können aber in voller Analogie auf eine magnetische Antwort übertragen werden. Weiterhin beschränken wir uns auf eine isotrope, lineare, lokale Antwort. Dies vereinfacht die Diskussion, stellt aber keine intrinsische Beschränkung dar². Die Materialantwort kann einfach beschrieben werden als Faltung des elektrischen Feldes mit einer Responsefunktion $R(\mathbf{r}, t')$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt' R(\mathbf{r}, t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - t')$$

Die Responsefunktion kann auch als zeitliche Greensche Funktion verstanden werden. Sie beschreibt die Polarisierung des Materials nach einer delta-förmigen Anregung in der Zeit. Kausalität verlangt, dass sie für negative Zeiten verschwindet³. Daher gilt

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_0^{\infty} dt' R(\mathbf{r}, t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - t')$$

oder

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt' R(\mathbf{r}, t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - t') \quad \text{mit } R(\mathbf{r}, t') = 0 \text{ für } t' < 0$$

Praktisch gilt, dass für Materialgleichungen im Rahmen der linearen Response das Gedächtnis in der Regel sehr kurz ist; der relevante Bereich in dem die Responsefunktion Werte ungleich null hat, ist relativ klein. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass eine Responsefunktion mit endlichem Gedächtnis verbunden ist mit einer dispersiven, einer frequenzabhängigen Materialantwort.

Dazu führen wir zunächst eine Fouriertransformation der Felder durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \quad \leftrightarrow \quad \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t}$$

Die entsprechenden Transformation heißen Fouriertransformationen (vom Zeit- in den Frequenzbereich) und inverse Fouriertransformationen (vom Frequenz- in den Zeitbereich). Damit wir diese Transformation durchführen können, müssen die entsprechenden Felder zeitlich und räumlich gegen null im Unendlichen abgeklungen sein.

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

Beachten Sie hier bitte das vorsätzlich anders gewählte Symbol für das elektrische Feld im Frequenzbereich. Dies ist nicht das Gleiche wie das elektrische Feld im Zeitbereich. Die Größe $\bar{\mathbf{E}}(\omega)$ beschreibt die Amplitude des elektrischen Feldes, welches mit einer festen Frequenz

² Die Ausnahme ist hier die Forderung nach einer linearen Antwort.

³ Die Wirkung kann nicht vor der Ursache kommen.

ω oszilliert und zum gesamten zeitlich sich veränderlichen elektrischen Feld beiträgt.

Vergleichbare Transformationen gelten auch für die Polarisation

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}$$

Mit diesem Rüstzeug können wir die Polarisation umschreiben

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt' R(\mathbf{r}, t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - t') \\ &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt' R(\mathbf{r}, t') \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega(t-t')} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \epsilon_0 \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt' R(\mathbf{r}, t') e^{i\omega t'} \right] \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Wenn wir den Term vergleichen, der an Stelle der eckigen Klammer in der obigen Gleichung für $\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$ auftaucht, können wir diese beiden gleichsetzen und finden

$$\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \chi(\mathbf{r}, \omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$$

mit

$$\chi(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' R(\mathbf{r}, t') e^{i\omega t'} \leftrightarrow R(\mathbf{r}, t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \chi(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t'}$$

Hier wurde die Suszeptibilitätsfunktion $\chi(\mathbf{r}, \omega)$ eingeführt. Sie entspricht der Fouriertransformation der Responsefunktion. Sie ist im Gegensatz zur Responsefunktion i.A. komplex. Wir sehen aber, dass der funktionelle Zusammenhang zwischen Polarisation und elektrischem Feld im Fourierraum die Einfachheit der gefundenen Formulierung der Elektrostatik beibehält. Diese Betrachtung kann analog auch für die dielektrische Verschiebung durchgeführt werden.

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 [1 + \chi(\mathbf{r}, \omega)] \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$$

Hier ist $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$ die komplexe dielektrische Funktion ⁴.

Man bezeichnet die Frequenzabhängigkeit der Suszeptibilität bzw. der dielektrischen Funktion als Dispersion. Die eigentliche Materialdispersion wird durch den Realteil beschrieben. Der Imaginärteil bezeichnet die Absorption. Real- und Imaginärteil sind nicht frei wählbar, sondern hängen über eine Integraltransformation zusammen. Diese wird als Kramers-Kronig-Beziehung bezeichnet.

Wir wollen die Materialantwort konkretisieren am Beispiel stationärer Felder. Diese oszillieren mit einer festen Frequenz. Ein stationäres elektrisches Feld wird beschrieben als

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left[\bar{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega_0 t} + c.c. \right]$$

Mit der Fouriertransformation der Delta-Distribution

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t) e^{i\omega t} = \frac{1}{2\pi}$$

⁴ Beachten Sie bitte, so etwas wie eine Dielektrizitätskonstante gibt es nicht in der Dynamik, benutzen Sie bitte dieses Wort nicht.

bzw. der inversen Fouriertransformation

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega t} = \delta(t) \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} = 2\pi \delta(\omega)$$

können wir das Frequenzspektrum dieses zeitharmonischen Feldes schreiben als

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega_0 t} + c.c.] e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} [\bar{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) \delta(\omega - \omega_0) + \bar{\mathbf{E}}_0^*(\mathbf{r}) \delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

Der allgemeine Zusammenhang zwischen Polarisation und Feld lautet

$$\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \chi(\mathbf{r}, \omega) \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) \delta(\omega - \omega_0) + \bar{\mathbf{E}}_0^*(\mathbf{r}) \delta(\omega + \omega_0)]$$

Diese Polarisation im Fourierraum soll nun invers Fouriertransformiert werden

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \epsilon_0 \chi(\mathbf{r}, \omega) \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) \delta(\omega - \omega_0) + \bar{\mathbf{E}}_0^*(\mathbf{r}) \delta(\omega + \omega_0)] e^{-i\omega t} \\ \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi(\mathbf{r}, \omega_0) \bar{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi(\mathbf{r}, -\omega_0) \bar{\mathbf{E}}_0^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_0 t} \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{r}, -\omega_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt R(t) e^{-i\omega_0 t} \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt R^*(t) e^{i\omega_0 t} \right]^* \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt R(t) e^{i\omega_0 t} \right]^* \\ &= \chi(\mathbf{r}, \omega_0)^* \end{aligned}$$

Abschließend erhalten wir so für die Polarisation

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi(\mathbf{r}, \omega_0) \bar{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega_0 t} + c.c. \\ &= \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{P}}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega_0 t} + c.c.] \end{aligned}$$

mit $\bar{\mathbf{P}}_0(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi(\mathbf{r}, \omega_0) \bar{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})$. Dieser Ausdruck gilt auch für schmalbandige, sogenannte quasi-stationäre, Felder. Alles was wir fordern ist, dass das Frequenzspektrum sehr eng relativ zur Trägerfrequenz ist.

$$\Delta\omega \ll \omega_0 \quad \rightarrow \quad \chi(\mathbf{r}, \omega) \approx \chi(\mathbf{r})_{\omega_0}$$

Analoge Betrachtungen können für den Zusammenhang von $\bar{\mathbf{j}}_0(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}, \omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ durchgeführt werden.

8.3.3 Maxwellgleichungen im Fourierraum

So wie wir die Materialgleichung im Frequenzraum einfach algebraisch ausdrücken können, können wir auch die gesamten Maxwellgleichungen einfach ausdrücken. Dazu müssen wir diese Fouriertransformieren. Die Frage ist, was passiert mit der Zeitableitung bei der Fouriertransformation⁵?

⁵ Die anderen Terme sind trivial.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} e^{i\omega t} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t}] - \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial e^{i\omega t}}{\partial t} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} - i\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} \\ &= -i\omega \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned}$$

Wir erkennen hier, dass aus der zeitlichen Ableitung ein Produkt wird. Dieser Zusammenhang ist sehr wichtig und er wird als Fouriertransformationspaar bezeichnet

$$\frac{\partial}{\partial t} \xrightarrow{FT} -i\omega$$

Wir betrachten im Folgenden die einzelnen Maxwellgleichungen.

$$\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{j}_{\text{cond}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_{\text{conv}}(\mathbf{r}, t)$$

wird zu

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) &= -i\omega \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) + \bar{\mathbf{j}}_{\text{cond}}(\mathbf{r}, \omega) + \bar{\mathbf{j}}_{\text{conv}}(\mathbf{r}, \omega) \\ &= [-i\omega \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega) + \sigma(\mathbf{r}, \omega)] \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \bar{\mathbf{j}}_{\text{conv}}(\mathbf{r}, \omega) \\ &= -i\omega \epsilon_0 \hat{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \bar{\mathbf{j}}_{\text{conv}}(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned}$$

Hier wurde formal die (verallgemeinerte) komplexe dielektrische Funktion eingeführt

$$\hat{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\mathbf{r}, \omega) + i \frac{\sigma(\mathbf{r}, \omega)}{\omega \epsilon_0}$$

Diese Einführung ist sinnvoll, da auf der Ebene der Beschreibung der Materialienantwort keine Unterscheidung mehr getroffen werden kann zwischen einer dielektrischen und einer metallischen Antwort. Experimentell messen Sie immer nur die verallgemeinerte (oder auch generalisierte) dielektrische Funktion.

Die Maxwellgleichungen im Fourierraum und unter der Annahme der bisher postulierten Materialgesetze lauten

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) &= i\omega \mu_0 \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \\ \epsilon_0 \text{div} [\epsilon(\mathbf{r}, \omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)] &= \bar{\rho}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, \omega) \\ \text{div } \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) &= 0 \\ \text{rot } \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) &= \bar{\mathbf{j}}_{\text{conv}}(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \epsilon_0 \hat{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned}$$

8.4 Mathematischer Exkurs: die Fourier Transformation

Die Fourier Transformation ist das mathematische Werkzeug, mit dem man eine beliebige Verteilung eines Feldes ausdrückt in ein Spektrum ebener Wellen. Ausgangspunkt ist die Fourierreihenentwicklung für eine periodische Funktion $f(x)$ mit der Periode a . Dies lässt sich immer schreiben mittels

$$f(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\left(m\frac{2\pi}{a}x\right) + B_m \sin\left(m\frac{2\pi}{a}x\right)$$

Die Fourierkoeffizienten A_m und B_m berechnen sich aus dem Überlappintegral, also der Projektion, der Funktion $f(x)$ auf die entsprechende harmonische Schwingung.

$$A_m = \frac{2}{a} \int_0^a dx f(x) \cos\left(m\frac{2\pi}{a}x\right)$$

$$B_m = \frac{2}{a} \int_0^a dx f(x) \sin\left(m\frac{2\pi}{a}x\right)$$

Alternativ kann dies auch mit Hilfe der Exponentialfunktion beschrieben werden als

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{im\frac{2\pi}{a}x}$$

$$f_m = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^a dx f(x) e^{-im\frac{2\pi}{a}x}$$

Formal kann dieser Formalismus auf beliebige nichtperiodische Funktionen erweitert werden, wenn man den Grenzübergang zu einer unendlichen ausgedehnten Periode geht. Dann sind die harmonischen Schwingungen nicht mehr diskret, mit die Funktion beschrieben werden kann, sondern werden eine kontinuierliches Spektrum; dem Fourierspektrum. Formal schreibt man

$$m\frac{2\pi}{a} \rightarrow k$$

$$\sum_m \rightarrow \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk$$

$$f_m \rightarrow \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \tilde{f}(k)$$

Daraus folgt

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx}$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}$$

Beachten Sie bitte weiterhin, dass es bis zu einem gewissen Masse auch einen Freiheitsgrad in der Wahl des Vorfaktors der Fouriertransformationen gibt. Hier ist er mit einem $\frac{1}{2\pi}$ vor der Hintransformation

angenommen wurden; verbreitet ist auch eine symmetrische Aufteilung in zwei Vorfaktoren mit jeweils dem Wert $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Ganz gleich wie Sie das wählen, wichtig ist in jedem Falle, dass Sie nach einmaligem Rundlauf (Realraum \rightarrow Fourierraum \rightarrow Realraum) wieder bei der identischen Funktion angekommen sind.

Es gelten folgende Rechenregeln.

$$\begin{aligned} f'(x) &\leftrightarrow ik\tilde{f}(k) \\ f^{(n)}(x) &\leftrightarrow (ik)^n\tilde{f}(k) \\ f(x-x_0) &\leftrightarrow e^{ikx_0}\tilde{f}(k) \\ \delta(x-x_0) &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}e^{ikx_0} \end{aligned}$$

Insbesondere aus der ersten Eigenschaft, ergeben sich die folgenden Fouriertransformationspaare für eine ebene Welle (diese diskutieren wir später) mit dem Ansatz $e^{i(kx-\omega t)}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\leftrightarrow ik \\ \frac{\partial}{\partial t} &\leftrightarrow -i\omega \end{aligned}$$

Dies ist sehr wichtig zur Transformation der Maxwell'schen Gleichungen vom Realraum (räumlich oder zeitlich) in den entsprechenden Fourierraum.

Im Folgenden soll gezeigt werden, wie Sie die Fouriertransformation zur Lösung einer Differentialgleichung verwenden können. Gegeben sei das Problem des getriebenen harmonischen Oszillator ohne Dämpfung. Diese wird beschrieben mittels der Differentialgleichung

$$m\ddot{r}(t) + m\omega_0^2 r(t) = F(t)$$

Durch Fouriertransformation und Durchführen der zweiten Zeitableitung kommen wir zu

$$(i\omega)^2 m\tilde{r}(\omega) + m\omega_0^2 \tilde{r}(\omega) = \tilde{F}(\omega)$$

Diese Gleichung lässt sich analytisch lösen zu

$$\tilde{r}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Hier ergibt sich das genaue Spektrum durch den zeitlichen Verlauf der treibenden Kraft. Die Lösung im Zeitbereich erhalten wir durch inverse Fouriertransformation

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\tilde{F}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{-i\omega t}$$

(8.1)

8.5 Übergangsbedingungen an den Grenzen zweier Medien

Wie früher bereits mehrmals durchgeführt und gezeigt, folgen die Übergangsbedingungen direkt aus den Maxwellgleichungen.

8.5.1 Normalkomponenten

Wir betrachten wieder das Model Schuhcremedose und evaluieren die Maxwellgleichungen in einem kleinen Volumen, welches sich gerade an der Grenzfläche zwischen zwei homogenen Medien befindet. Aus

$$\int_{(V)} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_V dV \cdot \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_V dV \rho_{\text{ext}} = Q_{\text{ext}}$$

Da die Schuhcremedose beliebig gewählt werden kann, haben in dieser Gleichung wieder nur die Oberflächenladungen einen Beitrag. Da wir normal zur Oberfläche der Schuhcremedose integrieren, ist in der Integration wieder nur die Normalkomponente von \mathbf{D} relevant. Und da das Integrationsvolumen beliebig gewählt werden kann, muss der Zusammenhang auch lokal gültig sein. Wir erhalten

$$D_n^{(2)}(\mathbf{r}, t) - D_n^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \eta_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$$

Für den Fall, dass die Oberflächenladungsdichte verschwindet, $\eta_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = 0$, müssen die Normalkomponenten der dielektrischen Verschiebung im Zeit- $[D_n(\mathbf{r}, t)]$ bzw. auch im Frequenzbereich $[\bar{D}_n(\mathbf{r}, \omega)]$ stetig sein. Für den Frequenzbereich kann dann explizit die folgende Kontinuität gefordert werden

$$\epsilon_1(\mathbf{r}, \omega) \bar{E}_n^{(1)}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_2(\mathbf{r}, \omega) \bar{E}_n^{(2)}(\mathbf{r}, \omega)$$

In Analogie kann man aus

$$\int_{(V)} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

schlussfolgern, dass

$$B_n^{(2)}(\mathbf{r}, t) = B_n^{(1)}(\mathbf{r}, t)$$

8.5.2 Tangentialkomponenten

Da die Gleichung

$$\int_{(F)} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{d}{dt} \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

gültig sein muss für eine beliebig kleine Fläche, durch die der Fluss verschwindet, müssen die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes im Zeit- und Frequenzraum stetig übergehen

$$E_t^{(1)}(\mathbf{r}, t) = E_t^{(2)}(\mathbf{r}, t) \quad \rightarrow \quad \bar{E}_t^{(1)}(\mathbf{r}, \omega) = \bar{E}_t^{(2)}(\mathbf{r}, \omega)$$

Analog kann man als die letzte verbliebene Maxwellgleichung

$$\int_{(F)} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = I_{\text{makr}} + \frac{d}{dt} \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$$

betrachten. Hier ergibt sich

$$H_t^{(2)}(\mathbf{r}, t) - H_t^{(1)}(\mathbf{r}, t) = [j_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t)]_{\text{OF}}$$

Da meistens keine Oberflächenströme existieren, geht die Tangentialkomponente des Magnetfeldes auch stetig über.

