Elektrodynamik

Kirill Melnikov
TTP KIT
15. Februar 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Elektrisches Feld und Elektrostatik	2
2	Das elektrische Potential	17
3	Leiter	28
4	Lösungen der Laplace und Poisson Gleichungen	35
5	Dielektrika	55
6	Lorentz Kraft und Bio-Savar'sches Gesetz	69
7	Magnetisches Feld in Materie	87
8	Elektrodynamik: Ohm'sches Gesetz. Elektromotorische Kraft	94
9	Induktivität	103
10	Die Maxwell'schen Gleichungen und ihre einfache Lösungen	109
11	Reflexion und Transmission der elektromagnetischen Wellen	120
12	Wellen in Leiter	127
13	Geführte Wellen	134
14	Felder der bewegenden Ladungen	141
15	Die Dipolstrahlung	152
16	Die Abstrahlung einer Punktladung	163
17	Relativitätstheorie	169
18	Relativitätstheorie II	178

1 Elektrisches Feld und Elektrostatik

Das grundlegende Problem der Elektrostatik lautet: es sei eine Menge von elektrischen Ladungen gegeben. Wir wollen wissen welche Kraft wird von diesen Ladungen auf einer anderen Ladung (Testladung) ausgeübt.

Um dieses Problem zu lösen, benutzen wir das Superpositionsprinzip. Das Prinzip besagt, dass die Wechselwirkung zwischen zwei Ladungen unabhängig von der Anwesenheit anderer Ladungen ist. Denn, die gesamte Kraft, welche auf die Testladung wirkt, ist durch

$$\vec{F}_Q = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Qi} \tag{1.1}$$

gebeben. Wir summieren über alle Ladungen außer der Testladung und $\vec{F}_{Qi}$ ist die Kraft zwischen Testladung Q und der Ladung i.

Die Kraft zwischen zwei Punktladungen ist durch Coulomb'sches Gesetz gegeben. Die Kraft lautet

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}. \tag{1.2}$$

Diese Formel beschreibt die Kraft, die auf Ladung q_1 wirkt; die Kraft auf die Ladung q_2 ist $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. Ortsvektoren $\vec{r}_{1,2}$ beschreiben die Lage der Ladungen $q_{1,2}$; $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ ist der Betrag des Vektors $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Die Kraft $\vec{F}_{12}$ zeigt entlang dem Vektor $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Der Betrag der Kraft is umgekehrt-proportional zum Quadrat des Abstands zwischen zwei Ladungen

$$|\vec{F}_{12}| \sim \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}. \tag{1.3}$$

Die Einheit der Ladung ist *ein Coulomb*, gekennzeichnet durch den Buchstaben C. Ein Coulomb ist eine riesige Ladung; um die Maßstäbe zu setzen, merken wir, dass z.B. die Ladung des Elektrons $-1.60 \times 10^{-19} C$ ist. Die Konstante ϵ_0 bezeichnen wir als Dielektrizitätskonstante des Vakuums. Numerisch ist diese Konstante durch

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\ m^2} \tag{1.4}$$

gegeben, wobei C für Coulomb, N für Newton und m für Meter steht.

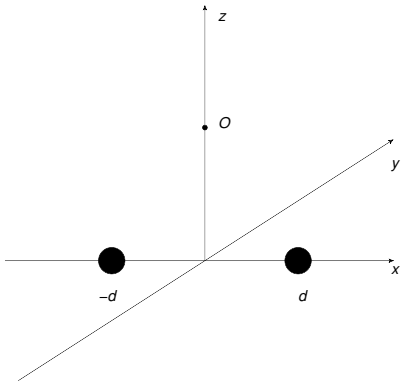

Abbildung 1: Zwei identische Ladungen befinden sich auf die x-Achse. Wir wollen das elektrische Feld am Punkt O wissen.

Falls $q_1 q_2 > 0$ (die Ladungen haben dieselbe Vorzeichen), ist die Kraft abstoßend; falls $q_1 q_2 < 0$ (die Ladungen haben unterschiedliche Vorzeichen) ist die Kraft anziehend.

Die Kraft $\vec{F}_Q$ charakterisiert die Verteilung der Ladungen und die Größe der Testladung. Wir können aber eine andere Größe einführen welche nur die Ladungsverteilung charakterisiert. Diese Größe heißt "elektrisches Feld"; wir bezeichnen sie mit dem Buchstaben $\vec{E}$. Laut Gl. (1.1) und Gl. (1.2) ist $\vec{E}(\vec{r})$ als Verhältnis der Kraft und der Testladung definiert,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_Q(\vec{r})}{Q} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \tag{1.5}$$

Als Beispiel berechnen wir das elektrische Feld am Punkt O mit dem Ortsvektor $\vec{r} = z\vec{e}_z$ von zwei Ladungen q deren Lage wir mit Ortsvektoren $\vec{r}_1 = d\vec{e}_x$ und $\vec{r}_2 = -d\vec{e}_x$ beschreiben.[1] Wir verwenden Gl. (1.5) für $N = 2$ und erhalten

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} \right]. \tag{1.6}$$

Es ist dann einfach zu sehen, dass

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = |\vec{r} - \vec{r}_2| = \sqrt{d^2 + z^2}, \tag{1.7}$$

[1] Wir betrachten Kartesisches Koordinatensystem und wählen drei Basis-Vektoren $\vec{e}_x = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_y = (0, 1, 0)$ und $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$ aus.

und $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = 0$. Es folgt

$$\vec{E} = \frac{qz\vec{e}_z}{2\pi\epsilon_0(z^2 + d^2)^{3/2}}. \tag{1.8}$$

Die Formel in Gl. (1.5) enhält eine Summe über alle Ladungen. Das ist natürlich wie es sein soll, weil es kann nur eine ganze Zahl von Ladungen geben. Allerdings ist diese Zahl sehr groß, z.B. in einem Kubikmeter Luft gibt es ungefähr 10^{25} Molekule und in jede Molekul gibt es geladene Teilchen wie z.B. Elektronen und Kerne. D.h. dass für viele praktische Überlegungen die Ladungen in Gl. (1.5) so nah aneinander sind, dass sie mit *kontinuerlicher* Ladungsverteilung beschreiben werden kann. Demzufolge, führen wir die Ladungsdichte ein

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q(\vec{r})}{\Delta V}, \tag{1.9}$$

wobei ΔV infinitesimales Volumen in Umgebung des Ortsvektors $\vec{r}$ ist und ΔQ die Ladung ist welche ΔV enthält.

Dank das Verhältnis zwischen Summen und Integrale, können wir Gl. (1.5) umschreiben

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \sum_{\vec{r}_i} \Delta V(\vec{r}_i) \frac{\rho(\vec{r}_i)(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \\ &= \int \mathrm{d}^3\vec{r}_i \, \frac{\rho(\vec{r}_i)(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Im letzten Schritt haben wir $\Delta V(\vec{r}_i) = \mathrm{d}x_i \, \mathrm{d}y_i \, \mathrm{d}z_i = \mathrm{d}^3\vec{r}_i$ benutzt.

Wir haben diese Formel für drei-dimensionale Ladungsdichte geschrieben. Allerdings werden wir auch die Situationen betrachten, wo entweder *Liniendichte* oder *Flächendichte* gegeben sind, wie z.B.

$$\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta L}, \quad \sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S}. \tag{1.11}$$

In solche Fälle sollen wir in Eq. (1.10) statt $\mathrm{d}^3\vec{r}_i$ entweder über $\mathrm{d}l_i$ (die Länge) oder $\mathrm{d}^2\vec{r}_i$ (die Fläche) integrieren und $\rho(\vec{r}_i)$ mit $\lambda(\vec{r}_i)$ bzw. $\sigma(\vec{r}_i)$ ersetzen.

Als Beispiel berechnen wir das elektrische Feld eines geraden Streckenabschnitts der Länge $2L$, welcher eine gleichmäßige Linien-Ladungsdichte λ

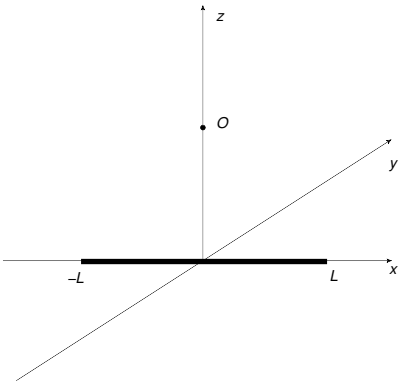

Abbildung 2: Wir wollen das elektrische Feld eines geraden Streckenabschnitts mit der Länge $2L$ und die Ladungsdichte λ am Punkt O berechnen.

hat, und entlang der x-Achse ist. Das Feld wollen wir an dem Punkt O mit dem Ortsvektor $\vec{R} = z\vec{e}_z$, $z > 0$ berechnen. Wir benutzen dann Gl. (1.10) und schreiben

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^{L} \mathrm{d}x \, \frac{\lambda(\vec{R} - \vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|^3}, \tag{1.12}$$

wobei $\vec{r} = x\vec{e}_x$ und $|\vec{R} - \vec{r}| = \sqrt{x^2 + z^2}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{R}) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\vec{R} \int_{-L}^{L} \frac{\mathrm{d}x}{(z^2 + x^2)^{3/2}} - \vec{e}_x \int_{-L}^{L} \frac{\mathrm{d}x \, x}{(z^2 + x^2)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \vec{R} \int_{-L}^{L} \frac{\mathrm{d}x}{(z^2 + x^2)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Um dieses Integral zu berechnen, schreiben wir

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} \frac{\mathrm{d}x}{(z^2 + x^2)^{3/2}} &= 2 \int_{0}^{L} \frac{\mathrm{d}x}{(z^2 + x^2)^{3/2}} \Big|_{x \to 1/\xi} \\ &= 2 \int_{1/L}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\xi \, \xi}{(1 + \xi^2 z^2)^{3/2}} = \frac{2L}{z^2 (z^2 + L^2)^{1/2}}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Wir erhalten dann

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{2\lambda L \vec{e}_z}{4\pi\epsilon_0 z(L^2 + z^2)^{1/2}}. \tag{1.15}$$

Zwei Grenzwerte sind interessant. Für $L \to \infty$, erhalten wir

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{2\lambda \vec{e}_z}{4\pi\epsilon_0 z}, \quad L \to \infty. \tag{1.16}$$

Für $z \gg L$, gilt

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{2\lambda L \vec{e}_z}{4\pi\epsilon_0 z^2} = \frac{Q\vec{e}_z}{4\pi\epsilon_0 z^2}, \quad z \gg L, \tag{1.17}$$

wobei $Q = 2\lambda L$ die gesamte Ladung des Abschnitts ist. Dieses Feld ist identisch zum elektrischen Feld der Punktladung $Q = \lambda L$, welches sich am Ursprung befindet.

Wir werden jetzt eine spezielle Größe berechnen, welche *die Divergenz des elektromagnetischen Feldes* heißt. Die Divergenz eines Vektors $\vec{V}$ ist ein Skalarprodukt zwischen dem Gradient Operator $\vec{\nabla}$ und dem Vektor $\vec{V}$

$$\textbf{div}\, \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}. \tag{1.18}$$

Wie genau der Gradient Operator aussieht und wie dann die Divergenz gerechnet werden kann ist vom Koordinatensystem abhängig. Im Kartesischen Koordinatensystem sind die Formeln am einfachsten. Es gilt

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \tag{1.19}$$

so dass

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \sum_{i=x,y,z} \frac{\partial V_i}{\partial r_i} = \partial_i V_i. \tag{1.20}$$

Es ist wichtig zu verstehen, dass die Formel für Divergenz im Kartesischen Koordinatensystem so einfach aussieht, weil die partielle Ableitungen in $\vec{\nabla}$ nicht auf Basis-Vektoren $\vec{e}_{x,y,z}$ wirkt, weil die im ganzen Raum gleich sind. Für andere Koordinatensysteme ist es nicht so. Die Formeln für verschiedene Differentialoperatoren im z.B. sphärischen oder zylindrischen Koordinatensystem muss man nicht im Kopf halten – die kann man immer in Büchern finden – aber es ist wichtig zu verstehen, warum solche Formeln viel komplezierter

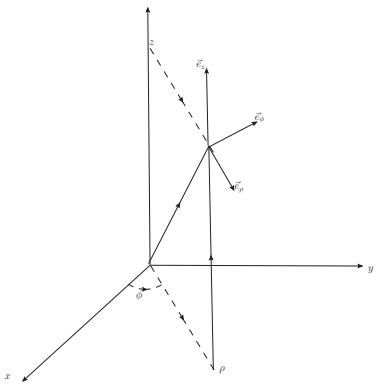

Abbildung 3: Zylindrisches Koordinatensystem.

für allgemeine Koordinatensysteme sind als für das Kartesische Koordinatensystem.

Um diese Diskussion zu illustrieren, betrachten wir das zylindrische Koordinatensystem; in diesem System schreiben wir

$$\vec{V} = V_\rho \vec{e}_\rho + V_\varphi \vec{e}_\varphi + V_z \vec{e}_z. \tag{1.21}$$

Die Vektoren $\vec{e}_\rho$ und $\vec{e}_\varphi$ sind nicht konstant; es ist einfach zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \vec{e}_x \cos\varphi + \vec{e}_y \sin\varphi, \\ \vec{e}_\varphi &= -\vec{e}_x \sin\varphi + \vec{e}_y \cos\varphi, \end{aligned} \tag{1.22}$$

gilt. Ein Vektor $\vec{r}$ schreiben wir als

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z. \tag{1.23}$$

Wir vergleichen diese Entwicklung mit der Entwicklung dieses Vektors im Kartesischen Koordinatensystem und finden $x = \rho\cos\varphi$ und $y = \rho\sin\varphi$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \mathrm{d}\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi, \\ \mathrm{d}y &= \mathrm{d}\rho\sin\varphi + \rho\cos\varphi\ \mathrm{d}\varphi. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Aus diesen Formeln können wir sofort die partiellen Ableitungen lesen

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial x}{\partial \rho}\right|_{\varphi} &= \cos\varphi, \quad \left.\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right|_{\rho} = -\rho\sin\varphi, \\ \left.\frac{\partial y}{\partial \rho}\right|_{\varphi} &= \sin\varphi, \quad \left.\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right|_{\rho} = \rho\cos\varphi. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Mit Hilfe dieser Formeln, schreiben wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} &= \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial y} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial y} = -\rho\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \rho\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Aus diesen Gleichungen drücken wir die Ableitungen ∂_x und ∂_y aus und erhalten

$$\begin{aligned} \partial_x &= \cos\varphi\ \partial_\rho - \frac{1}{\rho}\sin\varphi\ \partial_\varphi, \\ \partial_y &= \sin\varphi\ \partial_\rho + \frac{1}{\rho}\cos\varphi\ \partial_\varphi. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Jetzt, können wir die Divergenz in zylindrischen Koordinaten berechnen. Erstens, schreiben wir den Gradient Operator in zylindrischen Koordinaten mit Hilfe von Gl.(1.27) und der Umkehrung von Gl. (1.22) um. Wir erhalten

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_\rho\ \partial_\rho + \vec{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\partial_\varphi + \vec{e}_z\partial_z. \tag{1.28}$$

Danach berechnen wir das Skalarprodukt

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \left(\vec{e}_\rho\ \partial_\rho + \vec{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\partial_\varphi + \vec{e}_z\partial_z\right)\cdot\left(V_\rho\vec{e}_\rho + V_\varphi\vec{e}_\varphi + V_z\vec{e}_z\right). \tag{1.29}$$

Um diese Gleichung zu vereinfachen, sollen wir aufpassen, weil die Vektoren $\vec{e}_\rho$ und $\vec{e}_\varphi$ nicht konstant sind. Mit Hilfe von Gl. (1.22) finden wir

$$\partial_\rho\vec{e}_\rho = 0, \quad \partial_\rho\vec{e}_\varphi = 0, \quad \partial_\varphi\vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi, \quad \partial_\varphi\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\rho. \tag{1.30}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{V} &= \partial_\rho V_\rho + \frac{1}{\rho}\partial_\varphi V_\varphi + \partial_z V_z + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\partial_\varphi (V_\rho \vec{e}_\rho) \\ &= \partial_\rho V_\rho + \frac{1}{\rho}\partial_\varphi V_\varphi + \partial_z V_z + \frac{1}{\rho}V_\rho = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho}\partial_\varphi V_\varphi + \partial_z V_z.\end{aligned} \tag{1.31}$$

Diese Formel gibt die Divergenz eines Vektors in zylindrischen Koordinaten; die Herleitung zeigt warum solche Formeln in beliebigen Koordinatensystemen komplizierter sind als in Kartesischen Koordinaten.

Im Fall von sphärischen Koordinaten sieht die Formel für Divergenz eines Vektors so aus

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 V_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta V_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi V_\varphi. \tag{1.32}$$

Um zu sehen warum Divergenz des elektromagnetischen Felds wichtig ist, berechnen wir die Divergenz des Felds einer Ladung q welche sich am Ursprung des Koordinatensystems, also bei $\vec{r} = 0$, befindet. Das Feld lautet

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}. \tag{1.33}$$

Wir rechnen zuerst mit sphärischen Koordinaten. Dann

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\,\vec{e}_r, \tag{1.34}$$

sodass $\vec{E}$ in diesem Fall nur eine radiale Komponente hat. Mit Hilfe von Gl. (1.32), finden wir dann die Divergenz

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 E_r) = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\right) = 0. \tag{1.35}$$

Wir berechnen das Gleiche noch einmal in Kartesischen Koordinaten. Um die Ableitungen richtig zu berechnen, sollen wir nicht vergessen, dass

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\sum_{i=x,y,z} r_i^2}. \tag{1.36}$$

Dann

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=x,y,z}\partial_i E_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=x,y,z}\partial_i\frac{r_i}{r^3}\\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=x,y,z}\left(\frac{1}{r^3}-3\frac{r_i^2}{r^5}\right)=0.\end{aligned} \tag{1.37}$$

Die letzte Gleichung folgt, weil

$$\sum_{i=x,y,z}\frac{1}{r^3} = \frac{1}{r^3}\times\left(\sum_{i=x,y,z}1\right)=\frac{3}{r^3}, \tag{1.38}$$

und

$$\sum_{i=x,y,z}\frac{r_i^2}{r^5} = \frac{1}{r^5}\times\left(\sum_{i=x,y,z}r_i^2\right)=\frac{1}{r^3}. \tag{1.39}$$

Wir haben festgestellt, dass für eine Punktladung die Divergenz des elektrischen Feldes eine Null ist. Dieses Ergebnis ist aber *falsch*, weil es einer mathematischen Aussage, dem sogenannten Gauss'schen Satz, widerspricht. Der Satz besagt

$$\int_{\mathcal{V}}\mathrm{d}^3\vec{r}\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \oint_{\partial\mathcal{V}}\mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{E}. \tag{1.40}$$

Diese Formel ist so zu verstehen. Auf der linken Seite haben wir ein Integral der Divergenz eines Vektors $\vec{E}$ über das Gebiet $\mathcal{V}$. Auf der rechten Seite haben wir ein Integral über die Grenze des Gebiets $\mathcal{V}$ welche wir mit $\partial\mathcal{V}$ bezeichnen. Wir integrieren ein Skalarprodukt von Vektor $\vec{E}$ und das Element der Oberfläche $\mathrm{d}\vec{S}$. Die Aussage von Gl. (1.40) ist, dass diese zwei Integrale gleich sind.

Wir wollen Gl. (1.40) für das elektrische Feld der Punktladung überprüfen. Die linke Seite ist dann eine Null für beliebiges $\mathcal{V}$, weil die Divergenz eine Null ist. Um das Integral auf der rechten Seite der Gl. (1.40) zu berechnen, nehmen wir eine Kugel des Radius R als Volumen, sodass eine Sphäre die Oberfläche ist. Das Flächenelement $\mathrm{d}S$ ist dann $\mathrm{d}S = R^2\mathrm{d}\Omega$ wobei $\mathrm{d}\Omega$ der infinitesimale Raumwinkel ist. Die Richtung dieses Elements ist entlang dem Radius der Kugel ausgerichtet, sodass

$$\mathrm{d}\vec{S} = R^2\mathrm{d}\Omega\ \vec{e}_r, \tag{1.41}$$

ist. Dann,

$$\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^2}\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}. \tag{1.42}$$

Das Integral über den Raumwinkel gibt

$$\oint_S \vec{S} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0}. \tag{1.43}$$

Wir haben jetzt ein Problem. Die linke Seite des Gauss'schen Satzes ist eine Null, die rechte Seite ist q/ϵ_0; für $q \neq 0$ können diese zwei Ergebnisse nicht gleich sein. Interessanterweise ist dieses Problem auch R-unabhängig; das bedeutet, dass falls etwas falsch geht, muss es bei $\vec{r} = 0$ und nur bei $\vec{r} = 0$ passieren.

Um das besser zu sehen, betrachten wir jetzt als Volumen eine sphärische Schale mit dem inneren Radius b und externem Radius a. Die Punktladung bleibt an $\vec{r} = 0$. Falls wir die Berechnung des Gauss'schen Satzes wiederholen, erhalten wir Nullen auf beiden Seiten, unabhängig von b und a. Wie wir schon gesagt haben, das bedeutet, dass etwas bei $\vec{r} = 0$ falsch gehen soll.

Wir können dieses Problem reparieren indem wir schreiben

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0}\,\delta^{(3)}(\vec{r}). \tag{1.44}$$

Die Funktion $\delta^{(3)}(\vec{r})$ heißt *Dirac'sche Funktion* oder, genauer zu sagen, ein Produkt von drei Dirac'sche Funktionen $\delta^{(3)}(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$.

Eine Dirac'sche Funktion (oder Delta-Funktion) hat folgende Eigenschaften. Erstens,

$$\delta(x) = 0, \tag{1.45}$$

für alle $x \neq 0$. Zweitens, falls wir die Delta-Funktion integrieren, erhalten wir

$$\int_{-\epsilon_1}^{\epsilon_2} \mathrm{d}x\,\delta(x) = 1, \tag{1.46}$$

für alle $\epsilon_{1,2} \neq 0$. Das bedeutet auch, dass folgende Gleichung gilt

$$\int_{-\epsilon_1}^{\epsilon_2} \mathrm{d}x\,\delta(x)\,f(x) = f(0). \tag{1.47}$$

Für die drei-dimensionale Delta-Funktion $\delta^{(3)}(\vec{r})$ erhalten wir

$$\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\vec{r}\, \delta^{(3)}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\ \delta(x)\delta(y)\delta(z) = 1, \tag{1.48}$$

natürlich nur wenn $\vec{r} = 0$ im Integrationsgebiet liegt.

Es ist jetzt einfach zu sehen, dass

$$\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3\vec{r}\ \ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0}, \tag{1.49}$$

und das ist genau, was wir für den Gauss'schen Satz brauchen.

Wir können ein Paar Bemerkungen dazu machen.

1. Für eine Punktladung am Ort $\vec{r} = \vec{a}$, gilt

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{a})}{|\vec{r} - \vec{a}|^3}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{a}). \tag{1.50}$$

2. Für N-Ladungen an Orten $\vec{r}_i$ finden wir

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \sum_i^N \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i). \end{aligned} \tag{1.51}$$

3. Für eine kontinuerliche Ladungsdichte erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \vec{\nabla}_r \cdot \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\, \frac{\rho(\vec{r}_1)\ (\vec{r} - \vec{r}_1)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1|^3} = \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\, \frac{\rho(\vec{r}_1)}{\epsilon_0}\ \vec{\nabla}_r \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \\ &= \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\, \frac{\rho(\vec{r}_1)}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}. \end{aligned} \tag{1.52}$$

Die Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot E = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}, \tag{1.53}$$

ist eine von vier Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik, welche die Theorie des elektrischen Feldes und des magnetischen Feldes vollständig beschreiben.

4. Die Gl. (1.53) können wir benutzen um den Gauss'schen Satz für Elektrostatik umzuschreiben. Wir berechnen

$$\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3\vec{r}\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3\vec{r}\ \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\mathcal{V}}}{\epsilon_0}, \tag{1.54}$$

wobei $Q_{\mathcal{V}}$ die gesamte Ladung in dem Volumen $\mathcal{V}$ ist. Die Gl. (1.40) können wir dann so schreiben

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{E} = \frac{Q_{\mathcal{V}}}{\epsilon_0}. \tag{1.55}$$

Gl. (1.55) kann benutzt werden um elektrisches Feld zu berechnen. Natürlich sollen wir aufpassen, weil in Gl. (1.55) das Integral des Felds und nicht das Feld selbst steht. Das bedeutet, dass wir Gl. (1.55) für die Berechnung von $\vec{E}$ benutzen können nur falls wir einen Ansatz für das Feld $\vec{E}$ machen. Um solchen Ansatz zu machen, sollen wir die Symmetrien des Problems benutzen um zu argumentieren, dass das elektrische Feld $\vec{E}$ nur von wenigen Variablen abhängt. Im allgemeinen Fall, ist Gl. (1.55) für die Berechnung des elektrischen Feld nutzlos.

Als Beispiel betrachten wir eine unendliche Fläche mit der Flächenladungsdichte σ. Die Fläche befindet sich in $x-y$ Ebene. Weil die Fläche unendlich ist, kann elektrisches Feld nur in z-Richtung zeigen; dann

$$\vec{E} = \pm f(|z|)\vec{e}_z, \tag{1.56}$$

für $z>0$ und $z<0$. Als Volumen nehmen wir eine Box. Die Flächenladungsdichte sollen wir so schreiben

$$\rho(x,y,z) = \sigma\delta(z). \tag{1.57}$$

Dann erhalten wir

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{E} = 2f(|z|)A = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}z\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\sigma\delta(z) = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}, \tag{1.58}$$

wobei A die Fläche der Seite der Box in $x-y$ Ebene ist. Es folgt, dass $f(|z|) = \sigma/(2\epsilon_0)$ ist, sodass

$$\vec{E} = \pm\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z. \tag{1.59}$$

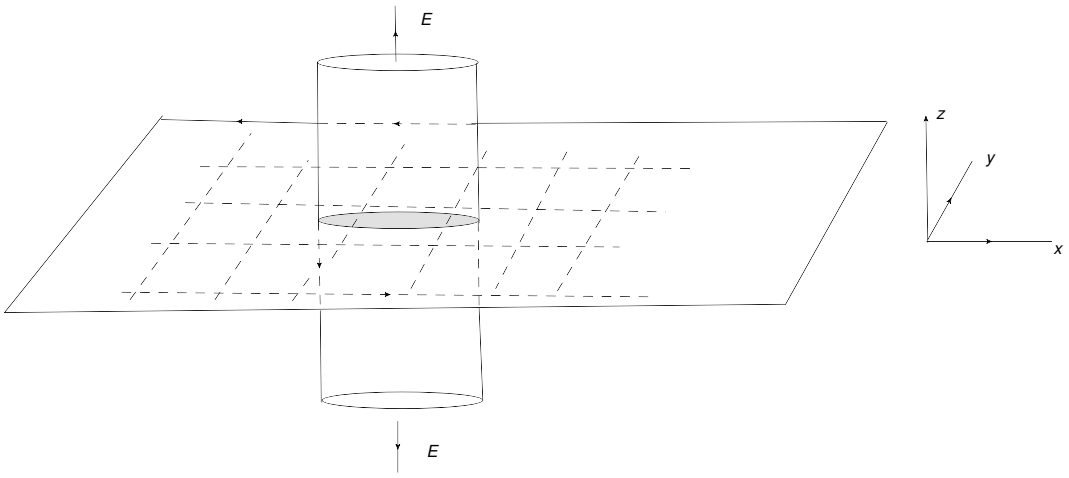

Abbildung 4: Die Berechnung des elektrisches Feld einer unendlicher geladener Fläche mit Hilfe von Gauss'schem Satz.