In Abwesenheit von Oberflächenladungen und Oberflächenströme sind die E_t , B_n , D_n und H_t Komponenten stetig.

8.6 Die elektrodynamischen Potentiale und die Eichtransformationen

Ziel unserer Bemühungen im Folgenden soll es sein, für eine gegebene makroskopische Stromverteilung $\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t)$ und eine gegebene externe Ladungsdichte $\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ die elektrischen und magnetischen Felder auszurechnen. Dies ist eine einfache Extrapolation der Fragestellungen der Elektrostatik bzw. der Magnetostatik. Es ist daher nicht überraschend, dass der formale Weg zum Auffinden der Lösung vergleichbar ist zu unseren früheren Strategien. Als erstes führen wir Potentiale ein, welche die homogenen Maxwellgleichungen wieder automatisch erfüllen, und müssen dann nur noch die inhomogenen Maxwellgleichungen lösen. Diese Potentiale können wir ziemlich formal aus früheren Kapiteln übernehmen, da sich die homogenen Maxwellgleichungen in ihrer Form selbst nicht geändert haben. Die homogenen Maxwellgleichungen

$$\text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

werden automatisch erfüllt mit

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \text{grad } \phi(\mathbf{r}, t)$$

Wenn die beiden Potentiale einmal bekannt sind, können die Felder mit den beiden obigen Gleichungen immer berechnet werden. Bestimmungsgleichungen für die Potentiale als Funktion der Quellen ergeben sich dann gerade aus den inhomogenen Maxwellgleichungen.

Die Potentiale selbst sind aber nicht eindeutig bestimmt. Eichtransformationen überführen verschiedene Potentialsätze ineinander, ohne aber die observablen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} zu verändern. Diese bleiben invariant. Eine Eichtransformation lässt sich damit formal schreiben als

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \phi(\mathbf{r}, t) \xrightarrow{\text{Eichtransformation}} \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t), \phi'(\mathbf{r}, t)$$

Die Eichtransformation

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \text{grad}f(\mathbf{r}, t)$$

lässt das \mathbf{B} Feld invariant, da die Rotation eines Gradientenfeldes immer verschwindet. Eingesetzt in den Ausdruck für das elektrische Feld und mit der Forderung nach Invarianz ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \text{grad } \phi'(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } f(\mathbf{r}, t) - \text{grad } \phi'(\mathbf{r}, t) \\ &= -\text{grad} \left[\phi'(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\text{grad } \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\end{aligned}$$

Damit die Eichtransformation auch das \mathbf{E} Feld invariant lässt, muss das skalare Potential daher simultan mit der gleichen Eichfunktion $f(\mathbf{r}, t)$ folgendermaßen geeicht werden

$$\phi'(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

8.6.1 Die inhomogenen Wellengleichungen im Vakuum

Jetzt haben wir unsere Potentiale eingeführt, welche die homogenen Maxwellgleichungen automatisch erfüllen. Jetzt müssen wir uns noch um die inhomogenen Maxwellgleichungen kümmern. Diese inhomogenen Maxwellgleichungen lauten

$$\epsilon_0 \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \quad \text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Wir setzen nun die Potentiale in diese Gleichungen ein

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \text{rot rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \left[-\frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \right] \\ \epsilon_0 \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \text{div} \left[-\text{grad } \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}$$

Auflösen dieser beiden Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned}\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \text{grad} \left[\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] &= -\mu_0 \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) \\ \Delta \phi(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

An sich wären wir hier fertig, aber die Gleichungen sind sehr unhandlich, da insbesondere noch die Potentialgleichungen gekoppelt sind. In beiden Gleichungen tauchen immer noch sowohl das skalare als auch das Vektorpotential auf. Zwei Gleichungen zu haben in denen jeweils entweder das skalare oder das Vektorpotential auftreten, wäre wesentlich angenehmer in der mathematischen Handhabung. Die Nutzung der Freiheiten von Eichtransformationen erlaubt uns, dieses Problem zu lösen und die Bestimmungsgleichungen für die beiden Potentiale zu entkoppeln. In der Wahl einer geeigneten Eichtransformation gibt es aber keine eindeutige Vorschrift, sondern mehrere Möglichkeiten. Diese geben den beiden Bestimmungsgleichungen unterschiedliche

Formen, die im Kontext weiterer Betrachtungen jeweils Vorteile mit sich bringen können. Die gebräuchlichsten Eichtransformationen sind die Lorenz-Eichung und die Coulomb-Eichung, weshalb wir diese im Folgenden besprechen möchten.

8.6.2 Lorenz-Eichung

In der Lorenz-Eichung⁶ wird so geeicht, dass

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$$

erfüllt ist. Die inhomogenen Wellengleichungen reduzieren sich dann zu

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \square \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(\mathbf{r}, t) &= \square \phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Hierbei wurde als neuer Operator der \square -Operator eingeführt. Er wird d'Alembert-Operator genannt oder auch 'Box-Operator'. Im Rahmen der Lorenzeichung gehören alle drei Gleichungen zusammen. Eine mögliche Lösung für die Potentiale muss die Lorenzeichung erfüllen. Zwei Dinge müssen wir noch klären.

Als erstes, ist die Lorenzeichung mit erlaubten Eichtransformationen überhaupt möglich bzw. wie muss die entsprechende skalare Eichfunktion aussehen? Dazu betrachten wir ein gegebenes \mathbf{A}' und ϕ' mit $\operatorname{div} \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = g(\mathbf{r}, t)$. Wie muss also die skalare Eichfunktion $f(\mathbf{r}, t)$ als Funktion von $g(\mathbf{r}, t)$ aussehen, damit \mathbf{A} und ϕ die Lorenzkonvention erfüllen? Wir betrachten

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \operatorname{grad} f(\mathbf{r}, t)] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] &= g(\mathbf{r}, t) \\ \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \Delta f(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} &= g(\mathbf{r}, t) \\ \rightarrow \square f(\mathbf{r}, t) &= g(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

Wir müssen also für die Eichtransformation noch zusätzlich eine weitere Wellengleichung lösen.

Als zweites müssen wir zeigen, dass die Lorenzeichung in Einklang mit den obigen Wellengleichungen stehen.

$$\begin{aligned} \square \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) \quad | \operatorname{div} \\ \square \phi(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad \left| \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right. \end{aligned}$$

Nach Anwenden der angedeuteten Operation, führt das zu den folgenden beiden Gleichungen

$$\operatorname{div} [\square \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)] = -\mu_0 \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t)$$

⁶ Beachten Sie hier bitte das 'Lorenz' mit 'z'. Die Eichung wurde nach Ludvig Lorenz benannt, der diese 1869 in seiner Arbeit 'Über die Identität der Schwingungen des Lichts mit den elektrischen Strömen' Ann. Phys., 207: 243–263 beschrieb.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} [\square \phi(\mathbf{r}, t)] = -\frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Addition beider Gleichungen führt zu dem folgenden Ausdruck:

$$\square \left[\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) \right] = -\mu_0 \left[\text{div } \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] = 0$$

Die letzte Schlussfolgerung stammt aus der Tatsache, dass dort nichts weiter als die Kontinuitätsgleichung steht. Die Lorenzkonvention und die Lösung der Wellengleichung sind also kompatibel.

8.6.3 Greensche Funktionen der zeitabhängigen Wellengleichung

Wir wollen die beiden Wellengleichungen im Folgenden mit der Methode der Greenschen Funktion lösen. Da beide Gleichungen mathematisch die gleiche Form besitzen, wollen wir sie abstrahieren, um beide Wellengleichungen simultan behandeln zu können. Mit

$$\square V(\mathbf{r}, t) = -q(\mathbf{r}, t)$$

$$V \rightarrow A_i, \text{ bzw. } \phi \quad \text{und} \quad q \rightarrow \mu_0 j_i, \text{ bzw. } \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

lautet die formale Lösung zunächst einmal

$$V(\mathbf{r}, t) = \int \int dV' dt' G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') q(\mathbf{r}', t')$$

wobei die Greensche Funktion der Bestimmungsgleichung

$$\square G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')$$

genügt und die natürlichen Randbedingungen erfüllt werden

$$V(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0 \text{ und } G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') \rightarrow 0 \text{ für } r, t \rightarrow \infty$$

Wie sieht aber nun genau diese retardierte Greensche Funktion aus? Wir lernen dazu im Folgenden die Fouriertransformation als neue Methode zur Bestimmung der Greenschen Funktion kennen. Es gilt:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dV_k d\omega e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{-i\omega(t - t')}$$

mit dV_k einem Volumenelement im reziproken Raum, $dV_k = dk_x dk_y dk_z$. Die Fouriertransformation der Greenschen Funktion berechnet sich zu

$$G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dV_k d\omega g(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{-i\omega(t - t')}$$

mit $g(\mathbf{k}, \omega)$ der Greenschen Funktion im Fourierraum. Der d'Alembert Operator angewandt auf diese Greensche Funktion ergibt

$$\square G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dV_k d\omega \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) g(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{-i\omega(t - t')}$$

mit $k^2 = \mathbf{k}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Wenn beide Ausdrücke in die obige Definitionsgleichung für die Greensche Funktion eingesetzt werden (das

Produkt der Delta-Distributionen muss noch mit einem negativen Vorzeichen versehen werden), können wir der Fouriertransformierten der Greenschen Funktion ein Ergebnis zuordnen

$$g(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Damit erhalten wir als Endergebnis

$$G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dV_k d\omega \frac{c^2}{\mathbf{k}^2 c^2 - \omega^2} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{-i\omega(t - t')}$$

Dieses Integral wird mit Hilfe der analytischen Fortsetzung gelöst. Mehr dazu sollte im Rahmen der Funktionentheorie geklärt werden. Die Lösung dieser Gleichung wird unter Umständen Gegenstand eines Tutoriums sein. Das Ergebnis ist in jedem Falle die retardierte Greensche Funktion der Wellengleichung

$$G_{\text{ret}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') = \frac{1}{4\pi R} \delta\left(\tau - \frac{R}{c}\right) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)$$

Diese ist eine Lösung der Gleichung

$$\square G_{\text{ret}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')$$

Damit ist die Lösung von $\square V(\mathbf{r}, t) = -q(\mathbf{r}, t)$ mit natürlichen Randbedingungen gegeben als

$$\begin{aligned} V_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) &= \int \int dV' dt' G_{\text{ret}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') q(\mathbf{r}', t') \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \int dV' dt' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} q(\mathbf{r}', t') \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int dV' \frac{q(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned}$$

Diese allgemeine Lösung kann noch spezifiziert werden auf die Potentiale, für die V nur ein Platzhalter gewesen ist

$$\begin{aligned} \phi_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \mathbf{A}_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned}$$

Dies sind die retardierten Potentiale.

Abschliessend sei bemerkt, dass die Lorenzeichung vorzugsweise im Kontext der relativistischen Physik verwendet wird, wie wir später auch noch sehen werden. Die große Symmetrie erlaubt eine vereinheitlichende Notation, welches formal vieles in der Formulierung vereinfachen wird.

8.6.4 Die Coulomb oder die transversale Eichung

Zur Erinnerung, wollen wir noch einmal festhalten, dass unser Ausgangspunkt die Potentialgleichungen vor der Lorenzeichung waren. Diese lauteten

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \text{grad} \left[\text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] = -\mu_0 \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t)$$

$$\Delta \phi(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}$$

In der Coulombeichung fordern wir, dass

$$\text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$$

gilt. Die Lösung für das skalare Potential, dass der Gleichung

$$\Delta \phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}$$

genügt, wird dann sehr einfach und schreibt sich als

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Die Lösung entspricht der Lösung der Elektrostatik. Nominell beobachten wir keine Retardierung. Die Zeit ist lediglich ein Parameter, vergleichbar zur Situation wie bei langsam veränderlichen Feldern. Das Potential klebt an der Ladungsverteilung. Dieses überraschende Ergebnis (Informationsübertragung mit Überlichtgeschwindigkeit?) würden wir später noch einmal genauer untersuchen. Es löst sich aber auf, wenn wir die experimentell observablen Felder betrachten. Für diese besteht natürlich eine Retardierung. Wenn das skalare Potential bekannt ist, kann das Vektorpotential auch leicht gelöst werden

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \text{grad} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\mu_0 \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \text{grad} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Diese Gleichung sieht nun eigentlich schon sehr entkoppelt aus, da das Potential als bekannt vorausgesetzt werden kann. Das Vektorpotential hängt nur noch parametrisch vom skalaren Potential ab. Nichtsdestotrotz ist eine volle Entkopplung wünschenswert, damit es auch formal zu keiner Verwirrung kommt. Dies können wir erreichen, wenn wir den letzten Term in der obigen Gleichung als einen Stromterm aufschreiben. Dazu betrachten wir

$$-\frac{1}{c^2} \text{grad} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad}_r \int_V dV' \frac{\frac{\partial \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}', t)}{\partial t}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$= \frac{1}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad}_r \int_V dV' \frac{\text{div}_{r'} \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad}_r \int_V dV' \frac{\text{div}_{r'} \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Dieses Ergebnis merken wir uns zunächst. Wir werden es später benötigen.

Um die Notation zu erleichtern, lassen wir hier und von nun an den Subskript 'makr' weg und wir zerlegen die Stromdichte in einen quellfreien transversalen Teil und einen wirbelfreien longitudinalen Teil.

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_T(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_L(\mathbf{r}, t), \quad \text{div } \mathbf{j}_T(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \text{rot } \mathbf{j}_L(\mathbf{r}, t) = 0$$

Wir können die Stromdichte auf eine etwas unkonventionelle, aber hilfreiche Art ausdrücken mittels

$$\Delta_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rightarrow \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \Delta_r \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Wenn wir $-\Delta = \text{rot rot} - \text{grad div}$ benutzen, und das Integral in zwei Teile aufspalten, können wir unmittelbar eine Aufteilung in transversalen und longitudinalen Strom vornehmen

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \left[\text{rot}_r \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] - \frac{1}{4\pi} \text{grad} \left[\text{div}_r \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]$$

Der erste Term dieses Ausdrucks muss der transversale Teil des Stromes sein, da zum Schluss die Rotation angewandt wird und diese Rotation des longitudinalen Anteils verschwindet. Daraus müssen wir aber schlussfolgern, dass der zweite Term gerade genau der longitudinale Strom ist. In der Summe müssen immerhin den Gesamtstrom erhalten. Wir betrachten diesen zweiten Term weiter. Wir können daher schreiben

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_L(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{4\pi} \text{grad div}_r \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \text{grad}_r \int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \text{grad}_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \text{grad}_r \int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \text{grad}_{r'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \text{grad}_r \int_V dV' \text{div}_{r'} \left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] - \frac{1}{4\pi} \text{grad}_r \int_V dV' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{div}_{r'} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \text{grad}_r \int_V dV' \frac{\text{div}_{r'} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned}$$

Von vorne benutzen wir, dass

$$\frac{1}{c^2} \text{grad} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad}_r \int_V dV' \frac{\text{div}_{r'} \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Durch Vergleich der beiden Ausdrücke erhalten wir den folgenden finalen Zusammenhang

$$\mu_0 \mathbf{j}_L(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \text{grad} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Wir können dieses Ergebnis jetzt in die Ursprungsgleichung für das Vektorpotential einsetzen

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \text{grad} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= -\mu_0 \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 (\mathbf{j}_{\text{makr}})_L(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \left[\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \text{grad} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 (\mathbf{j}_{\text{makr}})_T(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

Beachten Sie bitte, dass für die Coulombbeziehung all die folgenden Gleichungen zusammengehören

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \Delta \phi(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 (\mathbf{j}_{\text{makr}})_T(\mathbf{r}, t) \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \left[\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \text{grad} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

Die Lösung der Potentiale in Coulombbeziehung lauten dann

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}', t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int dt' dV' G_{\text{ret}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') (\mathbf{j}_{\text{makr}})_T(\mathbf{r}', t') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{(\mathbf{j}_{\text{makr}})_T(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned}$$

Coulomb-Eichung und Kausalität

Abschließend wollen wir noch kurz die Kausalität in der Coulombbeziehung diskutieren. Das instantane Potential schien zu suggerieren, dass Kausalität verletzt ist. Dies ist aber in der Tat nicht so. Das Vektorpotential kann geschrieben werden als

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\left[\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) - \epsilon_0 \text{grad}_{\mathbf{r}'} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}', \tau)}{\partial \tau} \right]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

In dieser Definition des Vektorpotentials ist die Retardierung gewährleistet. Das \mathbf{B} Feld ist damit kausal. Das \mathbf{E} Feld leitet sich unmittelbar daraus ab

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_0) + \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \int_{t_0}^t [\text{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t') - \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t')] dt'$$

Das E-Feld ist auch kausal. Wenn man zum Schluss die Felder berechnet, hat alles seine Richtigkeit.