Positives Vorzeichen gilt für $z > 0$ und negatives für $z < 0$.

Als anderes Beispiel betrachten wir sehr dünnen unendlich langen Draht mit linearer Ladungsdichte λ. Der Draht ist entlang der z-Achse ausgerichtet. Falls wir zylindrische Koordinaten nutzen um dieses Problem zu beschreiben, können wir sagen, dass das elektrische Feld nur radial ausgerichtet sein kann,

$$\vec{E} = f(\rho)\vec{e}_\rho. \tag{1.60}$$

Als Volumen ist es günstig einen Zylinder mit dem Radius ρ und der Länge h auszuwählen. Dann[2]

$$Q_\mathcal{V} = \lambda h, \tag{1.61}$$

und

$$\int \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{E} = f(\rho) 2\pi\rho h. \tag{1.62}$$

Dann,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}. \tag{1.63}$$

[2]Der Vollständigkeit halber notieren wir, dass die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ als $\rho(\vec{r}) = \lambda\delta(x)\delta(y)$ geschrieben werden kann.

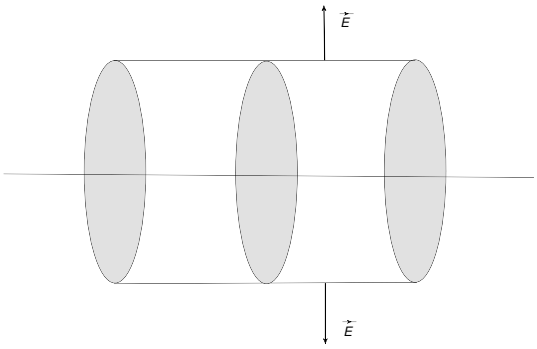

Abbildung 5: Die Berechnung des elektrisches Feld eines unendlich langes Drachts mit gegebener Ladungsdichte.

Es gibt eine andere Möglichkeit den Differenzialoperator $\vec{\nabla}$ an Vektoren anzuwenden. Wie haben voher Divergenz diskutiert und haben gesagt, dass Divergenz ein Skalarprodukt zwischen $\vec{\nabla}$ und einen anderen Vektor beschreibt. Ähnliche Konstruktion können wir für *Kreuzprodukt* machen. In diesem Fall berechnen wir ein Kreuzprodukt von $\vec{\nabla}$ und einen Vektor und bezeichnen dieses Produkt als *Rotation* eines Vektors. Dann,

$$\textbf{rot}\ \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}. \tag{1.64}$$

Die Rotation eines Vektors ist auch ein Vektor.

Wir berechnen die Rotation des elektrischen Feldes. Mit Hilfe von Levi-Civita Tensor schreiben wir das Kreuzprodukt wie folgt

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{e}_i \left[\vec{\nabla} \times \vec{E}\right]_i = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j E_k \\ &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_j} \int \mathrm{d}^3 \vec{r}_1 \, \frac{\rho(r_1)}{4\pi\epsilon_0} \, \frac{(\vec{r}_k - \vec{r}_{1k})}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \\ &= \vec{e}_i \int \mathrm{d}^3 \vec{r}_1 \, \frac{\rho(r_1)}{4\pi\epsilon_0} \, \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_j} \frac{(\vec{r}_k - \vec{r}_{1k})}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} = 0.\end{aligned} \tag{1.65}$$

Der letzte Schritt folgt aus

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_j} \frac{(\vec{r}_k - \vec{r}_{1k})}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} = \epsilon_{ijk} \left[\frac{\delta_{jk}}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} - 3\frac{(\vec{r}_k - \vec{r}_{1k})(\vec{r}_j - \vec{r}_{1j})}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^5}\right] = 0, \tag{1.66}$$

weil der Levi-Civita Tensor absolut antisymmetrisch ist. Wir kommen dann zum richtigen Schluss, dass die Rotation eines statischen elektrischen Feldes eine Null ist,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \tag{1.67}$$

2 Das elektrische Potential

Betrachten wir eine Ladungsverteilung welche das elektrische Feld $\vec{E}$ erzeugt, und eine Testladung Q. Die Kraft an Q lautet

$$\vec{F}_Q(\vec{r}) = Q\vec{E}(\vec{r}). \tag{2.1}$$

Wir können versuchen die Testladung von Punkt $\vec{r}_1$ zum Punkt $\vec{r}_2$ zu bewegen. Die Arbeit, die wir gegen dem Feld leisten sollen, lautet

$$W(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}_Q(\vec{r}). \tag{2.2}$$

Das obige Integral ist ein Integral enlang einer Bahn welche $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ verbindet. Der Integrand besteht aus dem Skalarprodukt zwischen der Verschiebung $\mathrm{d}\vec{r}$ entlang der Bahn und der Kraft $\vec{F}_Q$.

Wir können, ähnlich wie im Fall des elektrischen Felds, die Abhängigkeit von Q eliminieren. Wir definieren dann

$$\tilde{W}(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = \frac{W(\vec{r}_2, \vec{r}_1)}{Q} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}). \tag{2.3}$$

Obwohl $\tilde{W}(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$ Q-unabhängig ist, kann diese Größe im Prinzip von dem Weg von $\vec{r}_1$ zum $\vec{r}_2$ abhängig sein. Wir können aber beweisen, dass das nicht der Fall ist. Dafür brauchen wir einen mathematischen Satz, welcher ähnlich zum Gauss'schen Satz ist, aber für Flächen- statt Volumen-Integrale gilt. Der Satz lautet[3]

$$\int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \mathbf{rot}\ \vec{E} = \oint_{\partial S} \mathrm{d}\vec{l} \cdot\ \vec{E}. \tag{2.4}$$

Auf der linken Seite integrieren wir über zwei-dimensionale Oberfläche S; auf der rechten Seite integrieren wir über die geschlossene Grenze (d.h. eindimensionale Linie oder Linien) von S.

Gl. (2.4) gilt für beliebiges Vektorfeld. Falls wir diese Gleichung zur Beschreibung des elektrische Feld verwenden, erhalten wir

$$\oint_{\partial S} \mathrm{d}l\ \vec{E} = 0, \tag{2.5}$$

[3]Dieser Satz ist als Stoke'scher Satz bekannt.

für alle geschlossene Bahne, weil **rot** $\vec{E} = 0$.

Ein Integral über geschlossene Grenze können wir als eine Differenz von Integralen über unterschiedliche Wege von einem Punkt zu anderem Punkt interpretieren. Laut Gl. (2.5) ist diese Summe eine Null. Das bedeutet, dass das Integral

$$\tilde{W}(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}), \tag{2.6}$$

weg-unabhängig ist. Das heißt auch, dass

$$\tilde{W}(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1), \tag{2.7}$$

Die Funktion $\varphi(\vec{r})$ heißt *das Potential* des elektrischen Felds.

Die Funktion $\varphi(\vec{r})$ können wir berechnen, indem wir φ an einem Ort (z.B. $\vec{r}_0$) festlegen. Dann gilt für alle anderen Orte

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{E}. \tag{2.8}$$

Es ist üblich Unendlich für $\vec{r}_0$ zu wählen und $\varphi(\vec{r}_0)$ dort gleich Null zu setzen. Dann

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{E}. \tag{2.9}$$

Wir können Gl. (2.8) benutzen um die Ableitung von φ mit $\vec{E}$ zu verbinden. Betrachten wir φ an zwei Orten, die in der Nähe zueinander liegen. Dann gilt

$$\varphi(\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{E}. \tag{2.10}$$

Wir entwickeln beide Seiten dieser Gleichung in $\mathrm{d}\vec{r}$ und erhalten

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi. \tag{2.11}$$

Diese Formel veranschaulicht, dass die Rotation des elektrischen Felds $\vec{E}$ eine Null ist. Um das zu sehen, schreiben wir

$$\textbf{rot}\ \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = \vec{e}_i \epsilon_{ijk}\ \partial_j \partial_k\ \varphi = 0. \tag{2.12}$$

Der letzte Schritt folgt, weil ϵ_{ijk} voll antisymmetrisch und $\partial_j\partial_k$ voll symmetrisch ist. Falls wir solche zwei Tensoren kontrahieren, bekommen wir eine Null, z.B.

$$\epsilon_{xyz}\partial_x\partial_y\varphi + \epsilon_{xzy}\partial_z\partial_y\varphi = \epsilon_{xyz}(\partial_x\partial_y - \partial_y\partial_x)\varphi = 0, \tag{2.13}$$

weil $\partial_x\partial_y\varphi = \partial_y\partial_x\varphi$ gilt.

Um das Potential einer Punktladung zu bestimmen, betrachten wir die Gl. (2.11) und schreiben

$$-\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r. \tag{2.14}$$

Der Gradient-Operator in sphärischen Koordinaten sieht so aus

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r\partial_r + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi. \tag{2.15}$$

Weil die rechte Seite der Gl. (2.14) nur radiale Komponenten hat, können wir das Potential als Funktion von dem Betrag des Vektors $\vec{r}$ betrachten. Aus Gl. (2.14) folgt

$$\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = \partial_r\varphi(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \tag{2.16}$$

sodass

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \varphi_0, \tag{2.17}$$

wobei φ_0 eine Konstante ist. Falls wir $\varphi(r)$ auf Null bei $r = \infty$ setzen, ist $\varphi_0 = 0$. Schließlich erhalten wir das elektrische Potential einer Punktladung, welche sich bei $\vec{r} = 0$ befindet. Das Potential lautet

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \tag{2.18}$$

Falls eine Ladung sich bei $\vec{r}_0$ befindet, schreiben wir

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{2.19}$$

Für eine Menge von Ladungen mit Koordinaten $\vec{r}_i$ und Ladungen q_i, schreiben wir

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \tag{2.20}$$

Für eine kontinuerliche Ladungsverteilung gilt

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{r}_1 \rho(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \tag{2.21}$$

Wir werden jetzt ein Paar Beispiele diskutieren um zu sehen wie wir Gl. (2.21) benutzen können um Potentiale zu berechnen. Betrachten wir zuerst einen Kugel mit Radius R und einer konstanten Ladungsdichte ρ. Wir wollen das Potential an einem Ort mit Koordinate $\vec{r}$ berechnen. Es gibt zwei Möglichkeiten, $r < R$ und $r > R$; diese Möglichkeiten sollen wir separat betrachten.

Wir fangen an mit der Ladungsverteilung; die schreiben wir als

$$\rho(\vec{r}) = \rho\theta(R - r), \tag{2.22}$$

wobei $\theta(x)$ Heaviside-Funktion heißt. Sie ist so definiert

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{2.23}$$

Das Potential ist dann

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \frac{\theta(R - r)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \\ &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_0^R \mathrm{d}r_1 \; r_1^2 \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\theta \; \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\theta}}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

wobei θ der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{r}_1$ ist und wir haben über den azimuthalen Winkel integriert. Das Integral über θ ist elementar. Wir erhalten

$$\int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\theta \; \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\theta}} = \frac{1}{rr_1}\left(|r + r_1| - |r - r_1|\right) = \begin{cases} \frac{2}{r}, & r > r_1 \\ \frac{2}{r_1}, & r < r_1 \end{cases} \tag{2.25}$$

Es folgt

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_0^R \mathrm{d}r_1 \; r_1^2 \left[\frac{1}{r}\theta(r - r_1) + \frac{1}{r_1}\theta(r_1 - r)\right]. \tag{2.26}$$

Wir betrachten den Fall $r > R$, sodass wir das Potential außerhalb der Kugel berechnen. Dann ist $\theta(r_1 - r) = 0$ weil $r_1 < R$ ist. Wir erhalten dann

$$\varphi(r)|_{r>R} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} = \frac{4\pi R^3 \rho}{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \tag{2.27}$$

wobei Q die gesamte Ladung der Kugel ist.

Für $r < R$ sollen wir ein bisschen mehr machen weil beide Terme in Gl. (2.26) zum Integral beitragen. Wir schreiben dann

$$\begin{aligned} \varphi(r)|_{r<R} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int_0^r \mathrm{d}r_1 r_1^2 + \int_r^R \mathrm{d}r_1 r_1 \right] \\ &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \left[\frac{r^3}{3r} + \frac{1}{2}(R^2 - r^2) \right] = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left[1 - \frac{r^2}{3R^2} \right]. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Wir vergleichen die Potentiale für $r < R$ und $r > R$ und merken, dass an $r = R$ das Potential stetig ist.