Abschließend sei bemerkt, dass die Coulombbeziehung vorzugsweise im Kontext der Quantenmechanik verwendet wird, insbesondere wenn

die Wechselwirkung von Licht mit Materie nichtrelativistisch diskutiert wird. Das skalare Potential verursacht durch Ladungen im Raum, ist dann immer die Lösung einer Poissongleichung, welche an sich einfach zu finden ist. Das Potential hängt dann nur parametrisch von der Größe und dem Ort der Ladungen ab. Man kann sich in seiner Betrachtung dann voll und ganz auf das Vektorpotential konzentrieren, was die Diskussion häufig vereinfacht.

8.7 Die Energiebilanz – der Poyntingsche Satz

Um den Fluss der Energie in einem elektromagnetischen Feld richtig beschreiben zu können, wollen wir im Folgenden eine Energiebilanz erstellen. Diese Energiebilanz beschreibt uns zusammen die Feldenergie, die im Ladungsträger gespeicherte Energie und den Energiefluss im Vakuum und im Medium. Mit Hilfe dieses Satzes können wertvolle Aussagen zu observablen Größen getroffen werden. Ein praktisches Beispiel wäre hier die Berechnung der orts aufgelösten Absorption von elektromagnetischen Feldern in einer Solarzelle. Diese orts aufgelöste Absorption würde sich in ein räumliches Profil übersetzen von Ladungen, welche dann anschliessend diffundieren müssen zu den entsprechenden Kontakten.

Der Ausgangspunkt im Folgenden sind die Maxwellgleichungen. Zur Vereinfachung der Notation würden wir die Orts- und Zeitabhängigkeit weglassen. Diese wird aber implizit immer mit angenommen. Bei Endergebnissen würden wir diese Orts- und Zeitabhängigkeit wieder mit vermerken. Weiterhin werden wir den Index 'makr' in der Stromdichte weglassen.

Zur Herleitung der Energiebilanz gehen wir von den beiden Rotationsgleichungen aus. Wir multiplizieren die Rotationsgleichung für das \mathbf{E} Feld mit \mathbf{H} und die Rotationsgleichung für das \mathbf{H} Feld mit \mathbf{E} .

$$\begin{aligned}\mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ -\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\end{aligned}$$

Mit Hilfe von $\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H}$ ergibt die Subtraktion der beiden obigen Gleichungen

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

Mit dem Poyntingvektor

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

welcher die elektromagnetische Energiestromdichte beschreibt, folgt

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{div } \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

Dies ist der allgemeine Poyntingsche Satz. Die Energiedichte selbst ist nicht richtig zu erkennen. Wir werden den Satz aber im Folgenden verwenden und auf konkrete Medien anwenden. Diese werden berücksichtigt durch explizite Materialgleichungen. Wir werden im Folgenden Medien mit ansteigender Komplexität diskutieren.

8.7.1 Der Poyntingsche Satz in nichtdispersiven Medien

Vakuum

Das einfachste Medium ist das Vakuum. Dieses ist natürlich nichtdispersiv und die Materialgleichungen sind einfach

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

Eingesetzt in den obigen Ausdruck ergibt sich so

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H}^2 \right) = \frac{\partial w_{\text{el}}}{\partial t} + \frac{\partial w_{\text{mag}}}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

Damit ergibt sich als Poyntingscher Satz

$$\frac{\partial w(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \text{div } \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

Dies ist ein lokaler Energiesatz. Die lokale elektromagnetische Energiedichte ändert sich durch Quellen der Energiestromdichte und durch Umwandlung von elektromagnetischer Energie in andere Energieformen, einen Aspekt den wir im Folgenden noch genauer diskutieren werden.

Wir können auch zu einem globale Energiesatz gelangen, in dem wir über den gesamten Raum integrieren:

$$\frac{dW(t)}{dt} + \int_{(V)} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f} = - \int_V dV \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

mit der gesamten im elektromagnetischen Feld gespeicherten Energie

$$W(t) = \int_V dV w(\mathbf{r}, t)$$

Wie Sie sehen können, ist die Energie im Volumen und der Fluss keine Erhaltungsgröße, wenn der Quellterm auf der rechten Seite der Gleichung $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \neq 0$ ist. Durch diesen Term wird Energie erzeugt oder vernichtet.

Um die Gleichung doch noch etwas besser zu verstehen, erinnern wir uns an die Mechanik. Die kinetische Energie einer Ansammlung von Massepunkten war

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2$$

Die zeitliche Änderung der kinetischen Energie entsprach der von Kräften geleisteten Arbeit

$$\frac{dW_{\text{kin}}}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{F}_i = N$$

Mit der Lorentzkraft, die auf jede einzelne Ladung wirkt,

$$\mathbf{F}_i = q_i \mathbf{E}_i + q_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \times \mathbf{B}_i \right)$$

folgt

$$N = \sum_i q_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \mathbf{E}_i = \int_V dV \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

mit $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)]$. Diese Vereinfachung ist möglich, da der zweite Term der Lorentzkraft keinen Beitrag liefert (der Vektor als Ergebnis des Kreuzproduktes steht senkrecht zu den beiden Vektoren und damit verschwindet das dann folgende Skalarprodukt). Damit ist

$$\frac{dW_{\text{kin}}}{dt} = \int_V dV \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

Die gesamte globale Bilanzgleichung sieht damit folgendermaßen aus

$$\frac{d}{dt} [W(t) + W_{\text{kin}}(t)] = - \int_{(V)} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f}$$

Die zeitliche Änderung der Gesamtenergie, bestehend aus Anteilen der kinetischen Energie der Ladungsträger und der Feldenergie im betrachteten Volumen, entspricht genau dem Energiestrom aus dem Volumen. Für abgeschlossene Systeme, aus denen Energie weder hinaus- noch hineinfließen kann ($\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f} = 0$), folgt Energieerhaltung. Durch den Term $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ wird die Umwandlung elektromagnetischer Energie in andere Energieformen beschrieben. Beispiele hierfür sind die Umwandlung mechanischer in elektromagnetische Energie (Generatoren), elektromagnetischer in mechanische Energie (Motoren) oder auch die Umwandlung von elektromagnetischer in kinetische Energie. Dies führt zur Erzeugung von Wärme, z.B. an einem Ohmschen Widerstand.

Medien ohne Dispersion

Beachten Sie bitte gleich zu Beginn, nominell gibt es keine Medien ohne Dispersion. Dies ist als Approximation zu verstehen, z.B. wenn Sie Materialien diskutieren, die im betrachteten Spektralbereich keine Resonanzen besitzen, die Materialeigenschaften in diesem Spektralbereich als konstant bei allen Frequenzen von Interesse betrachtet werden können. In diesem und nur in diesem Fall können Sie die Materialgesetze im Zeitbereich nicht als Faltung, sondern als Produkt aufschreiben:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad \text{und} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mu(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

$$\rightarrow w(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

Hier können alle Betrachtungen analog zum Vakuum durchgeführt werden; lediglich die Definition der elektromagnetischen Energiedichte ändert sich.

8.7.2 Der Poyntingsche Satz in dispersiven und absorptiven Medien

Der Poyntingsche Satz in dispersiven Medien ist für den Allgemeinfall kompliziert zu formulieren, da wir $\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ nicht einfach als Ableitung schreiben können. Der funktionelle Zusammenhang zwischen \mathbf{D} und \mathbf{E} ist zu kompliziert. Zusätzlich gilt auch immer noch die Kramers-Kronig Beziehung, die besagt, dass Dispersion auch immer mit Absorption verbunden ist. Dies muss entsprechend berücksichtigt werden. Wir wollen uns das Leben vereinfachen und zunächst einmal nur die Absorption monochromatischer Felder betrachten. Weiterhin sind wir nicht an dem instantanen Verhalten interessiert, sondern schauen uns nur das zeitliche Mittel an.

Absorption monochromatischer Felder

Wir betrachten hier zunächst zeitharmonische Felder, welche nur exakt eine Fourierkomponente besitzen. Es wird später deutlich, dass diese Betrachtung der Monochromasie völlig ausreicht, um allgemein gültige Aussagen zu treffen. Wir beschreiben das elektrische und magnetische Feld als

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega_0) e^{-i\omega_0 t} + c.c. \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega_0) e^{-i\omega_0 t} + c.c.$$

Wir erzeugen uns zunächst Hilfsausdrücke, die wir später noch häufig verwenden werden. Wir berechnen daher als erstes das zeitlich gemittelte Quadrat der Felder

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) \rangle &= \frac{1}{4} \langle [\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega_0) e^{-i\omega_0 t} + \bar{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, \omega_0) e^{i\omega_0 t}] [\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega_0) e^{-i\omega_0 t} + \bar{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, \omega_0) e^{i\omega_0 t}] \rangle \\ &= \frac{1}{4} 2 \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega_0) \cdot \bar{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, \omega_0) \\ &= \frac{1}{2} |\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega_0)|^2 \end{aligned}$$

Analog gilt

$$\langle \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} |\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega_0)|^2$$

Für das \mathbf{D} und das \mathbf{B} Feld gilt der entsprechend gleiche monochromatische Ansatz.

Was wir im Folgenden berechnen möchten, sind die zeitlichen Ableitungen von \mathbf{D} und \mathbf{B} , da diese Ausdrücke benötigt werden für den Term $\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.

$$\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} i\omega_0 [\epsilon_0 \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega_0) + \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega_0)] e^{-i\omega_0 t} + c.c.$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} i \omega_0 [\mu_0 \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega_0) + \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, \omega_0)] e^{-i \omega_0 t} + c.c.$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{4} [\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega_0) e^{-i \omega_0 t} + c.c.] \left\{ -i \omega_0 [\epsilon_0 \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega_0) + \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega_0)] e^{-i \omega_0 t} + c.c. \right\} \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} i \omega_0 (\bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{P}}^* - \bar{\mathbf{E}}^* \bar{\mathbf{P}}) \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich so

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right\rangle &= \frac{1}{4} i \omega_0 [(\bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{P}}^* - \bar{\mathbf{E}}^* \bar{\mathbf{P}}) + (\bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{M}}^* - \bar{\mathbf{H}}^* \bar{\mathbf{M}})] \\ &= \frac{1}{2} \omega_0 [\Im (\bar{\mathbf{E}}^* \cdot \bar{\mathbf{P}}) + \Im (\bar{\mathbf{H}}^* \cdot \bar{\mathbf{M}})] \end{aligned}$$

Diese beiden Terme eingesetzt in den früher betrachteten allgemeinen Ausdruck

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

ergibt

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{S} \rangle = -\frac{1}{2} \omega_0 [\Im (\bar{\mathbf{E}}^* \cdot \bar{\mathbf{P}}) + \Im (\bar{\mathbf{H}}^* \cdot \bar{\mathbf{M}})] - \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle$$

Die Quellen/Senken des zeitlich gemittelten Energieflusses sind somit die Quellen/Senken des elektromagnetischen Energiestromes und die mechanische Arbeit.

Diese Gleichung kann noch spezifiziert werden für ausgewählte Spezialfälle:

- $\mathbf{j} = 0 \rightarrow \operatorname{div} \langle \mathbf{S} \rangle = -\frac{1}{2} \omega_0 [\Im (\bar{\mathbf{E}}^* \cdot \bar{\mathbf{P}}) + \Im (\bar{\mathbf{H}}^* \cdot \bar{\mathbf{M}})]$
- Im Vakuum ist $\operatorname{div} \langle \mathbf{S} \rangle = 0$. Für monochromatische Felder ist die mittlere Energiestromdichte im Vakuum konstant. Sie kann sich nicht ändern.
- In linearen Medien ist der Zusammenhang zwischen der Polarisation/Magnetisierung gegeben als

$$\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \chi_e(\mathbf{r}, \omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \quad \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \chi_m(\mathbf{r}, \omega) \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega)$$

Da

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{r}, \omega) = 1 + \chi_e(\mathbf{r}, \omega) &\rightarrow \Im \epsilon(\mathbf{r}, \omega) = \Im \chi_e(\mathbf{r}, \omega) \\ \mu(\mathbf{r}, \omega) = 1 + \chi_m(\mathbf{r}, \omega) &\rightarrow \Im \mu(\mathbf{r}, \omega) = \Im \chi_m(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned}$$

Damit gilt in stromfreien Medien ($\mathbf{j} = 0$) und für die Frequenz ω_0

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{S} \rangle = -\frac{1}{2} \omega_0 [\Im (\bar{\mathbf{E}}^* \cdot \bar{\mathbf{P}}) + \Im (\bar{\mathbf{H}}^* \cdot \bar{\mathbf{M}})]$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\omega_0 \left[\epsilon_0 \Im[\epsilon(\mathbf{r}, \omega_0)] |\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega_0)|^2 + \mu_0 \Im[\mu(\mathbf{r}, \omega_0)] |\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega_0)|^2 \right] \\
&= -\omega_0 \left[\epsilon_0 \Im[\epsilon(\mathbf{r}, \omega_0)] \langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) \rangle + \mu_0 \Im[\mu(\mathbf{r}, \omega_0)] \langle \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) \rangle \right]
\end{aligned}$$

Dies ist ein wichtiges Ergebnis. Der lokale Energieverlust bzw. der Energiegewinn (Senken oder Quellen von $\langle \mathbf{S} \rangle$) hängen mit dem Imaginärteil der Permittivität bzw. der Permeabilität zusammen. Daher wird dieser Imaginärteil der Materialparameter auch als Absorption bezeichnet. Es sei abschließend angemerkt, dass, auch wenn alle Medien dispersiv sind und somit auch dissipativ, so ist der Imaginärteil der Materialparameter in einigen Frequenzbereichen doch sehr klein bzw. nahe null. Diese Spektralbereiche werden als Transparenzgebiete bezeichnet. Angeregte bzw. gepumpte Medien können elektromagnetische Felder verstärken. Hier muss der Imaginärteil der Materialparameter entsprechend kleiner als null sein. Dann ist die Divergenz des zeitgemittelten Poyntingvektors größer als null. Mithin entsteht also Energie.