Es ist auch möglich eine Differentialgleichung für das Potential $\varphi(\vec{r})$ zu schreiben. Wir benutzen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{2.29}$$

zusammen mit Gl. (2.11) um die sogenannte *Poisson Gleichung*[4] zu schreiben

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{2.30}$$

Der Operator $\vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ heißt *Laplace*-Operator. In Kartesischen Koordinaten können wir schreiben

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \sum_i \partial_i^2. \tag{2.31}$$

Wir können fragen warum wir die Poisson Gleichungen überhaupt brauchen wenn wir schon die Lösung in einer Integralform haben, Gl. (2.21). Die Antwort zu diese Frage ist folgende – wir werden sehen, dass es Situationen gibt wo wir die Ladungsdichte nicht gegeben bekommen, sondern als Response von

[4] Für $\rho = 0$ heißt diese Gleichung *Laplace Gleichung*.

Materialen zum elektrischen Feld finden sollen. Dann muss man beide ρ und φ oder $\vec{E}$ simultan finden und für diesen Zweck ist die Differentialgleichung besser als die Integraldarstellung geeinigt.

Um eine Differentialgleichung zu lösen brauchen wir die Randbedingungen. Für eine kontinuerliche Ladungsverteilung im begrenztem Raumgebiet haben wir zwei Bedingungen: 1) das Potential φ und seine Ableitung sollen für alle $\vec{r}$ stetig sein und 2) $\varphi(\vec{r}) \to 0$ bei $|\vec{r}| \to \infty$. Es gibt aber Situationen wo die Ableitung des Potentials nicht stetig ist; das passiert falls es Flächenladungen gibt.

Um das zu sehen betrachten wir noch einmal die unendliche dünne Platte mit gleichformiger Flächenladung σ. Die Platte befindet sich in der $x - y$ Ebene bei $z = 0$. Die Flächenladung lautet

$$\rho = \sigma\delta(z). \tag{2.32}$$

Weil alle Punkte in $x - y$ Ebene äquivalent sind, kann das Potential nur von z abhängen. Die Poisson Gleichung sieht dann so aus

$$\nabla^2\varphi = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{\sigma}{\epsilon}\delta(z). \tag{2.33}$$

Wir können beide Seiten diese Gleichung über z integrieren. Als Integrationsintervall nehmen wir $-\delta < z < \delta$, wobei δ positiv und infinitesimal ist. Dann erhalten wir

$$\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\right|_{z=\delta} - \left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\right|_{z=-\delta} = -\frac{\sigma}{\epsilon}. \tag{2.34}$$

Weil die Ableitung von φ proportional zum elektrischen Feld ist, bedeutet die obige Gleichung, dass das elektrische Feld von Flächenladungen *nicht* stetig ist.

Wir gehen jetzt zurück zur Gl. (2.33) und betrachten sie für $z \neq 0$. Dann ist die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi(z)}{\mathrm{d}z^2} = 0, \tag{2.35}$$

und die Lösung lautet

$$\varphi(z) = a_\pm z + b_\pm, \tag{2.36}$$

für $z > 0$ bzw. $z < 0$. Die Stetigkeit des Potentials bei $z = 0$ bedeutet, dass $b_+ = b_-$ ist und wir können $b_+ = b_- = 0$ auswählen.[5] Aus Gl. (2.34) finden wir

$$a_+ - a_- = -\frac{\sigma}{\epsilon}. \tag{2.37}$$

Weil $z > 0$ und $z < 0$ äquivalent sind, sollen wir

$$a_+ = -a_-, \tag{2.38}$$

nehmen. Dann finden wir

$$\varphi(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z\theta(z) + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z\theta(-z). \tag{2.39}$$

Die Berechnung des elektrischen Felds ist dann sehr einfach. Wir erhalten das Ergebnis welches wir in Vorlesung 1 bereits schon gesehen haben, Gl. (1.59).

Im allgemeinen Fall, gibt es ähnliche Situationen – falls es Flächenladungen gibt, sind elektrische Felder unstetig. Um die entsprechende Randbedingungen zu berechnen, merken wir, dass es immer möglich ist jede Fläche lokal als eine Ebene zu betrachten. Wir zerlegen elektrisches Feld in zwei Vektoren

$$\vec{E} = E_\perp \vec{n} + \vec{E}_{II}, \tag{2.40}$$

wobei $\vec{n}$ orthogonal zur Ebene ist (Normalvektor) und $\vec{E}_{II}$ in der Ebene liegt. Wir bezeichen das Gebiet über die Ebene als Gebiet 1 und das Gebiet unter die Ebene als Gebiet 2. Die Randbedingungen sind dann

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_1 - \vec{n} \cdot \vec{E}_2 = -\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\varphi_1 + \vec{n} \cdot \vec{\nabla}\varphi_2 = E_{\perp,1} - E_{\perp,2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \vec{E}_{||,1} - \vec{E}_{||,2} = 0, \tag{2.41}$$

wobei $\vec{E}_i$ das elektrische Feld im Gebiet i ist.

Die erste Gleichung ist das Gauss'sche Gesetz, die zweite folgt aus

$$\oint\limits_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int\limits_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \mathbf{rot}\, \vec{E} = 0, \tag{2.42}$$

wenn die Integrationsbahn geschickt ausgewählt ist.

Wir wollen jetzt diese Randbedingungen benutzen um folgendes Problem zu diskutieren. Wir betrachten eine Sphäre mit Radius R und gleichformiger

[5] Wir können immer das Potential an einem Punkt frei wählen.

Flächenladung σ, und wollen das elektrische Feld außerhalb und innerhalb der Sphäre bestimmen. Außerhalb der Sphäre können wir das Gauss'sche Gesetz verwenden. Dann

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r, \tag{2.43}$$

wobei $Q = 4\pi R^2\sigma$ ist. Bei $r = R$ gilt

$$E_{\perp,1} - E_{\perp,2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad E_{\perp,1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \tag{2.44}$$

Es folgt

$$E_{\perp,2} = 0. \tag{2.45}$$

Dann, weil $\vec{E}_{||} = 0$, finden wir dass

$$\vec{E}_2 = 0, \tag{2.46}$$

bei $|\vec{r}| = R$ aber innerhalb der Sphäre. Weil es keine Ladungen innerhalb der Sphäre gibt, bedeutet das, dass $\vec{E}$ für alle Ortsvektoren $\vec{r}$ mit $r < R$ eine Null ist.

Es gibt eine enge Verbindung zwischen der *Energie der Testladung und dem Potential*. Um diesen Zusammenhang festzustellen, merken wir, dass wir das Potential eingeführt haben, indem wir die Arbeit, welche wir leisten sollen um die Ladung von Punkt $\vec{r}_1$ nach Punkt $\vec{r}_2$ zu bewegen, analysiert haben. Die Arbeit ist natürlich mit der Änderung der Energie verbunden; wir können sagen, dass wir durch diese Änderung der Lage der Ladung die Energie der Ladung ändern. Dann schreiben wir

$$U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1) = -Q\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = Q(\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)), \tag{2.47}$$

und identifizieren die Energie mit dem Produkt der Ladung und dem Potential

$$U(\vec{r}) = Q\varphi(\vec{r}). \tag{2.48}$$

Das ist die potentielle Energie der Testladung Q im externen elektrischen Feld, welches wir mit dem Potential $\varphi(\vec{r})$ beschreiben. Das ist auch die Arbeit welche benötigt wird um die Testladung Q von $r = \infty$ nach $\vec{r}$ zu bringen

vorausgesetzt, dass die Ladungsverteilung fix gehalten ist und dass $\phi(r=\infty)$ eine Null ist.

Es ist interessant zu fragen wie viel Energie in einer Ladungsverteilung gespeichert ist. Um diese Frage zu beantworten, stellen wir uns vor wie wir eine solche Verteilung zusammenstellen können.

Wir fangen an mit allen Ladungen bei $\vec{r}_\infty = \infty$. Dann fangen wir an eine Ladung nach der anderen in Position zu bringen. Um die erste Ladung q_1 von $\vec{r}_\infty = \infty$ zum $\vec{r} = \vec{r}_1$ zu bringen, brauchen wir keine Arbeit zu verrichten, weil es kein elektrisches Feld gibt. Danach bringen wir die Ladung q_2 aus $\vec{r}_\infty = \infty$ zu $\vec{r} = \vec{r}_2$. Gl. (2.48) zur Folge, brauchen wir dafür die Arbeit

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}. \tag{2.49}$$

Für $q_1 q_2 > 0$ ist die Energie positiv (wir sollen arbeiten) weil für $q_1 q_2 < 0$ ist die Energie negativ (es läuft von selbst).

Falls wir die Ladung q_3 von $\vec{r}_\infty = \infty$ bringen, sollen wir gegen die Felder der Ladungen q_1 und q_2 arbeiten. Dann

$$U_{123} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|}. \tag{2.50}$$

Das Ergebnis für den allgemeinen Fall ist klar. Die Energie, die wir brauchen, um N Ladungen zusammenzustellen ist

$$U = \sum_{i>j}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i\neq j}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \tag{2.51}$$

Der Koeffizient $1/2$ in der letzten Gleichung brauchen wir weil jedes (i, j) Paar zweimal in der letzten Formel erscheint.

Wir wollen ähnliche Formeln für kontinuerliche Ladungsverteilung herleiten. Wir schreiben

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sum_{i\neq j}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi(\vec{r}_i) \\ &= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \; \rho(\vec{r}_1)\varphi(\vec{r}_1) = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \; \rho(\vec{r}_1) \; \int \mathrm{d}\vec{r}_2 \frac{\rho(\vec{r}_2)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \end{aligned} \tag{2.52}$$

Wir können die obige Gleichung so umschreiben, dass wir elektrische Felder statt Ladungsverteilungen in der Formel haben. Um das zu machen, benutzen wir die Gleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ und schreiben

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\, \rho(\vec{r})\, \varphi(\vec{r}) &= \epsilon_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}\ (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}))\varphi(\vec{r}) \\ &= \epsilon_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}\ \left[\vec{\nabla}\left(\vec{E}(r)\varphi(r)\right) - \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right] \qquad (2.53) \\ &= \epsilon_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}\ \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}),\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt den Term

$$\int \mathrm{d}^3\vec{r}\ \vec{\nabla}\left(\vec{E}(r)\varphi(r)\right) = \int\limits_{r\to\infty} \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{E}\, \varphi \qquad (2.54)$$

vernachläßigt haben weil $\varphi(r = \infty)$ eine Null ist. Gl. (2.53) zufolge lässt sich die Energie der beliebigen Ladungsverteilung so ausdrücken

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\ \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}). \qquad (2.55)$$

Es ist zu merken, dass Gl. (2.55) und Gl. (2.51) nicht ganz kompatibel sind. Aus Gl. (2.51) folgt, dass die Energie entweder positiv oder negativ sein kann. Allerdings folgt aus Gl. (2.55), dass die Energie positiv ist. Um den Ursprung dieses Unterschieds zu verstehen, betrachten wir die einzige Ladung, welche sich bei $\vec{r} = 0$ befindet. Gl. (2.51) zur Folge, ist die Energie in diesem Fall eine Null. Allerdings, Gl. (2.55) zur Folge, sollen wir das Skalarprodukt des elektrischen Felds $\vec{E} = q/(4\pi\epsilon_0 r^2)\vec{e}_r$ mit sich selbst berechnen und dann integrieren. Dieser Term entspricht den Betrag von $i = j$ in der Summe in Gl. (2.51). Wir haben solche Beiträge aus Gl. (2.51) ausgeschlossen aber später implizit hereingebracht wann wir zu kontinuerliche Ladungsdichte übergegangen sind.

Für kontinuerliche Ladungsverteilungen spielt dieser Unterschied keine Rolle aber für Punkladungen ist der Unterschied sehr wichtig. Physikalisch, der Grund für der Unterschied zwischen Gl. (2.55) und Gl. (2.51) ist dass Gl. (2.55) die Energie enthält, welche gebraucht wird *um die Punktladungen zusammenzustellen!*

Wir berechnen diese Energie explizit und erhalten dass sie *unendlich gross ist*,

$$U_{\text{punkt}} = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathrm{d}^3\vec{r}\, \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 r^4} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \infty! \tag{2.56}$$

Eine Möglichkeit dieses Ergebniss zu interpetieren ist zu sagen dass dass Punktladungen in der Natur nicht existieren kann. Falls wir diesen Standpunkt warnehmen, können wir den Radius des Elektrons abschatzen. Gl. (2.56) zufolge, falls das Elektron einen Radius r_0 hat, brauchen wir folgende Energie

$$U_{\text{punkt}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r_0}, \tag{2.57}$$

um den zusammenzustellen. Dank Einstein'sche Gleichung $E = mc^2$, können wir diese Energie mit der Ruhemasse des Elektrons identifizieren. Dann

$$m_e c^2 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r_0}, \tag{2.58}$$

sodass

$$r_0 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 m_e c^2}. \tag{2.59}$$

Wir benutzen jetzt die numerischen Werte für die Masse des Elektrons (9.1×10^{-31} Kg) und der Lichtgeschwindigkeit ($c = 299\ 000\ 000\ m/sek$) und erhalten dann den Radius des Elektrons

$$r_0 = 1.4 \times 10^{-15} \text{ Meter}. \tag{2.60}$$

Nach heutige Vorstellungen, ist das Elektron punktartig. Der Radius des Elektrons, welcher wir berechnet haben, gibt uns eine Distanzskala unter welche die Gesetze klassischer Elektrodynamik nicht gelten und die neue Theorie, die sogennante Quantum Elektrodynamik, benötigt ist um die Natur für Abstände $r < r_0$ zu beschreiben.

3 Leiter

In dieser Vorlesung reden wir über Materialien in elektrischem Feld. Es gibt zwei Arten von Materialen – Leiter und Isolatoren. In einem Leiter können sich Ladungen (meistens Elektronen) frei bewegen; in einem Isolator nicht. Dementsprechend kann der Strom durch einen Leiter fließen aber in Isolatoren passiert das nicht.

In dieser Vorlesung reden wir über *Leiter*. Allerdings, weil wir Elektrostatik diskutieren, betrachten wir Situationen wo kein Strom fließt. Aus dieser Bemerkung können wir folgende Schlußfolgerungen ziehen:

1. in statischer Situation ist elektrisches Feld innerhalb eines Leiters eine Null, $\vec{E} = 0$;

2. die Ladungen sollen sich an der Oberfläche des Leiters befinden. Diese Ladungen können dann durch externes Feld induziert sein. Im Inneren des Leiters ist die Ladungsdichte eine Null, $\rho = 0$. Das folgt aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$.

3. Ein Leiter ist eine Äquipotentialfläche. Um das zu sehen nehmen wir zwei Punkte eines Leiters und schreiben

$$\varphi(\vec{r}_a) - \varphi(\vec{r}_b) = -\int_{\vec{r}_b}^{\vec{r}_a} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}). \tag{3.1}$$

   Zwei Punkte eines Leiters können wir immer mit einer Bahn verbinden, welche innerhalb des Leiters liegt. Weil innerhalb des Leiters $\vec{E} = 0$ ist, finden wir $\varphi(\vec{r}_a) = \varphi(\vec{r}_b)$.

4. Direkt *außerhalb* des Leiters ist $\vec{E}$ orthogonal zur Oberfläche. Um das zu verstehen, merken wir, dass die Komponente des elektrischen Felds, welches in der Oberflache liegt, kontinuerlich sein soll. Innerhalb des Leiters ist $\vec{E} = 0$, sodass $\vec{E}_{||} = 0$.

Wir diskutieren jetzt was passiert, falls wir einen Leiter in elektrisches Feld platzieren. Dann sollen sich die Ladungen in dem Leiter bewegen um elektrisches Feld zu kompensieren. Diese Bewegung führt dazu, dass auf der Oberfläche des Leiters die Ladungsverteilung induziert ist.

Das hat interessante Folgen. Eine von denen ist die anziehende Kraft zwischen einem ungeladenen Leiter und einer Ladung, welche sich außerhalb des Leiters befindet. Der Grund dafür ist die induzierte Ladung. Angenommen, es gibt eine positive Ladung außerhalb des Leiters. Das elektrische Feld innerhalb des Leiters müss induzierte Ladungen komplett kompensieren. Das bedeutet, dass negative Ladungen sich näher an der Punktladung aufhalten sollen als positive Ladungen; diese Ladungsverteilung bedeutet, dass es eine *anziehende* Kraft zwischen dem Leiter und der Ladung gibt.

Es ist interessant zu verstehen wie sich induzierte Ladungen an der Oberfläche des Leiters verteilen. Bevor wir über den allgemeinen Fall reden, betrachten wir folgendes Beispiel. Es gibt eine leitende Kugel mit Radius a und einem sphärischen Hohlraum mit Radius b. Das Zentrum des Hohlraums und das Zentrum der Kügel liegen bei $\vec{r} = 0$. Im Zentrum der Kugel befindet sich eine Punktladung q. Wir wollen elektrische Potentiale finden.

Dieses Problem hat (offensichtlich) eine sphärische Symmetrie. Das bedeutet, dass außerhalb der Kugels wir den Gauss'schen Satz benutzen können um elektrisches Feld und Potential zu beschreiben. Wir erhalten

$$\vec{E}(\vec{r})|_{r>a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r, \quad \varphi(r)|_{r>a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \tag{3.2}$$

Für $b < r < a$, sollen wir $\vec{E} = 0$ haben. Das ist natürlich nur möglich, falls es eine Oberflächenladung bei $r = a$ gibt. Diese Oberflächenladung berechnen wir mit Hilfe von Randbedingungen, Gl. (2.41) in Vorlesung 2. Wir erhalten

$$|\vec{E}(\vec{r})|_{r\to a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{\sigma_a}{\epsilon_0}, \tag{3.3}$$

sodass

$$\sigma_a = \frac{q}{4\pi a^2}. \tag{3.4}$$

Wir können das elektrische Feld im Hohlraum mit Hilfe vom Gauss'schen Satz berechnen. In diesem Fall sollen wir die Punktladung bei $\vec{r} = 0$ berücksichtigen. Wir erhalten

$$\vec{E}(\vec{r})|_{r<b} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r, \quad \varphi(r)|_{r<b} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \varphi_0, \tag{3.5}$$

wobei φ_0 eine Konstante ist. Die Berechnung der Oberflächenladung bei $r = b$ ist identisch zur obigen Diskussion. Wir erhalten

$$\sigma_b = -\frac{q}{4\pi b^2}. \tag{3.6}$$

Weil alle Punkten des Leiters identisches elektrische Potential haben sollen, finden wir ϕ_0 beim Vergleichen $\varphi(r = b)$ und $\varphi(r = a)$. Wir erhalten

$$\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right), \tag{3.7}$$

sodass

$$\varphi(r)|_{b<r<a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}. \tag{3.8}$$

Mit Hilfe dieser Berechnung können wir erfahren wie die Felder induzierter Ladungen sich in einem Leiter kompensieren. In unserem Problem haben wir drei Ladungen: i) die Punktladung bei $\vec{r} = 0$, ii) die Ladungsdichte bei $r = b$ und iii) die Ladungsdichte bei $r = a$. Das elektrische Feld beim Punkt $\vec{r}$ ist eine Summe der elektrischen Felder dieser Ladungen.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_q(\vec{r}) + \vec{E}_a(\vec{r}) + \vec{E}_b(\vec{r}). \tag{3.9}$$

Für $b < r < a$, gilt

$$\vec{E}_a = 0, \quad \vec{E}_q + \vec{E}_b = 0, \tag{3.10}$$

sodass zwei Felder sich kompensieren. Für $|r| > a$ bleibt $\vec{E}_q + \vec{E}_b = 0$ gültig. D.h., dasa in diesem Problem die Ladung in einem Hohlraum komplett abgeschirmt ist.

Wir können jetzt Fragen, ob sich etwas an diesen Überlegungen ändert, falls wir einen beliebigen (d.h. nicht sphärischen) Hohlraum in einer Kugel haben. Das Symmetrieargument fällt natürlich weg und wir sollten anders argumentieren. Stellen wir uns vor, dass wir einen unendlich großen Leiter mit einem Hohlraum haben. Für einen Punkt in dem Leiter schreiben wir das gesamte elektrische Feld

$$0 = \vec{E}_q + \vec{E}_{\text{in}} + \vec{E}_{\text{aus}}, \tag{3.11}$$

wobei $\vec{E}_q$ das Feld der Punktladung, $\vec{E}_{\text{in}}$ das Feld der induzierten Ladung an der Oberfläche des Hohlraums und $\vec{E}_{\text{aus}}$ das Feld an der externen Oberfläche des Leiters ist. Weil der Leiter sehr groß (unendlich groß) ist, muss $\vec{E}_{\text{aus}} = 0$ sein. Das bedeutet dann, dass

$$0 = \vec{E}_q(\vec{r}) + \vec{E}_{\text{in}}(\vec{r}) \tag{3.12}$$

für *beliebige* Hohlräume gilt.

Jetzt, statt einem unendlich großen Leiter betrachten wir eine Kugel mit dem gleichen Hohlraum und der gleichen Punktladung wie vorher. Wir können jetzt folgendes machen. Wir nehmen die gleiche Ladungsdichte σ_{in} an der Oberfläche der Kugel wie im obigen Problem. Dann ist die Gl. (3.12) innerhalb der Kugel gültig. Wir sollen jetzt die Ladungsdichte an der Oberfläche der Kugel finden, welche kein elektrisches Feld innerhalb der Kugel erzeugt. Solche Ladungsdichten kennen wir – eine gleichförmige sphärische Ladungsverteilung erzeugt kein elektrisches Feld innerhalb der Kugel. Dann nehmen wir die Ladungsdichte $\sigma = q/(4\pi a^2)$ und erhalten elektrisches Feld außerhalb der Kugel

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r, \tag{3.13}$$

auch für *beliebige Hohlräume*.

Wir diskutieren ein ähnliches Beispiel. Wir nehmmen einen Leiter mit einem beliebigen Hohlraum und platzieren ihn in elektrisches Feld. Wir wollen wissen, ob es elektrisches Feld im Hohlraum gibt. Um diese Frage beantworten zu können, merken wir, dass der Leiter äquipotential sein soll, inklusive an der Oberfläche des Hohlraumes. Es ist offensichtlich, dass, falls $\vec{E} = 0$ innerhalb des Hohlraums ist, diese Bedingung erfüllt ist.[6] Es bleibt zu beweisen, dass es keine *andere* Lösungen gibt; diesen Beweis diskutieren wir in der nächsten Vorlesung.

Wir haben erwähnt, dass es eine Kraft zwischen dem ungeladenen Leiter und den externen Ladungen gibt. Um diese Kraft zu berechnen, stellen wir uns vor, dass die Oberflächenladungsdichte bekannt ist. Wir bezeichnen diese Ladungsdichte mit σ. Die Kraft per Flächeneinheit ist dann

$$\vec{F} = \sigma\vec{E} = \epsilon_0\vec{E}^2\vec{n}, \tag{3.14}$$

wobei $\vec{n}$ der Normal-Vektor zur Oberfläche ist. Für den letzten Schritt haben wir die Randbedingungen in Gl. (2.41) benutzt. Die obige Formel Gl. (3.14) ist *fast richtig aber nur fast*.

[6] Um das zu sehen, merken wir, dass die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten $\vec{r}_a$ und $\vec{r}_b$ als $\Delta\phi = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E}$ geschrieben werden kann. Für alle Punkte an der Oberfläche des Hohlraumes können wir die Bahn zwischen $\vec{r}_a$ und $\vec{r}_b$ so auswählen, dass sie immer in dem Hohlraum liegt.

Der Grund dafür ist, dass das Feld $\vec{E}$ an der Oberfläche eine Summe von dem Feld $\vec{E}_\sigma$, erzeugt von der Ladung σ, und dem Feld $\vec{E}_{\text{an}}$, erzeugt von allen anderen, ist. Um die Kraft an der Ladung σ zu berechnen, sollen wir nur $\vec{E}_{\text{an}}$ nehmen, weil die Wirkung an sich selbst gibt es nicht.

Um $\vec{E}_{\text{an}}$ zu finden, merken wir, dass dieses Feld stetig ist und $\vec{E}_\sigma$ unstetig ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \vec{E}_\sigma + \vec{E}_{\text{an}} &= \vec{E}, \\ -\vec{E}_\sigma + \vec{E}_{\text{an}} &= 0, \end{aligned} \tag{3.15}$$

außerhalb bzw. innerhalb des Leiters. Es folgt

$$\vec{E}_{\text{an}} = \frac{\vec{E}}{2}. \tag{3.16}$$

Das richtige Ergebnis für die Kraft per Flächeneinheit ist dann

$$\vec{F} = \sigma \vec{E}_{\text{an}} = \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} \vec{n}. \tag{3.17}$$

Der Unterschied zur Gl. (3.14) ist ein Faktor zwei.

Es ist möglich Leiter zu benutzen, um die Energie des elektrischen Felds zu speichern. Betrachten wir zwei Leiter. Wir platzieren die Ladung $+Q$ an einem der Leiter und die Ladung $-Q$ an dem anderen. Weil elektrisches Potential an einem Leiter konstant ist, können wir die Potentialdifferenz zwischen den zwei Leitern bestimmen. Diese Differenz bezeichnen wir mit V, sodass

$$V = \varphi_{+Q} - \varphi_{-Q}. \tag{3.18}$$

Die Differenz ist proportional zu der Ladung Q und hängt von der Geometrie der Leiter, von dem Abstand zwischen den Leitern u.s.w. ab. Um das alles zu characterisieren, führen wir eine Größe ein, welche wir *Kapazität* nennen und mit dem Buchstabe C bezeichnen

$$C = \frac{Q}{V}. \tag{3.19}$$

Kapazität zeigt welche Ladung nötig ist um eine bestimmte Potentialdifferenz zu erzeugen. Die Einheit der Kapazität ist *Farad* F. Ein Farad ist ein Coulomb

pro Volt. Weil ein Coulomb eine riesige Ladung ist, liegen alltägliche Werte von Kapazitäten in dem Bereich zwischen 10^{-6} und 10^{-12} Farad.

Als Beispiel berechnen wir die Kapazität eines Plattenkondensators, welcher aus zwei metallischen Platten besteht. Jede Platte hat eine Fläche A. Der Abstand zwischen den Platten ist d. Für die Berechnung des elektrischen Felds betrachten wir diese Platten als unendlich groß, sodass wir die bekannte Formel für das elektrische Feld benutzen können.