Dispersive Medien

Im Folgenden wollen wir vollständig dispersive Medien betrachten. Dispersion (oder genauer gesagt die Materialdispersion) suggeriert, dass die Materialeigenschaften von der Frequenz abhängen. Für elektromagnetische Felder mit einem endlichen Spektrum ($\Delta\omega$) muss diese Materialdispersion korrekt berücksichtigt werden. Beachten Sie bitte, das Konzept eines monochromatischen Feldes ist ein hilfreiches mathematisches Konzept, aber es vermag nicht die Realität zu beschreiben. Sie müssen z.B. einmal eine Quelle eingeschalten haben und dieser Einschaltvorgang alleine führt bereits zu einem endlich breitem Frequenzspektrum. Weiterhin gilt eine Art Unschärferelation zwischen Energie (Frequenz) und Zeit. Diese besagt, dass für zeitabhängige Felder das Produkt aus $\Delta\omega$ und betrachteter Zeit Δt eine Konstante ist. Lediglich das Feld einer Quelle, welche für unendliche Zeit monochromatisches Licht emittiert, hat eine verschwindende spektrale Breite. Für alle anderen Quellen ist diese spektrale Breite endlich.

Wir können uns dieser monochromatischen Quelle aber gut annähern und betrachten eine Quelle mit einer endlichen spektralen Breite, welche sehr klein sein soll im Vergleich zu einer Mittenfrequenz (oder auch Trägerfrequenz genannt), $\omega_0 \gg \Delta\omega$.

Zur Beschreibung solcher Felder führen wir ein wichtiges Konzept ein. Das besagt, dass das elektrische Feld beschrieben werden kann als das Produkt einer langsam veränderlichen Amplitude und einer zeitharmonischen Oszillation bei der Trägerfrequenz

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_0 t} + c.c.$$

Die Fouriertransformierte der langsam veränderlichen Amplitude beschreibt das Spektrum

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Delta\omega} d\omega \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}$$

Wir betrachten hier nur das Interval, in dem das Spektrum nicht verschwindend ist. Das Spektrum des gesamten Feldes lässt sich dann berechnen als

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int dt \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega t} = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0)$$

Vergleichbare Definitionen existieren ebenfalls für alle anderen Felder. Damit wird

$$\left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{4} \left\{ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_0 t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{\mathbf{D}}^*(\mathbf{r}, t) e^{i\omega_0 t}] + \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_0 t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{\mathbf{B}}^*(\mathbf{r}, t) e^{i\omega_0 t}] + c.c. \right\}$$

Beachten Sie bitte, die zeitliche Mittelung wird hier über eine Zeitspanne durchgeführt, welche groß sein soll gegenüber der schnell oszillierenden Trägerfrequenz aber immer noch klein gegenüber einer zeitlichen Änderung der langsam veränderlichen Amplitude. Wir werden uns diesem Term im Folgenden mit einigen Nebenrechnungen nähern.

Es gilt zunächst

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \int d\omega \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} = \epsilon_0 \int d\omega \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \\ &= \epsilon_0 \int d\omega \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) e^{-i\omega t} = \epsilon_0 \int d\omega' \epsilon(\mathbf{r}, \omega' + \omega_0) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega') e^{-i(\omega' + \omega_0)t} \\ &= \epsilon_0 \int_{\Delta\omega} d\omega \epsilon(\mathbf{r}, \omega + \omega_0) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i(\omega + \omega_0)t} \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck können wir differenzieren und in eine Taylorreihe um $\omega = 0$ entwickeln, in welcher wir die beiden niedrigsten Terme behalten.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_0 t}] = -i\epsilon_0 \int_{\Delta\omega} d\omega (\omega + \omega_0) \epsilon(\mathbf{r}, \omega + \omega_0) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i(\omega + \omega_0)t} \\ &\approx -i\epsilon_0 \int_{\Delta\omega} d\omega \left\{ [\omega_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega_0) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)] + \left[\frac{\partial}{\partial \omega_0} (\omega_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega_0)) \right] \omega \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \dots \right\} e^{-i(\omega + \omega_0)t} \\ &= -i\epsilon_0 \int_{\Delta\omega} d\omega \left\{ [\omega_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega_0) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)] - i(i\omega) \left[\frac{\partial}{\partial \omega_0} (\omega_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega_0)) \right] \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \dots \right\} e^{-i(\omega + \omega_0)t} \\ &= -i\epsilon_0 e^{-i\omega_0 t} \left\{ \omega_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega_0) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) + i \frac{\partial [\omega_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega_0)]}{\partial \omega_0} \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \dots \right\} \end{aligned}$$

Bei Beschränkung auf die erste Ordnung erhalten wir so für

$$\tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, t) e^{i\omega_0 t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_0 t}] = -i\epsilon_0 \omega_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega_0) |\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)|^2 + \epsilon_0 \frac{\partial [\omega_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega_0)]}{\partial \omega_0} \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Daraus folgt für unseren finalen Term

$$\left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{4} \left[-i\epsilon_0 \omega_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega_0) |\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)|^2 + i\epsilon_0 \omega_0 \epsilon^*(\mathbf{r}, \omega_0) |\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)|^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \epsilon_0 \frac{\partial [\omega_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega_0)]}{\partial \omega_0} \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial [\omega_0 \epsilon^*(\mathbf{r}, \omega_0)]}{\partial \omega_0} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \dots \\
& = \frac{1}{2} \epsilon_0 \omega_0 \Im \epsilon(\mathbf{r}, \omega_0) |\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)|^2 + \frac{1}{4} \epsilon_0 \frac{\partial [\omega_0 \Re \epsilon(\mathbf{r}, \omega_0)]}{\partial \omega_0} \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)|^2 + \dots
\end{aligned}$$

Eine komplett analoge Rechnung kann für den Term $\langle \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rangle$ durchgeführt werden. Durch Kombination beider Ausdrücke erhalten wir insgesamt

$$\left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right\rangle = \epsilon_0 \omega_0 \Im \epsilon(\mathbf{r}, \omega_0) \langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) \rangle + \mu_0 \omega_0 \Im \mu(\mathbf{r}, \omega_0) \langle \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) \rangle + \frac{\partial}{\partial t} \langle w(\mathbf{r}, t) \rangle$$

Hier wurde in dem letzten Term die zeitlich gemittelte Energiedichte im Medium zusammengefasst. Diese definiert sich aus

$$\langle w(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial [\omega_0 \Re \epsilon(\mathbf{r}, \omega_0)]}{\partial \omega_0} \langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) \rangle + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial [\omega_0 \Re \mu(\mathbf{r}, \omega_0)]}{\partial \omega_0} \langle \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$$

Für den Fall, dass die Stromdichte verschwindet ($\mathbf{j} = 0$), folgt insgesamt für den Poyntingschen Satz

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle w(\mathbf{r}, t) \rangle + \operatorname{div} \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = -\epsilon_0 \omega_0 \Im \epsilon(\mathbf{r}, \omega_0) \langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) \rangle - \mu_0 \omega_0 \Im \mu(\mathbf{r}, \omega_0) \langle \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$$

Abschließend sei zu dieser Formel gesagt, dass die Absorption / die Verstärkung nur bei der Mittenfrequenz evaluiert wird. Für schwach dispersive Medien bzw. für spektral schmalbandige Felder ist dies völlig ausreichend. Im Transparenzgebiet (mit verschwindendem Imaginärteil in den Materialparametern) gilt des weiteren

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle w(\mathbf{r}, t) \rangle + \operatorname{div} \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$$

Bei zu vernachlässigender Dispersion, was in bestimmten Spektralbereichen, in der Regel in kleinen Frequenzbereichen, im Transparenzgebiet gilt, kann die zeitgemittelte Energiedichte im Feld angegeben werden als

$$\langle w(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega_0) \langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) \rangle + \frac{1}{2} \mu_0 \mu(\mathbf{r}, \omega_0) \langle \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$$

8.8 Der Impulssatz der Elektrodynamik

Nach dem Energiesatz soll nun noch abschließend der Impulssatz der Elektrodynamik diskutiert werden. Dieser wird berechnet unter der Annahme, dass wir Felder haben und frei bewegliche Ladungen.

Die Kraftdichte selbst berechnet sich aus

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

Zur Vereinfachung würden wir auch hier wieder die Subskripts und die Orts- und Zeitabhängigkeit weglassen. Es wird implizit vorausgesetzt, dass alle Größen abhängig sind von \mathbf{r} und t .

Unser Ziel ist es nun wieder, die Kraftdichte wie früher auf der Basis des Maxwell'schen Spannungstensor auszudrücken, in welchem wieder nur Feldgrößen auftauchen. Wir benutzen dazu

$$\begin{aligned}\rho\mathbf{E} &= \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{B} &= -\mathbf{B} \times \left(\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = -\mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \times \mathbf{D} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}\end{aligned}$$

Durch zusätzliches Symmetrisieren der Gleichung durch die Addition von $0 = \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + \left[-\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} \right] + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - [\mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B}]\end{aligned}$$

Zur weiteren Diskussion betrachten wir wieder den Fall des Vakuums. Alles andere würde zu kompliziert werden in der Betrachtung für den Moment. Es gilt daher

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

Betrachten wir zuerst den elektrischen Anteil in dem obigen Ausdruck in der eckigen Klammer

$$\mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} = \epsilon_0 [\mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E}]$$

Wir diskutieren die beiden Terme separat.

1.

$$\begin{aligned}(\mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E})_i &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} E_j E_{m,l} = -\epsilon_{kji} \epsilon_{klm} E_j E_{m,l} = -[\delta_{jl} \delta_{im} - \delta_{jm} \delta_{il}] E_j E_{m,l} \\ &= -E_j E_{i,j} + E_j E_{j,i}\end{aligned}$$

2.

$$(-\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E})_i = -E_i E_{j,j}$$

Daraus ergibt sich

$$[\mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E}]_i = -E_j E_{i,j} + E_j E_{j,i} - E_i E_{j,j} = \frac{1}{2} (E_j E_j)_{,i} - (E_i E_j)_{,j}$$

In kompletter Analogie ergibt sich für den magnetischen Teil des Ausdrucks in der eckigen Klammer

$$[\mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{H}]_i = \frac{1}{2} (H_j H_j)_{,i} - (H_i H_j)_{,j}$$

Der erste Term der obigen Gleichung (im ursprünglichen Ausdruck für die Kraftdichte) kann ausgedrückt werden als

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \mu_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}$$

Wir erhalten damit als finalen Ausdruck für die Kraftdichte im Vakuum

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - [\mathbf{D} \times \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{D} + \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{ div } \mathbf{B}]$$

in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} -f_i &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial S_i}{\partial t} - \epsilon_0 \left[\frac{1}{2} (E_j E_j)_{,i} - (E_i E_j)_{,j} \right] - \mu_0 \left[\frac{1}{2} (H_j H_j)_{,i} - (H_i H_j)_{,j} \right] \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} S_i - T_{ij,j} \end{aligned}$$

mit dem Maxwell'schen Spannungstensor des elektromagnetischen Feldes im Vakuum

$$T_{ij}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 E_i E_j + \mu_0 H_i H_j - \delta_{ij} w(\mathbf{r}, t)$$

mit der Energiedichte des elektromagnetischen Feldes im Vakuum

$$w(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_j E_j + \frac{1}{2} \mu_0 H_j H_j$$

Der Maxwell'sche Spannungstensor kann auch beschrieben werden mit der Impulsstromdichte des elektromagnetischen Feldes.

Die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes ist gegeben als

$$p_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} S_i(\mathbf{r}, t)$$

Der Impuls des elektromagnetischen Feldes berechnet sich dann aus

$$\mathbf{P}(t) = \int_V dV \mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$$

Integrieren wir die Kraftdichte über das gesamte Volumen und setzen die entsprechenden Terme ein, erhalten wir

$$\frac{dP_i(t)}{dt} - \int_{(V)} T_{ij}(\mathbf{r}, t) df_j = - \int_V dV f_i(\mathbf{r}, t)$$

Der Term auf der rechten Seite der Gleichung kann als die zeitliche Änderung des Impulses geladener Teilchen im Vakuum verstanden werden

$$\frac{dP_{imech}}{dt} = \sum_{\alpha} f_i^{\alpha} = \int_V dV f_i$$

So kann die Gleichung umgeschrieben werden zu

$$\frac{d}{dt} [P_i(t) + P_{imech}(t)] = \int_{(V)} T_{ij}(\mathbf{r}, t) df_j$$

Dies ist der finale Impulssatz. Er besagt, dass die zeitliche Änderung der Summe von mechanischem und elektromagnetischem Impuls in einem Volumen gleich ist dem elektromagnetischen Impulsstrom aus dem Volumen heraus.

9 Elektromagnetische Wellen

In diesem abschließenden Kapitel der Elektrodynamik wollen wir Lösungen der Maxwellgleichungen außerhalb von Quellen finden. Die Frage ist, ob es selbstkonsistente und vor allem auch nichttriviale Lösungen der Maxwellgleichungen ohne diese Quellen gibt. Man würde dann von einem freien Feld sprechen. Dies ist eine lohnende Diskussion, da wir die Maxwelltheorie von den Fremdkörpern der Theorie entkoppeln würden können. Zum Beispiel in der Optik wird das später wichtig werden, wenn wir uns mit der Wechselwirkung elektromagnetischer Felder und dielektrischer oder metallischer Objekte beschäftigen möchten. Dann müssen wir nicht mehr die Quellen dieser elektromagnetischen Felder explizit betrachten, sondern können uns einfach das elektromagnetische Feld als Lösung der Maxwellgleichungen im Raum ohne die betrachteten Objekte vorgeben und dann weiter rechnen. Man spricht dann auch von einem reinen Maxwell-Feld oder auch ein ideales Photonengas.

9.1 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

Wir gehen also von jetzt an immer davon aus, dass $\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = 0$ ist und auch $\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) = 0$. Wir können dann verschiedene Ausgangspunkte wählen zur Lösung der Maxwellgleichungen

- **Potentiale und Lorenz-Eichung** Hier sind die entsprechenden Bestimmungsgleichungen die Wellengleichungen

$$\Delta\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

und die Potentiale müssen zusätzlich der Lorenzeichung genügen

$$\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$$

Sind die Potentiale bekannt, können leicht die elektrischen und magnetischen Felder ausgerechnet werden

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \text{grad } \phi(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

- **Potentiale und Coulomb-Eichung** Hier sind die entsprechenden Bestimmungsgleichungen die Poissongleichung und die Wellengleichung für das Vektorpotential

$$\Delta\phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

und das Vektorpotential muss zusätzlich der Coulombbeziehung genügen

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Sind die Potentiale bekannt, können wieder die elektrischen und magnetischen Felder ausgerechnet werden

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

Beachten Sie hier bitte, in Coulombbeziehung ohne externe Ladungen verschwindet das skalare Potential, $\phi(\mathbf{r}, t) = 0$. Dies ist die einzige Lösung, die in Übereinstimmung gebracht werden kann mit den natürlichen Randbedingungen.

- **Feldgleichungen** In Kombination der passenden Maxwellgleichungen können wir eine Feldgleichung für das elektrische oder magnetische Feld berechnen. Wenden wir die Rotation auf die Rotationsgleichung für das elektrische Feld an, wenden wir die Zeitableitung auf die Rotationsgleichung für die magnetische Induktion an und setzen beide Gleichungen ineinander ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Da die Divergenz des elektrischen Feldes im Vakuum verschwindet ($\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$), reduziert sich die Gleichung zu

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

In völliger Analogie kann man eine Wellengleichung für die magnetische Induktion finden.

$$\Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

Welche der beiden Gleichungen man verwendet, ist schlussendlich egal. Entweder das \mathbf{E} oder das \mathbf{B} Feld wird berechnet und anschließend wird mit Hilfe der Maxwellgleichungen das fehlende Feld berechnet.

Praktisch wird meistens die letzte Variante bevorzugt. Wir wollen hier trotzdem beispielhaft die einfachste Gleichung benutzen und betrachten die Gleichungen in Coulombbeziehung. Lösungen auf die Wellengleichung für das elektrische oder magnetische Feld sind einfach übertragbar.

Wir suchen also eine Lösung zu

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

mit der Nebenbedingung

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Wenn das Vektorpotential einmal berechnet wurde, kann das elektrische und das magnetische Feld leicht gefunden werden.

Wir suchen also die einfachsten Lösungen für diese Gleichung. Diese werden wir im Folgenden als die Normalmoden (des freien Raums) bezeichnen. Alle anderen Lösungen lassen sich aus diesen Normalmoden konstruieren. Dafür müssen einfach die Normalmoden mit einer passenden komplexen Amplitude superpositioniert werden.

Die Normalmoden des Vakuums sind ebene harmonische Wellen. Der dafür passende Ansatz lautet

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

Auch wenn wir dies in komplexer Notation aufgeschrieben haben, hat nur der Realteil dieser Lösung $\frac{1}{2} [\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}^*(\mathbf{r}, t)]$ eine physikalische Bedeutung. In dem speziellen Fall des Vektorpotential spielt das aber zunächst keine Rolle, da das Vektorpotential in jedem Falle ist nicht beobachtbar ist. Später wird nur der Realteil des elektrischen oder magnetischen Feldes eine beobachtbare Größe darstellen. Sie können mit einem Imaginärteil rechnen, aber beobachten können Sie diesen nicht. $\mathbf{a}(\mathbf{k}, \omega)$ ist hier die komplexe vektorielle Amplitude der ebenen Welle. Sie ist eine Funktion der Frequenz und des Wellenzahlvektors.

In dem Ansatz taucht der Wellenzahlvektor \mathbf{k} auf. Der ist zunächst noch nicht weiter bestimmt. ω ist eine vorgegebene Frequenz. Die Gleichung selbst beschreibt eine ebene Welle. Z.B. bei $t = \text{const.}$ bilden die Flächen, in denen $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const.}$ gilt, Flächen konstanter Phasen. Sie liegen in einer Ebene.

Wenn wir diesen Ansatz in die Nebenbedingung einsetzen, erhalten wir

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = 0 \rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \rightarrow \mathbf{k} \perp \mathbf{a}(\mathbf{k}, \omega)$$

Der Wellenzahlvektor steht also immer senkrecht auf dem Amplitudenvektor. Die Coulombgleichung wird daher auch transversale Eichung genannt. Jeder beliebige Vektor $\mathbf{a}(\mathbf{k}, \omega)$ kann immer in zwei linear unabhängige Vektoren zerlegt werden. Man spricht hier von der Polarisationsrichtung.

$$\mathbf{a}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{i=1}^2 a_i(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{e}_i(\mathbf{k})$$

Die Amplituden a_i können hier komplex sein. Der Polarisationszustand ist im Allgemeinen elliptisch. Dies werden wir in der Vorlesung noch genauer untersuchen.

Wenn wir den Ansatz in die Wellengleichung einsetzen, bekommen wir einen funktionellen Zusammenhang zwischen dem Wellenzahlvektor und der Frequenz. Dieser Wellenzahlvektor darf nicht frei gewählt werden. Er muss einen bestimmten funktionellen Zusammenhang erfüllen, damit das Feld eine Lösung der Maxwellgleichungen ist.

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= -\mathbf{k}^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -k^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\ &\rightarrow \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \mathbf{a}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\end{aligned}$$

Das ist die Dispersionsrelation ebener Wellen im Vakuum. Nur Wellen mit diesem Zusammenhang zwischen Frequenz und Wellenzahl genügen den Maxwellgleichungen. Wir sehen also, dass die Frequenz nicht unabhängig von dem Wellenzahlvektor gewählt werden kann, wie es der allgemein gültige Ansatz der ebenen Welle zunächst einmal suggerierte. Physikalisch sinnvolle Lösungen sind nur diese ebenen Wellen, deren Wellenzahlvektor und Frequenz die Dispersionsrelation erfüllen. Dies ist eine wichtige physikalische Erkenntnis. Daher hätten wir auch durchgängig schreiben können $\mathbf{a}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{a}(\mathbf{k})$, da die explizite Frequenzabhängigkeit hier redundant ist.

Da die Ausbreitungsrichtung beliebig gewählt werden kann, legen wir uns zur einfacheren folgenden Diskussion auf die z -Richtung als die prinzipielle Ausbreitungsrichtung fest, $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$. Die räumliche Periode (bei fester Zeit) der Oszillation entspricht gerade genau einer Wellenlänge.

$$k\lambda = 2\pi \rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Die zeitliche Periode (bei festem Ort) der Oszillation entspricht gerade genau einer Schwingungsdauer.

$$\omega T = 2\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Mit $\omega = 2\pi\nu$ folgt für die Schwingungsdauer $T = \frac{1}{\nu}$. Setzen wir beide Ergebnisse in die Dispersionsrelation ein, erhalten wir

$$k = \frac{\omega}{c} \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{Tc} \rightarrow T = \frac{\lambda}{c} \text{ oder } c = \lambda\nu$$

Dies sollten alle gängigen Versionen der Dispersionsrelation sein.

Die Phasengeschwindigkeit, die Geschwindigkeit, mit der sich Ebenen konstanter Phase ausbreiten, berechnet sich aus

$$kz - \omega t = k(z + \Delta z) - \omega(t + \Delta t) \rightarrow k\Delta z = \omega\Delta t \rightarrow \frac{\omega}{c}\Delta z = \omega\Delta t \rightarrow \Delta z = c\Delta t$$

Damit ist c die Phasengeschwindigkeit ebener Wellen im Vakuum.

Die elektrischen und magnetischen Felder können einfach aus den entsprechenden Gleichungen berechnet werden.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i\omega\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

Beide Felder sind damit ebenfalls ebene, monochromatische, elliptisch polarisierte ebene Wellen. Im Speziellen sind die Wellen transversal

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \times \frac{1}{\omega}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{k}}{kc} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

Die drei Vektoren \mathbf{k} , \mathbf{E} , und \mathbf{B} bilden ein rechtshändiges Dreibein.

9.2 Elektromagnetische Wellen im transparenten homogenen Medium

Im Folgenden betrachten wir die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem nichtmagnetischen ($\mu = 1$) und nichtabsorbierenden homogenen Medium ($\epsilon(\mathbf{r}, \omega) = \Re\epsilon(\omega) = \epsilon(\omega)$). Wir betrachten hier die Wellengleichung für die Felder, da die induzierte Polarisation explizit vom elektrisch Feld abhängt und so der Zusammenhang offensichtlicher wird.

Wir versuchen als erstes eine Wellengleichung für das elektrische Feld zu finden.

$$\text{rot rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \text{rot} \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$$

Diese Gleichung ist zwar vergleichbar zu der im Vakuum, aber doch schwierig zu lösen, da der Zusammenhang zwischen dielektrischer Verschiebung und elektrischem Feld eine Faltung ist

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_0^\infty dt' \tilde{R}(t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - t')$$

Wir lösen das Problem, in dem wir in den Fourierraum gehen. Dort ist die Materialgleichung wesentlich einfacher.

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$$

Die obige Wellengleichung können wir leicht in den Frequenzraum überführen.

$$\text{rot rot } \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = -\mu_0 \left(-\omega^2\right) \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$$

Aus der Nebenbedingung, dass die Divergenz der dielektrischen Verschiebung verschwinden soll, können wir schlussfolgern, dass auch die Divergenz des elektrischen Feldes im Fourierraum verschwindet.

$$\text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0 \rightarrow \text{div } \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \rightarrow \epsilon_0 \text{div} [\epsilon(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)] = 0$$

Wir betrachten Frequenzen im Transparenzgebiet und können ausschließen, dass die Permittivität null ist. Da die Permittivität nicht

vom Ort abhängt, können wir sie aus der Divergenz rausziehen und schlussfolgern,

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

In der obigen Gleichung schreiben wir die doppelte Rotation als

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) - \Delta \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = -\Delta \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$$

Damit kommen wir zur Wellengleichung im Frequenzraum

$$\Delta \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

Jede einzelne Fourierkomponente, aus denen unser zeitlich sich veränderliches Feld sich zusammensetzt, muss dieser Gleichung genügen. Alternativ kann man sie auch als Wellengleichung für ein monochromatisches Feld verstehen. Diese Gleichung wird Helmholtzgleichung genannt.

Lösungen dieser Gleichung sind wieder ebene Wellen

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{e}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

Aus der Divergenzfreiheit ergibt sich wieder die Forderung nach Transversalität des Polarisationssektors relativ zur Ausbreitungsrichtung.

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 0 \rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{k}, \omega) = 0$$

Den Ansatz der ebenen Welle eingesetzt in die Helmholtzgleichung gibt wieder

$$\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right] \mathbf{e}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 0 \rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)$$

Dies ist die Dispersionsrelation einer ebenen Welle im homogenen aber dispersiven Medium. Die Dispersionsrelation hat eine nichttriviale Struktur, da die Materialdispersion explizit berücksichtigt werden muss. Beachten Sie bitte, da $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\omega)$, wurde im Argument des Amplitudenvektors die Abhängigkeit des Wellenzahlvektors nicht mehr explizit erwähnt.

Das elektrische Feld hat damit als Lösung (unter der Annahme, dass sich alle ebenen Wellen aus den sich das Feld zusammensetzt in eine Richtung ausbreiten)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{e}(\omega) e^{i(\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + c.c.$$

Dieses Integral ist nicht weiter zu lösen, ohne genaue Kenntnisse der dispersiven Materialeigenschaften. Beachten Sie hier bitte, die explizite Abhängigkeit der Fourieramplitude als Funktion des Wellenzahlvektors wurde hier weggelassen, da der funktionelle Zusammenhang der Wellenzahl und der Frequenz fixiert ist.

Wir können uns aber im Folgenden den Spezialfall zeitlich sehr langer Pulse ansehen. Das Spektrum wird dann spektral sehr eng sein; also von null verschwindende Werte werden nur in einem kleinen Frequenzintervall auftreten. Wenn in diesem sich die Dispersionsrelation nicht zu stark ändert, kann diese in näherer Umgebung der Trägerfrequenz des Pulses in eine Taylorreihe entwickelt werden.

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots$$

Häufig reicht es aus genau diese ersten drei Terme zu berücksichtigen. Jeder dieser Terme hat eine bestimmte physikalische Bedeutung in der Pulsausbreitung.

- $\frac{k(\omega_0)}{\omega_0} = \frac{1}{v_{\text{ph}}(\omega_0)}$ beschreibt die Phasenlage des sich ausbreitenden Pulses. $v_{\text{ph}}(\omega_0)$ ist die Phasengeschwindigkeit.
- $\left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} = \frac{1}{v_{\text{g}}(\omega_0)}$ ist die Gruppengeschwindigkeit des Pulses. Er beschreibt, wie schnell sich der Puls als Ganzes ausbreitet. In einem absorptionsfreien Medium ist dies das Maximum des Pulses.
- $\left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} = D(\omega_0)$ ist die Gruppengeschwindigkeitsdispersion. Dieser Term beschreibt die Änderung der zeitlichen Ausdehnung des Pulses bei Ausbreitung durch das homogene dispersive Medium.

9.3 Wellenerzeugung im Vakuum

Die Frage, die wir im Folgenden klären wollen, ist die der Erzeugung der Wellen, welche wir gerade als Lösung der Maxwellgleichungen diskutiert haben. Felder werden abgestrahlt durch ein System bewegter Ladungen und Ströme. Würden diese sich zeitlich nicht ändern, wären wir wieder in der Statik, in der wir keine Wellen als Lösungen der entsprechenden Gleichungen erhalten würden. Wir betrachten also zur Erzeugung

$$\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \neq 0, \quad \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \neq 0$$

Wie wollen hier zur Berechnung der Felder Lösungen suchen mit Hilfe der retardierten Potentiale in Lorenzgleichung.

$$\begin{aligned} \phi_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\ \mathbf{A}_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \end{aligned}$$

Allgemeine zeitlich sich veränderliche Quellen können immer mittels einer Fourierzerlegung beschrieben werden

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}', t') = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}', \omega) e^{-i\omega t'} \quad \rho(\mathbf{r}', t') = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \bar{\rho}(\mathbf{r}', \omega) e^{-i\omega t'}$$

und jede einzelne dieser Fourierkomponenten kann individuell untersucht werden. Daher ist es völlig ausreichend, sich zunächst auf eine monochromatische zeitharmonische Quelle zu beschränken und deren Potentiale auszurechnen. Beliebige zeitlich sich veränderliche Felde können später geschrieben werden als Superposition der berechneten Felder von Quellen mit einer harmonischen zeitlichen Abhängigkeit. Die Quellen werden also geschrieben als

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{j}(\mathbf{r}')e^{-i\omega t'} \quad \rho(\mathbf{r}', t') = \rho(\mathbf{r}')e^{-i\omega t'}$$

Hier bezeichnet t' die retardierte Zeit. Sie ist definiert als $t' = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$. Da wir alles bei einer festen Frequenz anschauen, können wir Differentialgleichungen zur raumzeitlichen Beschreibung der Ausbreitung aus dem Zeitbereich leicht in den Fourierraum mit der Ersetzung $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega$ transformieren. Damit ergibt sich als Lösung für das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{-i\omega t} = \mathbf{A}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$$

Das Vektorpotential mit einer allgemeinen Zeitabhängigkeit in der Quelle wird entsprechend gegeben durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\omega \int dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', \omega)e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{-i\omega t}$$

Mit der Dispersionsrelation im Vakuum $k = \frac{\omega}{c}$ gilt dann für den räumlich abhängigen Teil des Vektorpotentials

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Dies ist eine vektorielle Kugelwelle.

In völliger Analogie wählt man für das skalare Potential einen Produktansatz mit einer räumlich abhängigen Funktion und einer zeitharmonischen Oszillation

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$$

Als Lösung für den räumlich abhängigen Teil erhält man dann eine skalare Kugelwelle

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Wir wollen jetzt noch diese Gleichungen dahingehend vereinfachen, als dass wir alles mit dem Vektorpotential \mathbf{A} ausdrücken wollen und das skalare Potential eliminieren. Das ist möglich im Rahmen der Lorenzgleichung. Dort gilt

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) - i\frac{\omega}{c^2}\phi(\mathbf{r}) = 0$$

Mit diesem Ausdruck können wir in allen Gleichungen das skalare Potential ersetzen. Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung können wir auch die Ladungsdichte in den entsprechenden Gleichungen ersetzen

$$\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) - i\omega \rho(\mathbf{r}) = 0$$

Betrachten wir abschließend die Felder und verwenden diese Ausdrücke, so lassen sich diese berechnen mittels

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \phi(\mathbf{r}) + i\omega \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

Mit Hilfe der Bestimmungsgleichung der Lorenzgleichung können wir das Potential eliminieren $\phi(\mathbf{r}) = -i\frac{c^2}{\omega} \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r})$ und wir erhalten für das elektrische Feld

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\operatorname{grad} \left[-i\frac{c^2}{\omega} \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right] + i\omega \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ &= i\omega \left[\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \frac{c^2}{\omega^2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right] \end{aligned}$$

Dies ist ein wichtiges Ergebnis. Es sagt uns, dass es völlig ausreicht, das Vektorpotential zu bestimmen. Alle anderen relevanten Feldgrößen können dann aus diesem Vektorpotential bestimmt werden. Beachten Sie bitte, die Größen die hier berechnet wurden, beschreiben nur deren räumliche Abhängigkeit. Die Felde und das skalare Potential oszilliert entsprechend noch zeitlich harmonisch.

Weiterhin gilt außerhalb der Quellen $\rho(\mathbf{r}')$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -i\frac{\omega}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

An sich ist damit alles berechenbar, auch wenn die Ausdrücke nur implizit in Form einer Integralgleichung vorliegen. Um explizite Ausdrücke für die elektro-magnetischen Felder bzw. der Potentiale als Funktion der Eigenschaften der Quellen zu erhalten, würden wir im Folgenden wieder eine Multipolentwicklung durchführen. Diese ist vergleichbar in ihrer Intention zur Multipolentwicklung in der Elektro- bzw. Magnetostatik. Die räumlich lokalisierten Quellen sollen wieder nur durch Multipolmomente der Stromverteilung beschrieben werden. Für jeden einzelnen dieser Multipolterme wird es dann wieder explizite Ausdrücke für das elektrische bzw. magnetische Feld geben. Diese Ausdrücke vereinfachen sich sogar noch, wenn man das Feld in unterschiedlicher Entfernung relative zur Quelle berechnen möchte. Man unterscheidet dann das Nah- bzw. das Fernfeld.