Um Felde zu berechnen, benutzen wir das Superpositionsprinzip und addieren die Felder der Platten. Die Ladungsdichte ist $\pm Q/A$. Es folgt, dass es kein elektrisches Feld außerhalb der Platten existiert. Zwischen den Platten ist das Feld

$$\vec{E} = \frac{Q}{A\epsilon_0}\vec{n}. \tag{3.20}$$

Der Vektor $\vec{n}$ ist ein Einheitsvektor ($\vec{n}^2 = 1$), welcher orthogonal zu den Platten ist und zeigt von der Platte mit der Ladung $+Q$ zu der Platte mit der Ladung $-Q$. Die Potentialdifferenz ist dann

$$V = |\vec{E}|d = \frac{Q}{A\epsilon_0}d. \tag{3.21}$$

Die Kapazität Plattenkondensators ist dann

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d}. \tag{3.22}$$

Ähnlich können wir die Kapazität eines sphärischen Kondensators berechnen. Der sphärische Kondensator besteht aus zwei metallischen Sphären; eine mit dem Radius a and die andere mit dem Radius b. Wir nehmen an, dass $b > a$. Die Sphäre mit dem Radius a hat die Ladung $+Q$ und die Sphäre mit dem Radius b hat die Ladung $-Q$. Das elektrische Feld zwischen den zwei Sphären ist

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r. \tag{3.23}$$

Die Potentialdifferenz ist

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b}. \tag{3.24}$$

Die Kapazität folgt

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 ba}{b-a}. \tag{3.25}$$

Falls wir die Kapazität des Kondensators kennen, können wir die Energie des elektrischen Felds berechnen, welche in einem Kondensator gespeichert ist. Um das zu machen, stellen wir uns vor, dass wir die Ladung dQ von dem Leiter mit der Ladung $-Q$ zum Leiter mit der Ladung $+Q$ verschieben. Dann sollen wir folgende Arbeit leisten

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}Q\, V = \mathrm{d}Q \frac{Q}{C}. \tag{3.26}$$

Wir integrieren diese Gleichung und erhalten

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C V^2, \tag{3.27}$$

wobei die letzte Gleichung aus der Definition der Kapazität folgt.

4 Lösungen der Laplace und Poisson Gleichungen

Wir fangen an mit der Diskussion folgendes Problems. Es gibt eine Ladung q am Punkt $\vec{r}_0 = (0, 0, d)$ und eine unendliche Eisenplatte, die sich im Halbraum $z < 0$ befindet (siehe Bild 6). Das Potential der Platte ist auf Null gesetzt. Wir wollen elektrisches Feld bestimmen.

Die Poisson Gleichung für $z > 0$ lautet

$$\vec{\nabla}^2\varphi = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0). \tag{4.1}$$

Für $z < 0$ gibt es kein elektrisches Feld und φ ist identisch mit Null.

Wir sollen jetzt die Lösung der Gl. (4.1) finden, welche mit den Randbedingungen bei $z = 0$ kompatibel ist. Diese Randbedingungen sind $\varphi(z = 0) = 0$ und $E_x(z = 0) = 0$ und $E_y(z = 0) = 0$. Über E_z bei $z = 0$ können wir nur sagen, dass

$$E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \tag{4.2}$$

wobei σ die induzierte Oberlflächenladung ist; diese Ladung kennen wir nicht und sollen sie finden.

Dieses Problem ist kompliziert, aber es gibt einen Trick es zu lösen. Der Trick besteht darin, dass wir die Lösung raten. Die Idee ist, dass wir versuchen eine einfache Ladungsverteilung zu finden, welche elektrisches Feld erzeugt, das mit den Randbedingungen kompatibel ist.

Demzufolge betrachten wir ein anderes Problem: es gibt zwei elektrische Ladungen im *freien* Raum. Die Ladung q befindet sich bei $x = 0, y = 0, z = d$, also bei $\vec{r} = \vec{r}_0$, und die Ladung $-q$ bei $x = 0, y = 0, z = -d$, also bei $\vec{r} = \vec{r}_1 = -\vec{r}_0$. Die Poisson Gleichung lautet in diesem Fall

$$\vec{\nabla}^2\varphi = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) + \frac{q}{\epsilon_0}\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_1). \tag{4.3}$$

Falls wir uns auf obigem ($z > 0$) Halbraum konzentrieren, sind Gl. (4.1) und (4.3) äquivalent, weil die zweite Delta-Funktion in Gl. (4.3) keine Rolle spielt.

Die Lösung Gl. (4.3) lautet

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}}\right]. \tag{4.4}$$

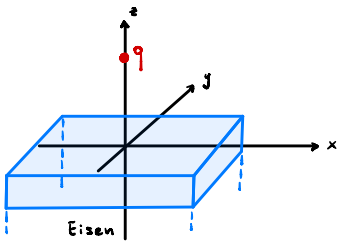

Abbildung 6: Die Punktladung q über die Eisenplatte.

Aus dieser Lösung folgt, dass $\varphi(x, y, 0) = 0$ für $z = 0$. Das bedeutet auch, dass $E_x = E_y = 0$ für alle Punkte an der (x, y)-Ebene gilt.

Obwohl wir das Potential in Gl. (4.4) für zwei Ladungen und keine Platte konstruiert haben, haben wir alle Randbedingungen für unser Problem mit den Eisenplatten erfüllt. Falls wir beweisen können, dass die Lösungen der Poisson Gleiching für gewisse Randbedingungen *eindeutig* sind, können wir behaupten, dass unsere Lösung Gl. (4.3) auch die Lösung für unser ursprüngliches Problem mit der Eisenplatte sein *muss*.

Jetzt diskutieren wir unter welchen Bedingungen die Lösungen der Poisson Gleichung eindeutig sind. Wir fangen an mit einer Rechnung; warum sie wichtig ist, sehen wir erst später. Wir nehmen eine Punktladung q, welche sich bei $\vec{r} = \vec{r}_0$ befindet, und integrieren das Potential der Ladung q über die Sphäre mit Radius R und dem Zentrum in $\vec{r}_1$ (siehe Bild 7). Wir schreiben dann

$$I = \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{|\vec{r}-\vec{r}_1|=R} \varphi(\vec{r})\, \mathrm{d}S. \tag{4.5}$$

Wir benutzen $\varphi(\vec{r}) = q/(4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_0|)$, schreiben $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{R}$ und erhalten

$$I = \frac{q}{16\pi^2\epsilon_0} \int \frac{\mathrm{d}\Omega_{\vec{R}}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0 + \vec{R}|}. \tag{4.6}$$

Wir bezeichnen $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ als $\vec{\rho}$, nehmen die Richtung der z-Achse entlang $\vec{\rho}$. Wir

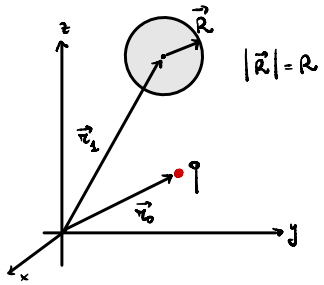

Abbildung 7: Die Berechnung des Mittlewerts des Potentials der Punkladung.

erhalten dann ($|\vec{\rho}| > R$)

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}\Omega_{\vec{R}}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0 + \vec{R}|} = 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\sqrt{\rho^2 + R^2 + 2\rho R\cos\theta}} \\
&= \frac{2\pi}{\rho R}\left(\sqrt{\rho^2 + R^2 + 2\rho R} - \sqrt{\rho^2 + R^2 - 2\rho R}\right) = \frac{2\pi}{\rho R}\left(\rho + R - \rho + R\right) \\
&= \frac{4\pi}{\rho} = \frac{4\pi}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Das bedeutet, dass

$$\frac{1}{4\pi R^2} \int_{|\vec{r} - \vec{r}_1| = R} \varphi(\vec{r})\, \mathrm{d}S = \varphi(\vec{r}_1). \tag{4.8}$$

Dieses Ergebniss bedeutet, dass das Potential $\varphi(\vec{r})$ an keinem Punkt $\vec{r}$ weder ein lokales Maximum noch ein Minimum haben kann. Dies kann nur bei den Randflächen passieren. Obwohl wir dieses Ergebnis nur für eine Punktladung bewiesen haben, gilt es für beliebige Ladungsverteilungen wegen des Superpositionsprinzips.

Diese Beobachtung hat wichtige Konsequenzen für die Lösung der Poisson oder Laplace Gleichung. Nehmen wir an, dass wir das Potential φ auf einer Randlfäche definiert haben; wir wollen das Potential innerhalb dieser Fläche bestimmen. Wir nehmen an, dass es keine Ladungen innerhalb der Fläche gibt.

Dann benutzen wir die Laplace Gleichung

$$\vec{\nabla}^2\varphi = 0, \tag{4.9}$$

und versuchen die Lösung zu finden, welche die Randbedingungen erfüllt. Nehmen wir an, dass wir zwei Lösungen dieser Gleichung gefunden haben, welche identische Randbedingungen erfüllen. Wir bezeichnen diese Lösungen mit φ_1 und φ_2 und betrachten $\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$. Das Potential φ_3 erfüllt die Laplace Gleichung

$$\vec{\nabla}^2\varphi_3 = 0. \tag{4.10}$$

Die Randbedingung für φ_3 ist $\varphi_3 = 0$ auf der Randfläche. Weil das Maximum und das Minimum des Potentials auf der Randfläche sein soll, folgt daraus, dass das Potential φ_3 *uberal eine Null* ist.

Das gleiche gilt auch für die Poisson Gleichung

$$\vec{\nabla}^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{4.11}$$

mit Randbedingungen auf der Randfläche. In diesem Fall ist die Argumentation identisch. Falls es zwei Lösungen $\varphi_{1,2}$ gibt, erfüllt die Differenz $\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$ eine Laplace Gleichung mit Randbedingungen $\varphi_3 = 0$ auf der Randfläche. Wir haben gesehen, dass in diesem Fall $\varphi_3 = 0$ ist.

Es gibt die zweite Wahl der Randbedingungen, welche die Lösung der Poisson-Gleichung vollständig definieren. Wir können z.B. die gesamten Ladungen an jedem Leiter im Raum vorschreiben, räumliche Ladungsdichten geben und an äußeren Randflächen das Potential definieren. In diesem Fall ist die Lösung der Poisson-Gleichung auch eindeutig.

Wir gehen zurück zum Beispiel mit der Punktladung und unendlich großen Eisenplatte bei $z < 0$. Die Randbedingung war $\varphi(x, y, z = 0) = 0$. Die Lösung der Poisson Gleichung muss dann eindeutig sein.[7] Wir haben die Lösung mit Hilfe von "Spiegelladung" konstruiert und die Randbedingungen erfüllt. Das bedeutet, dass unsere Lösung Gl. (4.4) richtig ist, und dass es keine zweite Lösung geben kann.

Wir wollen jetzt mit Hilfe der Lösung Gl. (4.4) induzierte Ladung an der Fläche der Platte finden. Diese Ladung erhalten wir aus den Randbedingungen

$$E_z(x, y, z = 0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \tag{4.12}$$

[7]Wir sollen noch dazu sagen, dass bei $r \to -\infty$ das Potential auch eine Null ist, $\varphi \to 0$.

Um E_z zu berechnen, schreiben wir

$$E_z = -\partial_z \varphi, \tag{4.13}$$

benutzen Gl. (4.4) und erhalten

$$E_z(x, y, z = 0) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}. \tag{4.14}$$

Die induzierte Ladungsdichte lautet

$$\sigma(x, y) = -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}. \tag{4.15}$$

Um *gesamte* induzierte Ladung zu berechnen, integrieren wir über die Oberfläche. Wir erhalten

$$Q = \int \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \sigma(x, y) = -qd \int_0^\infty \frac{\rho \mathrm{d}\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} = -q, \tag{4.16}$$

wobei wir zylindrische Koordinaten eingeführt haben um das Integral zu berechnen.

Wir können auch die Kraft zwischen der Punktladung und der Platte berechnen. Die Kraft per Flächeneinheit ist

$$\vec{f} = \frac{\epsilon_0 E_z^2}{2} \vec{e}_z. \tag{4.17}$$

Die gesamte Kraft ist dann

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{q^2 d^2}{8\pi^2\epsilon_0} \vec{e}_z \int \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{(x^2 + y^2 + d^2)^3} \\ &= \frac{q^2 d^2}{4\pi\epsilon_0} \vec{e}_z \int_0^\infty \frac{\rho \mathrm{d}\rho}{(\rho^2 + d^2)^3} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} \vec{e}_z = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2d)^2} \vec{e}_z. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Diese Kraft ist genau die Kraft zwischen der ursprünglichen Punktladung und der Spiegelladung.

Ein anderes Beispiel bezieht sich auf einer leitenden Kugel mit dem Radius R und einer Punktladung q. Das Potential der Kugel is $\varphi = 0$. Der Abstand

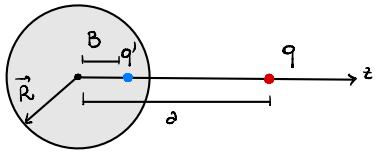

Abbildung 8: Die Ladung q und die Spiegelladung q' für leitende Kügel.

zwischen dem Zentrum der Kugel und der Ladung ist $a > R$. Wir wollen das elektrische Potential außerhalb der Kugel finden.

Wir versuchen genau das gleiche zu machen wie in dem Beispiel mit der Eisenplatte: nämlich, wir versuchen eine Verteilung von Punktladungen zu finden für welche die Oberfläche der Kugel eine äquipotentiale Fläche ist. Wir versuchen zuerst mit einer zusätzlichen Ladung. Wie wählen das Koordinatensystem so aus, dass das Zentrum der Kugel im Ursprung liegt und die Punktladung q auf der z-Achse bei $z = a$ liegt. Wir nehmen an, dass es noch eine Punktladung $-q'$ gibt, welche sich auch auf der z-Achse befindet und den Abstand b zum Ursprung hat (siehe Bild 8). Wir versuchen dann q' und b so zu wählen, dass die Oberfläche der Kugel das Potential $\varphi = 0$ hat.