Wir fangen also an und betrachten eine räumliche lokalisierte Quelle, deren Schwerpunkt bei \mathbf{r}_S liegen soll. Daher müssen wir alle Koordinaten auf diese Schwerpunktskoordinate beziehen

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{r}_S \quad \text{und} \quad \mathbf{r}' = \bar{\mathbf{r}}' + \mathbf{r}_S$$

Das Vektorpotential ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\bar{\mathbf{r}} + \mathbf{r}_S) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \mathbf{j}(\bar{\mathbf{r}}' + \mathbf{r}_S) \frac{e^{ik|\bar{\mathbf{r}} + \mathbf{r}_S - \bar{\mathbf{r}}' - \mathbf{r}_S|}}{|\bar{\mathbf{r}} + \mathbf{r}_S - \bar{\mathbf{r}}' - \mathbf{r}_S|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \mathbf{j}(\bar{\mathbf{r}}' + \mathbf{r}_S) \frac{e^{ik|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|}}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|}\end{aligned}$$

Um die Notation nicht zu kompliziert werden zu lassen, lassen wir die Quertriche über den Buchstaben weg. Beachten Sie aber bitte, der gestrichene Ortsvektor soll aber in jedem Falle sehr klein sein, da das Volumen über das integriert werden soll, räumlich stark lokalisiert sein soll. Die ungestrichene Ortskoordinate, welche die Entfernung des Aufpunktes zum Schwerpunkt der Quelle beschreibt, soll hingegen groß sein. Das Vektorpotential berechnet sich dann zu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_S) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_S) \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Damit die Multipolentwicklung angewandt werden kann, müssen wir eine räumlich eng begrenzte Ladungsverteilung fordern. Um spätere Lösungen zu diskutieren, führen wir eine charakteristische Länge d ein. Wir fordern in jedem Falle, dass $r' \ll d \ll r$ ist. In diesem Falle können wir den Term $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ in eine Taylorreihe entwickeln und nur die beiden Terme niedrigster Ordnung berücksichtigen

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}$$

Damit approximiert sich das Vektorpotential zu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_S) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_S) \frac{e^{ik\left(r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}\right)}}{r \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}\right)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_S) \frac{e^{-i\frac{k}{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}}{\left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}\right)}$$

Dies ist eine räumlich modulierte, vektorielle Kugelwelle. Die Modulation erfolgt durch die Endlichkeit der Quelle. Im Falle einer unendlich kleinen Quelle (die Stromdichte wäre eine δ -Distribution), in der Taylorreihe der niedrigste Term ausreichen würde, würden wir eine exakte vektorielle Kugelwelle erhalten.

Zur weiteren Diskussion wollen wir im Folgenden drei charakteristische Längen unterscheiden. Beachten Sie bitte, im Gegensatz zur Statik reicht eine einfache Unterscheidung in $r \gg r'$ nicht mehr aus. Wir müssen die Entwicklung in der Dynamik immer noch in Relation zur Wellenlänge setzen. Wir unterscheiden

1. Nahzone: $r' \ll r \ll \lambda \rightarrow kr \ll 1$
2. Mittlere Zone: $r' \ll r \approx \lambda \rightarrow kr \approx 1$
3. Fernzone: $r' \ll \lambda \ll r \rightarrow kr \gg 1$

Es soll also immer noch gelten $r' \ll r, \lambda$. Dies ist die Grundvoraussetzung zur Anwendung der oben diskutierten Taylorentwicklung.

Wir schreiben eine Taylorentwicklung für den räumlich abhängigen Teil des Integralkerns und entwickeln diesen in Potenzen von $\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}$.

$$\frac{e^{-i\frac{k}{r}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}}{\left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}\right)} \approx \left[1 - ik \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}\right) + \dots\right] \left[1 + \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}\right) + \dots\right] \approx 1 + \left(\frac{1}{r} - ik\right) \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}\right)$$

Beachten Sie hier bitte, der erste Term in eckigen Klammern ist die Konsequenz der Entwicklung der Exponentialfunktion, der zweite Term in eckigen Klammern ist die Konsequenz der Entwicklung des Nenners in eine Taylorreihe. In der letzten Näherung haben nur Terme niedrigster Ordnung berücksichtigt (die wenigstens einmal mit 1 multipliziert wurden).

Jeder dieser Terme kann physikalisch individuell diskutiert werden. Der erste Term führt zu einer elektrischen Dipolstrahlung. Der zweite Term zu einer magnetischen Dipolstrahlung und einer elektrischen Quadrupolstrahlung. Diese Terme werden wir im Folgenden diskutieren.

9.3.1 Elektrische Dipolstrahlung

Hier wird der Integralkern in niedrigster Ordnung approximiert mit

$$\frac{e^{-i\frac{k}{r}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}}{\left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}\right)} \approx 1$$

Das Vektorpotential in Dipolnäherung wird so

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r} + \mathbf{r}_S) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_S)$$

Dieser Ausdruck soll im Folgenden vereinfacht werden. Wir führen dies folgendermaßen durch

$$\begin{aligned} [x'_i j_j(\mathbf{r}')]_{,j} &= x'_i j_{j,j} + j_j x'_{i,j} = x'_i j_{j,j} + j_i \\ \rightarrow \int_V dV' j_i(\mathbf{r}') &= \int_V dV' [x'_i j_j(\mathbf{r}')]_{,j} - \int_V dV' x'_i j_{j,j} = - \int_V dV' x'_i j_{j,j} \end{aligned}$$

Der zweite Term hat hier wieder nach Anwendung des Gaußschen Satzes und der Berücksichtigung, dass die Quelle räumlich lokalisiert ist, keinen Beitrag. Daraus wird vektoriell

$$\int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = - \int_V dV' \mathbf{r}' \operatorname{div}_{\mathbf{r}'} \mathbf{j}(\mathbf{r}')$$

Das Dipolpotential wird dann damit

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r} + \mathbf{r}_S) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_V dV' \mathbf{r}' \operatorname{div}_{\mathbf{r}'} \mathbf{j}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_S)$$

Mit der Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) - i\omega\rho(\mathbf{r}) = 0$ wird diese Gleichung zu

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_D(\mathbf{r} + \mathbf{r}_S) &= (-i\omega) \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_V dV' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_S) = (-i\omega) \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{p}_{r_S} \\ \mathbf{A}_D(\mathbf{r} + \mathbf{r}_S, t) &= (-i\omega) \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{p}_{r_S} e^{-i\omega t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{p}_{r_S} e^{-i\omega t} \right)\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis gilt für eine harmonisch schwingende Ladungsverteilung die durch ihr Dipolmoment ausreichend exakt charakterisiert ist. Eine Verallgemeinerung für beliebig zeitabhängige Ladungsverteilungen ist möglich, da das Vakuum dispersionsfrei ist. Mit $k = \frac{\omega}{c}$ gilt

$$\bar{\mathbf{A}}_D(\mathbf{r} + \mathbf{r}_S, \omega) = (-i\omega) \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}r}}{r} \bar{\mathbf{p}}_{r_S}(\omega)$$

wobei das dispersive Dipolmoment definiert ist als

$$\bar{\mathbf{p}}_{r_S}(\omega) = \int_V dV' \mathbf{r}' \bar{\rho}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_S, \omega)$$

ergibt sich das zeitabhängige Vektorpotential dann aus der Integration der einzelnen spektralen Anteile

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_D(\mathbf{r} + \mathbf{r}_S, t) &= \int d\omega \bar{\mathbf{A}}_D(\mathbf{r} + \mathbf{r}_S, \omega) e^{-i\omega t} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d\omega (-i\omega) \bar{\mathbf{p}}_{r_S}(\omega) e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \int d\omega \bar{\mathbf{p}}_{r_S}(\omega) e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{p}}_{r_S} \left(t - \frac{r}{c} \right)\end{aligned}\tag{9.1}$$

Das ist das Potential eines beliebig zeitlich sich veränderlichen Dipols oder einer Ladungsverteilung in Dipolnäherung. Man beachte hier das explizite Auftauchen der Retardierung.

Wir wollen im Folgenden das magnetische und elektrische Feld dieses Potentials ausrechnen. Zur Vereinfachung gehen wir davon aus, dass der Schwerpunkt der Ladungsverteilung im Koordinatenursprung liegt, $\mathbf{r}_S = 0$.

Das Magnetfeld

Zur Vereinfachung betrachten wir wieder nur eine monochromatische Quelle. Das Vektorpotential in Dipolnäherung ist dann

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = (-i\omega) \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{p}$$

Das Magnetfeld rechnet sich aus mittels

$$\mathbf{B}_D(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = (-i\omega) \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{grad} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \times \mathbf{p}$$

$$\mathbf{B}_D(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} k\omega \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{p} \right) \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

Das ist das Magnetfeld der Dipolstrahlung. Der erste Term in der zweiten Klammer (die 1) wird als das Fern- oder Strahlungsfeld bezeichnet. Es dominiert entsprechend im Fernfeld. Der zweite Term, der proportional ist zu $1/r$, dominiert das Nahfeld.

Das elektrische Feld

Das Nahfeld kann ausgerechnet werden mittels¹

$$\mathbf{E}_D(\mathbf{r}) = i \frac{c^2}{\omega} \text{rot } \mathbf{B}_D(\mathbf{r}) = i \frac{c}{k} \text{rot } \mathbf{B}_D(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{E}_D(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ k^2 \left[\left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{p} \right) \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right] + \left[3 \frac{\mathbf{r}}{r} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{p} \right) - \mathbf{p} \right] \left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) \right\} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

Der erste Term, der Proportional ist zu dem k^2 , beschreibt das Fernfeld. Hier ist die Amplitude des elektrischen Feldes indirekt proportional zum Abstand. Der zweite Term beschreibt das Nahfeld wobei wir sehen, dass es Terme gibt die indirekt proportional zur zweiten bzw. auch zur dritten Potenz des Abstandes sind. Je näher wir uns relativ zur Quelle befinden, desto dominanter wird natürlich der Term werden, der die höchste Potenz im Nenner hat.

Das elektrische Feld hat sowohl eine transversale (senkrecht zu \mathbf{r}) als auch eine longitudinale Komponente (parallel zu \mathbf{r}). Dies steht im Gegensatz zu freien Feldern. Im Folgenden diskutieren wir das Nah- und das Fernfeld separat.

Das Nahfeld ($kr \ll 1$)

Das Nahfeld berücksichtigt nur die Komponenten, welche bei kleine, r dominieren. Im Zweifel also die Terme mit höheren Potenzen im Nenner. In Übereinstimmung mit der bereits durchgeführten Zuordnung der Terme berechnet sich das Nahfeld zu

$$\mathbf{B}_D(\mathbf{r}, t) \approx i \frac{\omega}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{p} \right) \frac{1}{r^2} e^{-i\omega t}$$

$$\mathbf{E}_D(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[3 \frac{\mathbf{r}}{r} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{p} \right) - \mathbf{p} \right] \frac{1}{r^3} e^{-i\omega t}$$

Dies ist ein 'statisches' Dipolfeld, welches mit der Ladung mitschwingt. Das Feld hängt somit an den Quellen und strahlt nicht ab. Dieses Verhalten ist vergleichbar zum Verhalten bei langsam veränderlichen Feldern.

Zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Feld gibt es eine Phasenverschiebung von $\pi/2$, was man an der imaginären Einheit erkennen kann. Ein Vergleich der Amplituden zeigt, dass $\left| \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{E}} \right| \propto kr \ll 1$ ist. Das elektrische Feld dominiert also im Nahfeld.

¹ Details der Rechnung können z.B. in Nolting nachgelesen werden, Kapitel 4.5.3 in der 7. Auflage

Das Fernfeld oder das Strahlungsfeld ($kr \gg 1$)

Auch wieder in Übereinstimmung mit der früher geführten Diskussion, können wir das Fernfeld schreiben als

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_D(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} k\omega \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{p}\right) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \\ \mathbf{B}_D(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \omega^2 \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{p}\right) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \\ \mathbf{E}_D(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} k^2 \left[\left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{p}\right) \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right] \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \\ \mathbf{E}_D(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{p}\right) \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right] \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der einfache Zusammenhang

$$\mathbf{E}_D(\mathbf{r}, t) = c\mathbf{B}_D(\mathbf{r}, t) \times \frac{\mathbf{r}}{r}$$

An den Gleichungen erkennen wir, dass \mathbf{B} senkrecht auf \mathbf{E} steht und dass beide senkrecht auf \mathbf{r} stehen. Die Amplitudenabhängigkeit $1/r$ beschreibt eine Kugelwelle. \mathbf{B} und \mathbf{E} sind in Phase und das Verhältnis der normierten Amplituden ist ungefähr 1, $|\frac{c\mathbf{B}}{\mathbf{E}}| \approx 1$.

Allgemeine Zeitabhängigkeit

Wir haben uns bisher in der Berechnung nur auf eine monochromatische Quelle beschränkt, z.B. für das Magnetfeld haben wir erhalten

$$\mathbf{B}_D(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \omega^2 \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{p}\right) \frac{e^{i\frac{\omega}{c}r}}{r} \right] e^{-i\omega t} = \bar{\mathbf{B}}_D(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}$$

Wir können dieses Feld als eine Fourierkomponente interpretieren und über alle anderen hinwegintegrieren.

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_D(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \bar{\mathbf{B}}_D(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (-i\omega)^2 \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \bar{\mathbf{p}}(\omega)\right) \frac{1}{r} e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \bar{\mathbf{p}}(\omega)\right) \frac{1}{r} e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{r} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \times \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P} \left(t - \frac{r}{c}\right) \right]\end{aligned}$$

Nur beschleunigte Ladungen strahlen elektromagnetische Felder ab.

Was noch fehlt in diesem Skript was in der Vorlesung aber behandelt wird:

- etwas mehr Ausführungen zur Polarisation
- Energiebilanz der Dipolstrahlung
- Magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolstrahlung

- Potential einer bewegten Punktladung (Lienard-Wichert-Potential)

Was noch fehlt in diesem Skript und was in der Vorlesung nicht explizit behandelt wurde:

- Berechnung der retardierten Greenschen Funktion mit Hilfe der Funktionentheorie inklusive Ausführungen zur Residuensatz
- Mehr Ausführungen zur Fouriertransformation

Teil II

Relativitätstheorie

10 Spezielle Relativitätstheorie

Die spezielle Relativitätstheorie hat das Ziel, die Beziehungen zwischen den physikalischen Gesetzen in gegeneinander bewegten Bezugssystemen zu erklären. Ihre Entwicklung war motiviert durch missliche Versuche, ein Trägermedium für elektromagnetische Wellen zu finden (den berühmten Äther) und beseelt durch den Wunsch, Assymmetrien aufzulösen, die auftauchen, wenn die Maxwell'sche Gleichungen einige Phänomene im Zusammenhang mit bewegten Körpern erklären sollten. Gerade im Rahmen der Elektrodynamik tauchten aber auch fundamentale Probleme auf. Die lange Zeit vorherrschende Annahme von einem absoluten Zeit und einem absoluten Raum, welche auf Arbeiten von Newton zurück gehen, führt zu einer Galilei-Transformation, um Ereignisse in verschiedenen relativ zueinander bewegten Koordinatensystemen zu beschreiben. In diesen Koordinatensystemen sollten auch die physikalischen Gesetze gleich bleiben. Wie man zeigen kann, und wie wir im folgenden untersuchen werden, sind gerade die Maxwell'schen Gleichungen nicht invariant unter Gallilei-Transformation. Um diese Missstände zu beheben, postulierte Albert Einstein die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Koordinatensystemen. Diese Geburtsstunde der speziellen Relativitätstheorie veröffentlichte er in der Arbeit mit dem Titel *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, veröffentlicht in den Annalen der Physik und Chemie im Jahre 1905. Sie diskutiert die Physik in sich relativ zueinander bewegender Inertialsystemen. Die spezielle Relativitätstheorie lässt sich insgesamt aus nur zwei Postulaten ableiten:

- Kovarianz der Naturgesetze
- Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Gerade die zweite Bedingung lässt sich nur schwer in Übereinstimmung bringen mit unserer täglichen Erfahrung. Diese ist aber begrenzt auf Geschwindigkeiten, die sehr viel kleiner sind als die Lichtgeschwindigkeit. Wir werden sehen, dass die Auswirkung der speziellen Relativitätstheorie besonders ausgeprägt sind bei hohen Geschwindigkeiten, wie sie zum Beispiel in modernen Teilchenbeschleunigern relevant sind. Die später im Jahr 1915 veröffentlichte allgemeine Relativitätstheorie behandelt dann die Physik von relativ zueinander beschleunigten Inertialsystemen. Diese werden wir hier nicht diskutieren, sondern lediglich einige Effekte erklären, welche im Rahmen dieser Theorie auftauchen bzw. durch diese erklärt werden können.

10.1 Bezugssysteme / Inertialsysteme

Ein Bezugssystem wird definiert durch ein Koordinatensystem K für den Ort und für die Zeit. In einem solchen Bezugssystem wird ein physikalisches Ereignis E durch die Angabe von 4 Zahlen beschrieben. Drei dieser Zahlen beschreiben dabei die Ortskoordinate x , y , und z . Die vierte Koordinate bezeichnet die Zeit t . Wir können uns beliebig viele solche Koordinatensysteme vorstellen, solange sie nur unterschiedliche

Bezugspunkte haben. Ein klassisches Beispiel für ein Bezugspunkt wäre die Erde, wie wir sie in einem Labor wahrnehmen. Die Erde rotiert aber um ihre eigene Achse und der Erde selbst rotiert um die Sonne. Andere Koordinatensysteme können daher die sich rotierende Erde bzw. auch die Sonne als ihren Bezugspunkt wählen. In jedem dieser Bezugssysteme kann ein physikalisches Ereignis dann durch ein entsprechendes Koordinatensystem raum-zeitlich lokalisiert werden. Daher ist es immer möglich, die Koordinaten eines Ereignisses von einem beliebigen Bezugssystem K in ein beliebig anderes Bezugssystem K' abzubilden.

$$(\mathbf{r}, t) \leftrightarrow (\mathbf{r}', t')$$

Diese Abbildung ist bijektiv, was man auch als Eineindeutigkeit beschreibt. Jedem Ereignis in K kann ein und nur exakt ein Ereignis in K' zugeordnet werden. Leider ist das Skript im Folgenden (noch) nicht sehr kohärent und Transformationen in beide Richtungen werden diskutiert. Für die Physik spielt das keine Rolle.

Ein Bezugssystem heißt nun Inertialsystem, wenn ein kräftefreier Massepunkt sich in diesem gleichförmig bewegt. Seine Bahn im Bezugssystem wird dann beschrieben durch $(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t, t)$. Alle Inertialsysteme bewegen sich relativ zueinander mit einer konstanten Geschwindigkeit.

Beschreibt man einen Körper in einem Inertialsystem, in dem dessen Geschwindigkeit verschwindet ($\mathbf{v}_0 = 0$), so spricht man von dem Ruhesystem eines Körpers

Um Physik als solches in einem Bezugssystem zu definieren, führen wir verschiedene physikalischen Größen ein, welchen wir bestimmte Werte zuordnen können. Physikalischen Größen sind zum Beispiel der Ort \mathbf{r} , die Zeit t , die Energie E oder der Impuls \mathbf{p} . Diese können in unterschiedlichen Bezugssystemen definiert werden, z. B. als \mathbf{r}' , t' , E' oder \mathbf{p}' . Das Äquivalenzprinzip als ein Grundpfeiler der Relativitätstheorie besagt nun, dass in jedem Bezugssystem die physikalischen Gesetze gleich sind. Diese physikalischen Gesetze stellen Beziehungen her zwischen physikalischen Größen. Ein einfaches Beispiel für ein solches Gesetz ist zum Beispiel der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Orts- und Zeitänderung, $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$. Oder auch noch einmal anders ausgedrückt, alle Inertialsysteme sind physikalisch äquivalent.

Die Frage ist lediglich, wie genau die verschiedenen physikalischen Größen in den unterschiedlichen Bezugssystemen mit einander in Verbindung stehen.

10.2 Galilei-Transformation

Die Galilei-Transformation ist die Transformation, die unserer täglichen Erfahrung entspricht. Lange Zeit hielt man sie für allgemein gültig. Sie

betrachtet zwei verschiedene Inertialsysteme K und K' , die sich mit einer Relativgeschwindigkeit von \mathbf{v}_s zueinander bewegen.

Es sei im Folgenden E ein Ereignis in K' mit den Koordinaten (\mathbf{r}', t') . Dann besagt die Galilei-Transformation, dass die Koordinaten von E in K

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}' + \mathbf{v}_s t' \\ t &= t'\end{aligned}$$

sind. Wichtig ist in dieser Galilei-Transformation, dass die Zeit selbst nicht transformiert wird.

Diese Galilei-Transformation haben verschiedene Konsequenzen im Kontext verschiedener Messgrößen. Wir diskutieren im Folgenden insbesondere solche Eigenschaften, welche später im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie im Allgemeinen ebenfalls diskutiert werden.

Bewegte Uhren gehen gleich schnell

Beschreiben wir ein Ereignis E_1 in K' : (\mathbf{r}_0, t_1) und in K : (\mathbf{r}_1, t'_1) und ein Ereignis E_2 in K' : (\mathbf{r}_0, t_2) und in K : (\mathbf{r}_2, t'_2) . Dieses Ereignis hat die gleiche Ortskoordinate in K' , es soll in diesem Koordinatensystem also ruhen. Für die Orts- und Zeitkoordinate im relativ bewegten Bezugssystem gilt dann:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_s t_1 & t_1 &= t'_1 \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_s t_2 & t_2 &= t'_2\end{aligned}$$

Die Zeitdifferenz beträgt

$$\delta t = t_1 - t_2 = t'_1 - t'_2 = \delta t'$$

Die Ereignisse haben in beiden Koordinatensystemen den gleichen Zeitabstand. Die Ortsdifferenz verschwindet ebenfalls in beiden Koordinatensystemen.

Länge eines Stabes ist unabhängig von der Relativgeschwindigkeit \mathbf{v}_s

Eine vergleichbare Erkenntnis lässt sich gewinnen zu Längen von Objekten in unterschiedlichen Bezugssystemen. Der Beginn eines Stabes in K' ist z.B. gegeben durch $(0, t')$, sein Ende durch (l', t') . In einem anderen Koordinatensystem K ist dies $(v_s t, t)$ und $(l' + v_s t, t)$. Differenzbildung von Anfangs und Endpunkte zeigt, dass die Längen in beiden Bezugssystemen identisch sind.

Geschwindigkeiten addieren sich

Bewege sich ein Körper P mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}' in K' . So wird dieses Ereignis beschrieben mit

$$\begin{aligned}\rightarrow K' &= (\mathbf{v}' t', t') \\ \rightarrow K &= (\mathbf{v}' t' + \mathbf{v}_s t, t)\end{aligned}$$

Da $t = t'$ ist gilt

$$\rightarrow K = ([\mathbf{v} + \mathbf{v}_s] t, t)$$

Aus dieser einfachen Addition der Geschwindigkeit lässt sich z.B. auch die Invarianz unter der Galileitransformation der Gesetze der klassischen Mechanik nachweisen. Nehmen Sie z.B.

$$\mathbf{F}' = m' \frac{d\mathbf{v}'}{dt'}$$

in dem Koordinatensystem von K' , von dem Sie erwarten, dass

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

dies ebenfalls in K gilt. Mit $m = m'$ und $t = t'$ können Sie dann beweisen, dass

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d(\mathbf{v}' + \mathbf{v}_s)}{dt} = m' \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} + m \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = m' \frac{d\mathbf{v}'}{dt'}$$

da die Relativgeschwindigkeit konstant ist.

10.3 Michelson-Morley Experiment

Diese Galilei-Invarianz trifft aber nicht auf die Elektrodynamik zu und es wurden Phänomene im Rahmen der Elektrodynamik gefunden, welche nicht der Galilei'schen Relativität entsprechen. Die Wellengleichung in einem beliebigen Inertialsystem lautet

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$$

In einem dazu bewegten Inertialsystem gilt (Relativbewegung der Einfachheit hier nur in x Richtung)

$$x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t \quad E_x(x, t) = E_x(x' + vt', t')$$

Die Ortsableitung transformiert sich zu

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial x'}$$

Danach gilt $\Delta E_x = \Delta' E_x$. Der gestrichene Laplaceoperator soll hier darauf hinweisen, dass die Ableitung relativ zur gestrichenen Koordinate durchgeführt wird. Für die Zeitableitung gilt aber

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -v \frac{\partial E_x}{\partial x'} + \frac{\partial E_x}{\partial t'}$$

Die zweite Zeitableitung lautet also

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2 E_x}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial t'^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 E_x$$

Die Wellengleichung im bewegten System lautet somit

$$\Delta' \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \nabla' \right)^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

und sieht offensichtlich anders aus als die Ursprungswellengleichung. Die Wellengleichung ist nicht invariant unter Galileitransformationen.

Mögliche Auswege aus diesem Dilemma sind die Falschheit der Maxwell'schen Gleichungen. Dies schien aber nicht sehr wahrscheinlich, da die klassischen elektrodynamische Phänomene ausgezeichnet durch die Maxwell'schen Gleichungen beschrieben sind. Die zweite Möglichkeit wäre die, dass die Galilei-Transformation selbst nicht plausibel sind. Dies stand aber lange Zeit im eklatanten Widerspruch zu unserer täglichen Erfahrung. Daher wurde eher vermutet, dass das Relativitätsprinzip nicht stimmt und es doch ein ausgezeichnetes Inertialsystem gibt, in dem die Maxwell'schen Gleichungen exakt stimmen. Dies motivierte Experimente zur Suche nach diesem ausgezeichnetem System.

Experimente von Fizeau (um 1850) zur Lichtausbreitung in bewegten Flüssigkeiten und von Michelson und Morley (1881-1887) zur Lichtausbreitung in Richtung parallel und senkrecht zur Erddrehung zeigten jedoch, dass die Lichtgeschwindigkeit unabhängig von der Bewegung des Bezugssystems ist.

In dem Versuch von Michelson und Morley wird ein Michelson Interferometer mit dem einem Arm (Strecke AB) parallel zur Richtung der Erdrotation ausgerechnet. Betrachten wir jetzt die Laufzeit in den verschiedenen Armen des Interferometers.

$$t_{AB} = \frac{l_B - v_E t_{AB}}{c} \quad t_{BA} = \frac{l_B + v_E t_{AB}}{c}$$

$$t_{AB} = \frac{l_B}{c + v_E} \quad t_{BA} = \frac{l_B}{c - v_E}$$

Die Gesamtlaufzeit beträgt somit

$$t_{ABA} = \frac{l_B}{c + v_E} + \frac{l_B}{c - v_E} = \frac{2l_B}{c \left(1 - \frac{v_E^2}{c^2}\right)}$$

Die Laufzeit im Arm senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, der lediglich eine seitliche Verschiebung erfahren sollte, beträgt

$$t_{ADA} = \frac{2s}{c} = \frac{2\sqrt{l_D^2 + \frac{(v_E t_{ADA})^2}{4}}}{c} = \frac{2l_D}{c\sqrt{1 - \frac{v_E^2}{c^2}}} \approx \frac{2l_D}{c} \left(1 + \frac{v_E^2}{2c^2}\right)$$

Anschliessend wurde das Interferometer so justiert, dass man ein konstruktive Interferenz beobachten konnte, z.B. $t_{ABA} = t_{ADA} + \frac{n\lambda}{c}$ mit n einer ganzen Zahl (der Einfachheit halber wollen wir $n = 0$ annehmen).

Unter Gleichbehaltung der Längen des Interferometers und einer Rotation des Interferometers um 90° müsste man eine Phasenverschiebung der beiden Armen (identische Armlängen werden jetzt der Einfachheit angenommen) von $\Delta\phi = \omega\Delta t \approx \omega L \frac{v_E^2}{c^2}$ beobachten. Im Originalexperiment betrug die Länge 11 m und eine Wellenlänge von $\lambda = 500$ nm

wurde verwendet. Bei einer Bahngeschwindigkeit der Erde von v_E 30 km/s sollte das zu einer Phasenverschiebung in der Größenordnung von π kommen. Dunkle und helle Streifen sollten sich also bei einer Rotation des Interferometers einander abwechseln. Dies wurde aber nicht beobachtet zu verschiedenen Zeiten an verschiedenen Orten, was an sich eine technologische Meisterleistung bezüglich der Stabilität des Experimentes war.

Eine Erklärung dafür bestand in der Vermutung (Hendrik Lorentz 1892 und George Fitzgerald 1889), dass der in Richtung der Bewegung stehende Arm im Interferometer seine Länge auf $L(v) = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ verkürzt.

Eine andere Erklärung kann aber auch gefunden werden unter der Annahme, dass unterschiedlich schnell bewegte Beobachter trotzdem stets die gleiche Lichtgeschwindigkeit sehen. Dies ist ein Widerspruch zur Newton'schen Physik und wurde von Einstein zum Postulat seiner Relativitätstheorie erhoben. Es besagt, dass:

In allen Inertialsystemen die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum den gleichen Wert hat.

Die Lichtgeschwindigkeit ist konstant unabhängig vom Bewegungszustand der Quelle. Zusätzliche postulierte das Relativitätsprinzip:

Alle Inertialsysteme sind zur Beschreibung von Naturvorgängen gleichberechtigt.

Naturgesetze haben in allen Inertialsystemen dieselbe Form. Wie aber sieht genau eine Transformation zwischen verschiedenen Inertialsystemen aus, in welchen diese Konstanz der Lichtgeschwindigkeit sichergestellt ist?

10.4 Lorentz-Transformation

Betrachten wir die Situation, dass zum Zeitpunkt $t = t'$ am Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ ein Lichtpunkt ausgestrahlt wird, welcher zu einer Kugelwelle führt. Die Wellenfronten im System K sind durch folgende Bedingung definiert:

$$kr - \omega t = 0 \rightarrow r^2 - \frac{\omega^2}{k^2} t^2 = 0$$

Damit gilt

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

Vergleichbares gilt natürlich auch, unter der Annahme der Konstanz der Lichtgeschwindigkeiten in allen Inertialsystemen, im Koordinatensystem K'

$$k'r' - \omega' t' = 0 \rightarrow r'^2 - \frac{\omega'^2}{k'^2} t'^2 = 0$$

Da nach der Voraussetzung $\frac{\omega'^2}{k'^2} = c'^2 = c^2$ gelten soll, muss aber auch die folgende Gleichung richtig sein

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

Man sieht hier, dass der raumzeitliche Abstand, definiert mittels $r^2 - c^2 t^2$, konstant bleiben muss beim Übergang zwischen den beiden Koordinatensystemen; er ist invariant. Dies ist nur möglich, wenn sich die Zeit ebenfalls transformiert. Dann gilt, im Gegensatz zu den bisherigen Diskussionen, $t' \neq t$.