Wir schreiben dann

$$0 = \varphi_q(\vec{R}) + \varphi_{q'}(\vec{R}), \tag{4.19}$$

wobei $\vec{R}$ einen beliebigen Punkt an der Oberfläche der Kugel beschreibt. Wir schreiben die Potentiale explizit aus und finden

$$0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}} - \frac{q'}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta}}\right). \tag{4.20}$$

Wir wollen solche q' und b finden, welche diese Gleichung für alle θ erfüllen.

Wir schreiben die obige Gleichung um

$$\frac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}} = \frac{q'}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta}}, \tag{4.21}$$

und quadrieren beide Seiten. Nach einer Umschreibung finden wir

$$q^2(R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta) = q'^2(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta). \tag{4.22}$$

Weil diese Gleichung für beliebige Winkel θ gelten soll, können wir die als zwei Gleichungen umschreiben

$$\begin{aligned} 2Rbq^2 &= 2Raq'^2, \\ q^2(R^2+b^2) &= q'^2(R^2+a^2). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir eine quadratische Gleichung für b

$$ab^2 - (R^2+a^2)b + R^2a = 0. \tag{4.24}$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen $b = a$ und $b = R^2/a$. Die Ladungen q' sind dann $q' = q$ und $q' = qR/a$. Die erste Lösung $b = a,\ q' = q$ ist nicht interessant, weil wir die induzierte Ladung $q' = -q$ genau an der Ladung q platzieren. Dann ist das gesamte Potential *überall* eine Null und nicht nur an der Oberfläche der Kugel.

Die zweite Möglichkeit $q' = qR/a$ und $b = R^2/a$ gibt die nicht-triviale Lösung. Das Potential außerhalb der Kugel lautet

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r} - a\vec{e}_z|} - \frac{R}{a|\vec{r} - R^2/a\ \vec{e}_z|}\right]. \tag{4.25}$$

Es gibt auch andere Methoden, welche verwendet werden kann, um die Laplace-Gleichung zu lösen; diese Methoden werden wir jetzt diskutieren. Um konkret zu sein, betrachten wir folgendes Problem. Es gibt drei unendlich große leitende Platten. Zwei von diesen liegen parallel zur $(x-z)$-Ebene und sind geerdet ($\varphi = 0$). Die Koordinaten dieser Platten sind $y = 0$ und $y = a$. Bei $x = 0$ in $y - z$ Ebene liegt die dritte Platte, welche von den zwei andere Platten isoliert ist und das Potential $V(y)$ hat (siehe Bild 9). $V(y)$ ist eine beliebige Funktion. Wir wollen das elektrische Potential in dem Raum zwischen den Platten bestimmen and versuchen die Laplace Gleichung direkt zu lösen.

Um die Lösung zu konstruieren, merken wir, dass in diesem Problem keine Abhängigkeit von der Koordinate z vorkommt; d.h., wir können annehmen, dass das Potential $\varphi(x, y, z)$ nur eine Funktion von x und y ist. Die Laplace Gleichung lautet dann

$$\partial_x^2\varphi(x,y) + \partial_y^2\varphi(x,y) = 0. \tag{4.26}$$

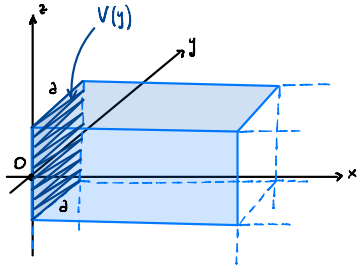

Abbildung 9: Das Arrangement von drei PLatten.

Um diese Gleichung zu lösen, nehmen wir an, dass das Potential $\varphi(x, y)$ als *Produkt* von zwei Funktionen geschrieben werden kann

$$\varphi(x, y) = F_x(x)F_y(y). \tag{4.27}$$

Diese Möglichkeit ist nicht selbstverständlich und muss mit den Randbedingungen kompatibel sein. Aus der Laplace Gleichung erhalten wir

$$\frac{1}{F_x(x)}\frac{\mathrm{d}^2F_x}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{F_y(y)}\frac{\mathrm{d}^2F_y}{\mathrm{d}y^2}. \tag{4.28}$$

Die linke Seite ist eine Funktion von x; die rechte Seite von y. Beide Seiten können nur gleich sein, falls sie eine Konstante sind. Dann schreiebn wir

$$\frac{1}{F_x(x)}\frac{\mathrm{d}^2F_x(x)}{\mathrm{d}x^2} = \alpha^2, \qquad \frac{1}{F_y(y)}\frac{\mathrm{d}^2F_y(y)}{\mathrm{d}y^2} = -\alpha^2. \tag{4.29}$$

Um diese Gleichungen zu lösen und α zu bestimmen, diskutieren wir die Randbedingungen für F_x und F_y. Wir fangen an mit dem Potential für $y = 0$ und $y = a$. Für alle x-Werte sollen folgende Gleichungen gelten

$$\varphi(x, 0) = F_x(x)F_y(0) = 0, \quad \varphi(x, a) = F_x(x)F_y(a) = 0. \tag{4.30}$$

Das bedeutet, dass

$$F_y(0) = 0 \text{ and } F_y(a) = 0. \tag{4.31}$$

Für $x = 0$ gilt

$$\varphi(0, y) = F_x(0)F_y(y) = V(y). \tag{4.32}$$

Es sieht so aus als wir die Funktion $F_y(y)$ aus der obigen Gleichung vollständig bestimmen kann. Allerdings, falls es so wäre, sollte die Funktion $V(y)$ die Gl. (4.29) erfüllen, was für eine *beliebige* Funktion nicht der Fall sein soll. Wir werden sehen dass wir diesen Wiederspruch umgehen kann in dem wir $\varphi(x, y)$ als eine Summe $\phi(x, y) = \sum F_x^{(n)}(x) F_y^{(n)}(y)$ interpretieren und die Randbedingung Eq. (4.32) für die *ganze* Summe, und nicht individuele Terme in der Summe, anwenden.

Wir fangen an mit Gl. (4.29). Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$F_y(y) = A \sin(\alpha y + \phi). \tag{4.33}$$

Weil $F_y(0) = F_y(a) = 0$, gilt $\phi = 0$ und $\alpha = \pi n/a$, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Dann

$$F_y(y) = A_n \sin\left(\frac{\pi n y}{a}\right). \tag{4.34}$$

Die Gleichung für $F(x)$ ist dann

$$\frac{\mathrm{d}^2 F_x(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\pi^2 n^2}{a^2} F_x(x). \tag{4.35}$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$F_x(x) = C_n e^{\pi n x/a} + B_n e^{-\pi n x/a}. \tag{4.36}$$

Obwohl die Differentialgleichung *beide* e-Funktionen erlaubt, brauchen wir nur die Lösung $e^{-\pi n x/a}$ weil das Potential bei $x \to \infty$ eine Null sein soll. Dementsprechend setzen wir $C_n \to 0$ und erhalten

$$F_x(x) = B_n e^{-\pi n/a x}. \tag{4.37}$$

Die gesamte Lösung ist dann

$$\varphi(x, y) = B_n e^{-\pi n/a x} A_n \sin\left(\frac{\pi n y}{a}\right) = V_n e^{-\pi n/a x} \sin\left(\frac{\pi n y}{a}\right). \tag{4.38}$$

Diese Lösung hat drei Probleme: erstens, sie hängt von einem Parameter n ab, welches nicht festgelegt ist; zweitens, sie ist proportional zu einer unbekannten Konstante V_n und, drittens, sie erfüllt die Randbedingungen bei $x = 0$ nicht.

Man kann alle diese Probleme auf einem Schlag lösen, indem man eine lineare Kombination von allen möglichen Lösungen in Gl. (4.38) nimmt

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n e^{-\pi n x/a} \sin\left(\frac{\pi n y}{a}\right). \tag{4.39}$$

Dieses Potential erfüllt die Laplace-Gleichung und die Randbedingungen, falls wir die Koeffizienten V_n so auswählen, dass

$$V(y) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \sin\left(\frac{\pi n y}{a}\right). \tag{4.40}$$

Um diese Koeffizienten zu bestimmen, berechnen wir folgendes Integral

$$\int_0^a \mathrm{d}y\, V(y) \sin\left(\frac{\pi m y}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \int_0^a \mathrm{d}y \sin\left(\frac{\pi m y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{a}\right). \tag{4.41}$$

Das Integral des Produkts von zwei Sinus-Funktionen ist einfach zu berechnen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^a \mathrm{d}y \sin\left(\frac{\pi m y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{a}\right) &= \frac{1}{2}\int_0^a \mathrm{d}y \left[\cos\left(\frac{\pi(n-m)y}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi(n+m)y}{a}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{a}{\pi(n-m)} \sin\left(\frac{\pi(n-m)y}{a}\right)\Bigg|_0^a - -\frac{1}{2}\frac{a}{\pi(n+m)} \sin\left(\frac{\pi(n+m)y}{a}\right)\Bigg|_0^a = 0.\end{aligned} \tag{4.42}$$

Die einzige Ausnahme ist der Fall $n = m$; in diesem Fall ist das Integral $a/2$.

Das Ergebnis lautet

$$\int_0^a \mathrm{d}y \sin\left(\frac{\pi m y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{a}\right) = \frac{a}{2}\,\delta_{mn}. \tag{4.43}$$

Dementsprechend finden wir

$$V_n = \frac{2}{a}\int_0^a \mathrm{d}y\, V(y) \sin\left(\frac{\pi n y}{a}\right). \tag{4.44}$$

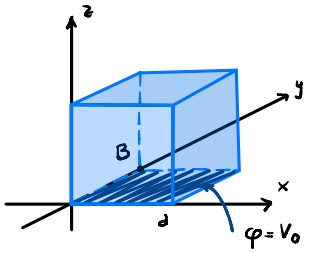

Abbildung 10: Die leitende Box.

Die Gl. (4.39) gibt uns die Lösung des ursprünglichen Problems.

Als konkretes Beispiel nehmen wir an, dass $V(y) = V_0$ ist. In diesem Fall können wir das Integral in obiger Gleichung berechnen und erhalten

$$V_n = \frac{2}{a}\int_0^a \mathrm{d}y\; V_0\; \sin\left(\frac{\pi n y}{a}\right) = \frac{2V_0}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right). \tag{4.45}$$

Für $V(y) = V_0$ gilt nun

$$\varphi(x,y) = \frac{2V_0}{\pi}\sum_n \frac{(1-(-1)^n)}{n} e^{-\pi n x/a} \sin\left(\frac{\pi n}{a} y\right). \tag{4.46}$$

Als zweites Beispiel betrachten wir eine leitende Box mit Seiten $0 < x < a$, $0 < y < b$ und $0 < z < c$. Fünf Seiten dieser Box sind geerdet ($\varphi = 0$) und die Seite bei $z = 0$ hat das Potential V_0 (siehe Bild 10). Wir wollen das elektrische Potential innerhalb der Box finden. Wir benutzen die Methode von Trennung der Variablen und schreiben

$$\varphi(x,y,z) = F_x(x)F_y(y)F_z(z). \tag{4.47}$$

Die Randbedingungen für diese Funktionen sind dann

$$F_x(0) = F_x(a) = 0, \quad F_y(0) = F_y(b) = 0, \quad F_z(0) = V_0, \quad F_z(c) = 0. \tag{4.48}$$

Die Funktionen $F_x(0)$ und $F_y(0)$ können wir dann so schreiben

$$F_x(x) \sim \sin\frac{\pi n x}{a}, \quad F_y(y) \sim \sin\frac{\pi m y}{b}, \tag{4.49}$$

wobei n und m beliebige positive ganze Zahlen sind.

Aus der Laplace Gleichung folgt

$$\frac{\mathrm{d}^2 F_z(z)}{\mathrm{d}z^2} = \left(\frac{\pi^2 n^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{b^2}\right) F_z(z) = \kappa^2 F_z(z). \tag{4.50}$$

Die Lösung dieser Gleichung, welche die Randbedingung bei $z = c$ erfüllt, sieht so aus

$$F_z(z) \sim \sinh\left(\kappa(c - z)\right). \tag{4.51}$$

Die allgemeine Lösung ist dann

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{n,m} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right) \sinh\left(\kappa_{nm}(c - z)\right), \tag{4.52}$$

wobei

$$\kappa_{nm} = \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{b^2}}, \tag{4.53}$$

ist.

Um die Koeffizienten $A_{n,m}$ zu bestimmen, setzen wir $z = 0$ in Gl. (4.52) ein und erhalten

$$\varphi(x, y, 0) = V_0 = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{n,m} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right) \sinh\left(\kappa_{nm} c\right). \tag{4.54}$$

Mit der Hilfe von Gl. (4.43) finden wir

$$\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y \; V_0 \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right) = \frac{4}{ab} A_{n,m} \sinh\left(\kappa_{nm} c\right). \tag{4.55}$$

Die Integrale können wir aus Gl. (4.45) extrahieren. Wir erhalten dann

$$A_{n,m} = \frac{4V_0}{\pi^2 nm} \frac{(1 - (-1)^n)(1 - (-1)^m)}{\sinh\left(\kappa_{nm} c\right)}. \tag{4.56}$$

Um das Potential $\varphi(x, y, z)$ zu erhalten, sollen wir die Koeffizienten A_{nm} in Gl. (4.52) einsetzen.