Das entsprechende Transformationsgesetz wurde von Lorentz schon vor Einsteins Arbeit gefunden. Um dieses herzuleiten, definieren wir uns zunächst den Vierervektor. Er fasst die Raum- und die Zeitkoordinaten zusammen:

$$x_\mu = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3)$$

Dies ist nur eine allgemein gültigere Schreibweise. Hier ist $x_0 = ct$ und $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Da der Raum homogen und isotrop sein soll, kann man schlussfolgern, dass der Zusammenhang linear sein muss zwischen Vierervektoren in verschiedenen Inertialsystemen

$$x'_\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_\mu^\nu x_\nu$$

Exemplarisch betrachten wir im Folgenden einer Bewegung des Systems K' relativ zu K mit der Geschwindigkeit v entlang x_1 . Dann ist

$$x'_2 = x_2 \quad x'_3 = x_3$$

Da der raumzeitliche Abstand in jedem Inertialsystem konstant sein soll

$$(x_0)^2 - (x_1)^2 = R^2 = \text{const.}$$

muss gelten

$$\begin{aligned} x'_0 &= x_0 \cosh I - x_1 \sinh I \\ x'_1 &= -x_0 \sinh I + x_1 \cosh I \end{aligned}$$

Mit diesem Ansatz gilt

$$\begin{aligned} x_0'^2 - x_1'^2 &= x_0^2 \cosh^2 I + x_1^2 \sinh^2 I - 2x_0 x_1 \cosh I \sinh I \\ &\quad - x_0^2 \sinh^2 I - x_1^2 \cosh^2 I + 2x_0 x_1 \cosh I \sinh I \\ &= (x_0^2 - x_1^2) (\cosh^2 I - \sinh^2 I) \\ &= x_0^2 - x_1^2 \end{aligned}$$

Den freien Parameter I erhält man unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der Ursprung des Systems K ($x_1 = 0$) sich im System K' mit der Geschwindigkeit $-v$ bewegt. Daraus erhält man

$$\frac{x'_1}{x'_0} = -\frac{v}{c} = -\frac{\sinh I}{\cosh I} = -\tanh I$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\cosh I &= \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 I}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \sinh I &= \sqrt{\cosh^2 I - 1} = \frac{\tanh I}{\sqrt{1 - \tanh^2 I}} = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \beta\gamma\end{aligned}$$

In Koordinatenschreibweise erhält man für eine Relativbewegung in x-Richtung

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ y' &= y \\ z' &= z\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ ct &= \gamma(ct' + \beta x') \\ y &= y' \\ z &= z'\end{aligned}$$

Mit der Definition der Terme

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c} \quad \beta = \frac{|\mathbf{v}|}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

erhält man dann als die allgemeine Lorentz-Transformation

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \mathbf{x} + (\gamma - 1)(\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{x})\hat{\mathbf{v}} - \gamma\boldsymbol{\beta}x_0 \\ x'_0 &= \gamma(x_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x})\end{aligned}$$

Hier ist $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v}$.

Die gleichen Eigenschaften, welche wir früher im Rahmen der Galilei Transformation diskutiert haben, wollen wir jetzt erneut diskutieren und dabei die Konsequenzen der Lorentz-Transformation kennenlernen.

Bewegte Uhren gehen langsamer

Ein Ereignis E_1 in K' wird beschrieben durch die Koordinate (\mathbf{r}'_0, t'_1) und in K durch (\mathbf{r}_1, t_1) . Ein zweites Ereignis E_2 in K' wird beschrieben durch die Koordinate (\mathbf{r}'_0, t'_2) und in K durch (\mathbf{r}_2, t_2) . Berechnen wir den zeitlichen Abstand der beiden Ereignisse.

$$\begin{aligned}ct_1 &= \gamma(ct'_1 + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}'_0) \\ ct_2 &= \gamma(ct'_2 + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}'_0)\end{aligned}$$

Die Zeitdifferenz beträgt demnach

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) = \gamma\Delta t'$$

Da der Faktor γ immer größer ist als eins, ist der zeitliche Abstand zwischen den Ereignissen im bewegten Bezugssystem größer als im unbewegten. Man spricht hier von einer Zeitdilatation.

Bewegte Stäbe sind kürzer

Ein ruhender Stab im Koordinatensystem K' hat den Anfangspunkt in $(0, t')$ und seinen Endpunkt in (l', t') . In einem relativ dazu bewegten Intertialsystem K wird der Anfangspunkt beschrieben durch $(v_s t, t)$ und der Endpunkt durch $(l + v_s t, t)$. Für die Transformation ergibt sich für den Endpunkt

$$\begin{aligned}x &= l + v_s t = \gamma (l' + v_s t') \\t &= \gamma \left(t' + \frac{v_s}{c^2} l' \right)\end{aligned}$$

Damit ist

$$l + v_s \gamma \left(t' + \frac{v_s}{c^2} l' \right) = \gamma (l' + v_s t')$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}l &= \gamma \left(1 - \frac{v_s^2}{c^2} \right) l' \\l &= \frac{1}{\gamma} l'\end{aligned}$$

Dies stellt eine effektive Verkürzung des Stabes im bewegten Koordinatensystem dar, da der Term $\frac{1}{\gamma} \leq 1$ ist. Man spricht von einer Längen- bzw. einer Lorentz-Kontraktion.

Addition von Geschwindigkeiten

Ein Massepunkt bewege sich in K' mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}' und in K mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} . K' bewege sich relativ zu K mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_s = v_s \mathbf{x}_1$ entlang der x -Achse. Dann ergeben sich die Geschwindigkeiten zu

$$\begin{aligned}v_{\parallel} &= \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{v}} = \frac{v'_{\parallel} + v_s}{1 + v_s \frac{v'_{\parallel}}{c^2}} \\ \mathbf{v}_{\perp} &= \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_s) \mathbf{v}_s = \frac{\mathbf{v}'_{\perp}}{\gamma \left(1 + v_s \frac{v'_{\parallel}}{c^2} \right)}\end{aligned}$$

10.5 4-Vektoren und Invarianten

Ein Satz von 4 physikalischen Größen, die sich unter einer Lorentz-Transformation wie der eben besprochene Vektor aus Orts- und Zeitkoordinate transformieren, heißen 4-Vektoren. Allgemein schreibt er sich zu

$$a^{\mu} = (a^0, \mathbf{a}) = (a^0, a^1, a^2, a^3)$$

Es gibt zwei Arten von 4-Vektoren.

$$a^\mu = (a^0, \mathbf{a}) \quad \text{heisst kontravarianter 4 - Vektor}$$

$$a_\mu = (a^0, -\mathbf{a}) \quad \text{heisst kovarianter 4 - Vektor}$$

Der von uns zuerst benutzte Vektor war ein kovarianter 4-Vektor. Beachten Sie bitte die unterschiedliche Benutzung des Sub- bzw. Superskripts.

Das Längenquadrat eines Vektors s^2 ist invariant unter Lorentztransformation. Es lässt sich als Skalarprodukt im 4-dimensionalen Raum schreiben mit $x_0 = ct$, wenn man die Definition des Skalarproduktes erweitert:

$$s^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Unter Verwendung des metrischen Tensors $g^{\mu\nu}$, der definiert ist durch

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu}$$

kann das Längenquadrat auch definiert werden als

$$s^2 = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren kann dann definiert werden als

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ &= \sum_{\mu=0}^3 a_\mu b^\mu = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu \end{aligned}$$

Allgemein gilt die Invarianz des Skalarproduktes unter Lorentztransformation, also

$$a' \cdot b' = a \cdot b$$

Im Speziellen lautet der verallgemeinerte Nabla Operator in kovarianter Formulierung

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \partial_t, \nabla \right)$$

und in kontravarianter Formulierung

$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\nabla \right)$$

Der Operator der Wellengleichung schreibt sich dann sehr einfach als

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta$$

Wie lorentztransformieren sich nun kontra- bzw. kovariante 4-Vektoren in einer Raumrichtung x_1 ?

Wir wissen, dass

$$\begin{aligned}x'_0 &= \gamma x_0 - \beta \gamma x_1 \\x'_1 &= -\beta \gamma x_0 + \gamma x_1 \\x'_2 &= x_2 \\x'_3 &= x_3\end{aligned}$$

gilt. Daher gilt

$$x'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

mit

$$L^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für kontravariante Koordinaten. Für differentielle Ausdrücke gilt

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = L^{\mu}_{\nu}$$

Für kovariante Koordinaten gilt

$$x'_{\mu} = L^{\nu}_{\mu} x_{\nu}$$

mit

$$L^{\nu}_{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10.6 Zeitkegel und Kausalität

Wir haben gerade gelernt, dass die Koordinate eines Raumzeitpunkt durch den 4-Vektor

$$x^{\mu} = (ct, \mathbf{x})$$

beschrieben werden kann. Der Abstand eines Ereignisses zum Koordinatenursprung s kann geschrieben werden als

$$x_{\mu} x^{\mu} = c^2 t^2 - |\mathbf{x}|^2 = s^2$$

Abstände lassen sich auch zu einem beliebigen anderen Punkt im Koordinatensystem definieren mittels

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

$$= c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

Bei Beschränkung auf eine Raumkoordinate führt dies zu

$$(\Delta s)^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2$$

Allgemein lassen sich Ereignisse bezüglich ihres Abstandes klassifizieren

- $s^2 = 0$

Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung nach $c^2 t^2 = |\mathbf{x}|^2$. Ein solches Ereignis wird **lichtartig** genannt. Ereignisse E auf dem Zukunftslightkegel sind mit $E^{(0)}$ über eine auslaufende Kugelwelle miteinander verbunden. $E^{(0)}$ ist mit Ereignissen E auf Vergangenheitslightkegel über einlaufende Kugelwelle verbunden. Die Abstände der Ereignisse sind Lorentz-invariant. Signalaustausch erfolgt mit $v = c$.

- $s^2 > 0$

Ein solches Ereignis wird **zeitartig** genannt. Es verlangt $c^2 (t_2 - t_1)^2 > (x_2 - x_1)^2$. Solche Ereignisse lassen sich durch ein Lichtsignal miteinander verbinden. Zwischen diesen Ereignissen besteht ein kausaler Zusammenhang. Signalaustausch erfolgt mit $v < c$.

- $s^2 < 0$

Ein solches Ereignis wird **raumartig** genannt. Es verlangt $c^2 (t_2 - t_1)^2 < (x_2 - x_1)^2$. Solche Ereignisse lassen sich nicht durch ein Zeitsignal miteinander verbinden. Es ist hier zu beachten, dass es eine Lorentztransformation gibt, bei der ein Ereignis mit $t_1 < t_2$ transformiert wird in $t'_1 > t'_2$. Solche Ereignisse haben keinen kausalen Zusammenhang. Diese Ereignisse können sich nicht gegenseitig beeinflussen.

10.7 Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

Skalar- und Vektorpotential

Die prinzipielle Frage, die wir uns stellen wollen lautet, genügt die Maxwell-Theorie der Relativitätstheorie? Dies würde eine Forminvarianz der Gleichungen beim Übergang zwischen Inertialsystemen mit Hilfe der Lorentz-Transformation bedeuten. Das haben wir als Lorentz-Invarianz kennengelernt. Wir haben gesehen, dass eine Lorentztransformation einer orthogonalen Transformation 4-dimensionaler Vektoren/Tensoren bedeutet. Die Forderung nach Forminvarianz bedeutet also, dass die Maxwellschen Gleichungen in 4er Schreibweise zu formulieren sind. Dies würden wir im Folgenden durchführen.

Wir betrachten im Folgenden die Maxwellschen Gleichungen im Vakuum (Ladungen sind externe Ladungen, Ströme sind makroskopische

Ströme).

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\end{aligned}$$

Im Folgenden lassen wir der Übersichtlichkeit halber die Orts- und Zeitabhängigkeiten weg. Sie werden aber implizit immer mit angenommen.

Aus der Forderung, dass die Divergenz des Magnetfeldes verschwindet, können wir diese als die Rotation des Vektorpotentials schreiben

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Eingesetzt in die Rotationsgleichung für das elektrische Feld ergibt dies

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Damit kann das Argument der Rotation immer als der Gradient eines Potentials geschrieben werden

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$$

Damit können wir das elektrische Feld mit Hilfe des Vektor- und des skalaren Potentials schreiben als

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Mit diesen beiden Potentials können die Maxwell'schen Gleichungen wie folgt umgeschrieben werden

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}_{\text{makr}} + \frac{1}{c^2} \left[-\frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} \right] \\ \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \epsilon_0 \nabla \cdot \left[-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = \rho_{\text{ext}}\end{aligned}$$

Aufösen ergibt

$$\begin{aligned}\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} - \nabla \left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi \right] &= -\mu_0 \mathbf{j}_{\text{makr}} \\ \Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

Das Problem hier ist, dass die Potentialgleichungen immer noch gekoppelt sind. Eine Entkopplung ist aber möglich durch Nutzung der Freiheiten der Eichtransformationen. Wir haben dies früher diskutiert

und dort gelernt, dass das Vektor- und das skalare Potential mittels des Eichpotentials $g(\mathbf{r}, t)$ wie folgt geändert werden können

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} + \nabla g \\ \phi &\rightarrow \phi - \frac{\partial g}{\partial t}\end{aligned}$$

dass alle beobachtbaren Felder unverändert werden. Für die Wahl des Eichpotentials gibt es keine eindeutige Vorschrift und mehrere Möglichkeiten sind möglich. Wir haben die Coulomb-Eichung kennen gelernt. Dort ist das Eichpotential immer so gewählt, dass das skalare Potential nur die Lösung einer Poissongleichung ist. In der von uns jetzt verwendeten Lorenzeichung wählt man das Potential so, dass

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0$$

gilt. Damit erhält man zwei sehr symmetrische Wellengleichungen für das skalare und das Vektorpotential:

$$\begin{aligned}\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{j}_{\text{makr}} \\ \Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

Um jetzt zu einem 4'er-Formalismus zu gelangen, führen wir als erstes den Viererstrom ein

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$$

Erinnern wir uns, dass die Ableitungen geschrieben worden sind als

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

Dann folgt aus der Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

und somit

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial c\rho}{\partial ct} = 0$$

sofort

$$\partial_\mu j^\mu = \partial^\mu j_\mu = 0$$

Vergleichbar können wir ein Viererpotential einführen

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \mathbf{A}\right)$$

so dass die Bestimmungsgleichung der Lorenzeichung

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0$$

geschrieben werden kann als

$$\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu = 0$$

Für die Wellengleichung ergibt sich dann

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu$$

Zur Beschreibung der Felder kann dann der total antisymmetrische Feldstärketensor eingeführt werden

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Er gibt uns den Zusammenhang zwischen Potential und Feldern wieder an. Ausgeschrieben lautet er

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Die Richtigkeit lässt sich exemplarisch überprüfen, z.B.

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \left(-\frac{\partial \rho}{\partial x c} \right) \partial_x \phi = -\frac{E_x}{c}$$

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} = -B_z$$

Mit dieser Notation schreibt sich die inhomogene Wellengleichung als

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$

Es ist gebräuchlich, auch den dualen elektromagnetischen Feldstärketensor zu definieren (mit Hilfe des Levi-Civita Tensors):

$$\bar{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ -B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ -B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix}$$

Der völlig antisymmetrische Levi-Civita-Tensor 4. Stufe wird definiert durch

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \text{ eine gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \text{ ist} \\ -1 & \text{falls } (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \text{ eine ungerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \text{ ist} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Für diesen Tensor gilt $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Die homogene Wellengleichung schreibt sich dann als

$$\partial_\mu \bar{F}^{\mu\nu} = 0$$

Was noch fehlt in diesem Skript was in der Vorlesung aber behandelt wird:

- logischer Aufbau der 4-dimensionalen Maxwelltheorie
- Energie-Impuls-Tensor
- Transformation der Felder bzw. Ladungen und Stöme

Abbildungsverzeichnis

- 1.1 Spektrum elektromagnetischer Wellen und deren technologische Bedeutung. 9
- 2.1 Visualisierung der Integraldarstellung des Gradienten. 15
- 2.2 Gaussfunktion als Funktion des Parameters σ . Wir sehen, dass für kleiner werdende Parameter die Funktion schmaler und größer wird in ihrer Amplitude um den Koordinatenursprung. Das Integral über die gesamte x -Achse bleibt dabei immer konstant und ist normiert auf eins. 20