Wir haben zwei Beispiele gesehen, wo man die Laplace Gleichung in Kartesischem Koordinatensystem effektiv lösen kann. Allerdings, welche Variablen

wir auswählen sollen, um die Laplace Gleichung am *einfachsten* zu lösen, hängt von der Symmetrie des Problems ab. Um ein Beispiel zu diskutieren, nehmen wir an, dass es eine leitende Sphäre gibt und an dieser Sphäre das Potential als eine Funktion des Polarwinkels θ gegeben ist. Wir wollen das Potential innerhalb der Sphäre finden.

Es ist ziemlich klar, dass das Kartesische Koordinatensystem in diesem Fall nicht die beste Wahl ist, und wir sollten deshalb sphärische Koordinaten anwenden. Der Laplace-Operator $\vec{\nabla}^2$ in sphärischen Koordinaten lautet

$$\vec{\nabla}^2\varphi = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\varphi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\varphi\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2\varphi. \tag{4.57}$$

Falls die Randbedingungen es erlauben, können wir auch in diesem Fall Variablen trennen. Wir schreiben dann

$$\varphi(r,\theta,\phi) = F_r(r)F_\theta(\theta)F_\phi(\phi), \tag{4.58}$$

sodass

$$\vec{\nabla}^2\varphi = \varphi\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial_r(r^2\partial_r F_r)}{F_r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta F_\theta\right)}{F_\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial_\varphi^2 F_\phi}{F_\phi}\right). \tag{4.59}$$

Für die Laplace-Gleichung $\vec{\nabla}^2\varphi = 0$ erhalten wir

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial_r(r^2\partial_r F_r)}{F_r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta F_\theta\right)}{F_\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial_\varphi^2 F_\phi}{F_\phi} = 0. \tag{4.60}$$

Wir fangen mit F_ϕ an. In diesem Fall sollen wir die Gleichung

$$\frac{\partial_\varphi^2 F_\phi}{F_\phi} = -m^2 \tag{4.61}$$

lösen. Das Ergebnis ist

$$F_\phi \sim e^{\pm im\phi}. \tag{4.62}$$

Weil an der Sphäre $\varphi(\phi) = \varphi(\phi + 2\pi)$ gilt, finden wir, dass m eine *ganze Zahl* sein soll. Wir erhalten dann

$$\frac{\partial_r(r^2\partial_r F_r)}{F_r} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta F_\theta\right)}{F_\theta} - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = 0. \tag{4.63}$$

Nur der erste Term dieser Gleichung kann r-abhängig sein. Um das zu vermeiden schreiben wir

$$\frac{\partial_r(r^2\partial_r F_r)}{F_r} = l(l+1), \tag{4.64}$$

wobei l eine Konstante ist. Es folgt

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta F_\theta)}{F_\theta} - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = -l(l+1). \tag{4.65}$$

Wir fangen mit Gl. (4.65) an. Nach der Variablentransformation $\theta \to x = \cos\theta$ finden wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_\theta\right] + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)}\right)F_\theta = 0. \tag{4.66}$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind bekannt; sie heißen *assoziierte Legendre Polynome*; wir bezeichnen sie mit $P_l^m(x)$.

Ein Spezialfall ist $m = 0$. Dieser Fall entspricht ϕ-unabhängige Lösungen, also die azimuthale Symmetrie. Die Lösungen Gl. (4.66) für $m = 0$ heißen *Legendre Polynome*; wir bezeichnen sie mit $P_l(x)$. Das Verhältnis zwischen $P_l(x)$ und $P_l^m(x)$ lautet

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m P_l(x). \tag{4.67}$$

Die Differentialgleichung für $P_l(x)$ ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l(x)\right] + l(l+1)P_l(x) = 0. \tag{4.68}$$

Sehr viele Eigenschaften der Legendre Polynome sind bekannt. Wir listen die wichtigsten Eingeschaften auf.

- Eine Lösung Gl. (4.68), welche endlich bei $x = \pm 1$ ist, ist nur vorhanden, falls l eine ganze positive Zahl ist;
- Für ganze positive l-Werte sind die Lösungen obiger Gleichung Polynome l-ter Ordnung in x;

- Diese Polynome sind tabuliert. Zum Beispiel

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x, P_2(x) = (3x^2 - 1)/2, \tag{4.69}$$

  und so weiter.

- Es gilt

$$P_l(1) = 1. \tag{4.70}$$

- Es gilt

$$P_l(x) = (-1)^l P_l(-x). \tag{4.71}$$

- Legendre Polynome sind orthgonal. Das bedeutet

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ P_{l_1}(x) P_{l_2}(x) = \frac{2\delta_{l_1 l_2}}{2l_1 + 1}.. \tag{4.72}$$

- Legendre Polynome formen eine vollständige Basis für Funktionen auf dem Interval $-1 < x < 1$. Das bedeutet, dass wir jede Funktion in diesem Interval als eine lineare Kombination von Legendre Polynomen schreiben können

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l\ P_l(x). \tag{4.73}$$

  Die Koeffizienten f_l bestimmen wir mit Hilfe der Gl. (4.72).

Wir gehen zurück zur Gl. (4.64). Es ist einfach zu sehen, dass diese Gleichung zwei Lösungen hat

$$F_r = r^l \ \text{ und } \ r^{-l-1}. \tag{4.74}$$

Das heißt, dass die *allgemeine* Lösung der Laplace Gleichung in sphärischen Koordinaten unter der Annahme von azimuthaler Symmetrie lautet

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-l-1}\right) P_l(\cos\theta), \tag{4.75}$$

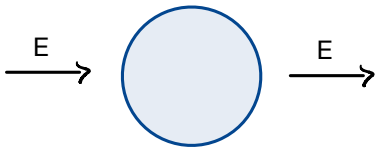

Abbildung 11: Eine leitende Kugel in elektrischem Feld.

wobei A_l und B_l zwei Konstanten sind. Diese Konstanten sollen mit Hilfe von Randbedingugen bestimmt werden.

Um zu sehen wie dieser Formalismus verwendet werden kann, betrachten wir folgendes Problem. Es gibt ein konstantes elektrisches Feld $\vec{E} = E_0\vec{e}_z$. Wir platzieren eine leitende Kugel in diesen Feld (siehe Bild 11); die Kugel hat einen Radius von R. Das Zentrum der Kugel liegt im Ursprung des Koordinatensystems. Wir wollen das elektrische Potential außerhalb der Kugel finden.

Wie wir schon wissen, soll die Oberfläche der leitenden Kugel äquipotentiell sein. Wir nehmen an, dass das Potential der Kugel eine Null ist. Wir benutzen sphärische Koordinaten und verwenden den Ansatz in Gl. (4.75), weil es keine ϕ-Abhängigkeit gibt. Bei $r = R$ muss das Potential eine Null sein. Weil Legendre Polynomen unabhängig voneinander sind, kann es nur passieren, falls

$$A_l R^l + B_l R^{-l-1} = 0. \tag{4.76}$$

Es folgt, dass

$$B_l = -A_l R^{2l+1}. \tag{4.77}$$

Dann gilt

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(r^l - \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta). \tag{4.78}$$

Weil es ursprünglich ein konstantes elektrisches Feld gab, haben wir eine Randbedingung bei $r = \infty$, wo das elektrische Feld der induzierten Ladung keine Rolle spielen kann. Dann

$$\vec{E} \to E_0\vec{e}_z. \quad r \to \infty. \tag{4.79}$$

Wir schreiben diese Randbedingung in sphärischen Koordinaten um und erhalten

$$\vec{e}_z = \cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta. \tag{4.80}$$

Dann,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \to E_0 \ \cos\theta \ \vec{e}_r - E_0 \ \sin\theta \ \vec{e}_\theta, \tag{4.81}$$

bei $r = \infty$. Den Gradient wollen wir in sphärischen Koordinaten berechnen. Dann

$$\vec{\nabla}\varphi = \vec{e}_r \partial_r \varphi + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta \varphi + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\phi \varphi. \tag{4.82}$$

Wir berechnen das elektrische Feld und erhalten

$$\begin{aligned} \vec{E} = &- \vec{e}_r \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(l r^{l-1} + (l+1) \frac{R^{2l+1}}{r^{l+2}} \right) P_l(\cos\theta) \\ &- \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(r^l - \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) \partial_\theta P_l(\cos\theta). \end{aligned} \tag{4.83}$$

Wir vergleichen diese Gleichung mit Gl. (4.81) und erhalten zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(l r^{l-1} + (l+1) \frac{R^{2l+1}}{r^{l+2}} \right) P_l(\cos\theta) = -E_0 \cos\theta, \\ &\lim_{r\to\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(r^{l-1} - \frac{R^{2l+1}}{r^{l+2}} \right) \partial_\theta P_l(\cos\theta) = E_0 \sin\theta. \end{aligned} \tag{4.84}$$

Diese Gleichungen können wir sehr einfach lösen. Wir merken, dass $\cos\theta = P_1(\cos\theta)$ ist. Weil Legendre Polynome unabhängig sind, folgt aus der ersten Gleichung, dass

$$A_l = -E_0 \delta_{l1}. \tag{4.85}$$

Die zweite Gleichung ist mit dieser Lösung konsistent. D.h., dass das Potential außerhalb der Kugel lautet

$$\varphi = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) P_1(\cos\theta). \tag{4.86}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung können wir das elektrische Feld und die induzierte Ladung an der Oberfläche der Kügel finden.

Das letzte Thema, welches wir diskutiert wollen, ist die *multipole Entwicklung* des Potentials. Nehmen wir an, dass wir eine Ladungsverteilung im

begrenzten Raumgebiet $\mathcal{V}$ haben. Das Potential können wir mit Hilfe der bekannten Formel berechnen

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}^3\vec{r}_1\ \rho(r_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \tag{4.87}$$

Außerhalb des Gebiets $\mathcal{V}$ ist die Ladungsdichte $\rho(\vec{r}_1)$ eine Null.

Wir betrachten jetzt die Ortsvektoren, welche weit außerhalb des Raumgebiets $\mathcal{V}$ liegen. Dann,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r_1}{r}\cos\theta + \frac{r_1^2}{r^2}}}, \tag{4.88}$$

wobei $\cos\theta = \vec{r}_1\vec{r}/(rr_1)$ ist. Weil r weit außerhalb $\mathcal{V}$ ist, können wir annehmen, dass r_1/r klein ist und die obige Formel in r_1/r entwickeln. Diese Entwicklung lautet

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r_1}{r}\cos\theta + \frac{r_1^2}{r^2}}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_1^l}{r^l}\ P_l(\cos\theta). \tag{4.89}$$

Wir benutzen diese Entwicklung in Gl. (4.87) und erhalten

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\kappa_l}{r^l}. \tag{4.90}$$

wobei

$$\kappa_l = \int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3\vec{r}_1\ \rho(\vec{r}_1)\ r_1^l\ P_l\left(\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}}{r_1 r}\right). \tag{4.91}$$

Die Größenordnung der Größe κ_l ist

$$\kappa_l \sim Q a^l, \tag{4.92}$$

wobei a ein typisches Ausmaß des Gebiets $\mathcal{V}$ ist. Der Beitrag des l-ten Terms in der Summe Gl. (4.90) ist proportional zu a^l/r^l; weil $a \ll r$ ist, nimmt die Wichtigkeit der Terme in Gl. (4.90) mit l ab.

Wir werden jetzt verschiedene Terme in der Summe Gl. (4.90) genauer diskutieren. Wir fangen mit $l = 0$ an. Wir erhalten

$$\kappa_0 = \int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3\vec{r}_1\ \rho(\vec{r}_1) = Q_{\mathcal{V}}. \tag{4.93}$$

D.h., dass κ_0 die totale Ladung des Gebiets $\mathcal{V}$ ist. Die Bedeutung dieser Formel ist klar – aus einer großen Entfernung sieht jede Ladungsverteilung wie eine Punktladung aus.

Die Korrekturen zu dieser Aussage kommen von weiteren Terme in der Summe Gl. (4.90). Für $l = 1$ Term benutzen wir $P_1(x) = x$ und erhalten

$$\kappa_1 = \int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \; \rho(\vec{r}_1) r_1 \; P_1\left(\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}}{r_1 r}\right) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r}, \tag{4.94}$$

wobei

$$\vec{d} = \int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \; \rho(\vec{r}_1) \; \vec{r}_1 \tag{4.95}$$

ist. Die Größe $\vec{d}$ nennt man *das Dipolmoment der Ladungsverteilung*. Die Größenordnung des Dipolmoments ist $d \sim Q_{\mathcal{V}} a$ wobei a das typische Ausmaß des Gebiets $\mathcal{V}$ ist. Es ist zu merken, dass eine sphärischsymmetrische Ladungsverteilung kein Dipolmoment erzielen kann. Schließlich schreiben wir das elektrische Potential eines elektrischen Dipols

$$\varphi_{l=1}(\vec{r}) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \tag{4.96}$$

Als letztes diskutieren wir den Term mit $l = 2$. In diesem Fall erhalten wir

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \; \rho(\vec{r}_1) r_1^2 \; P_2\left(\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}}{r_1 r}\right) \\ &= \int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \; \rho(\vec{r}_1) r_1^2 \; \frac{1}{2}\left(3\frac{(\vec{r}_1 \cdot \vec{r})^2}{r^2 r_1^2} - 1\right) = \frac{\vec{r}_i \vec{r}_j}{r^2} \;\; t_{ij}. \end{aligned} \tag{4.97}$$

wobei

$$t_{ij} = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \; \rho(\vec{r}_1) \left(3 \; r_{1i} r_{1j} - \delta_{ij} r_1^2\right), \tag{4.98}$$

Die Größe t_{ij} bezeichnen wir als *Quadrupolmoment der Ladungsverteilung*. Das Potential eines Quadrupols ist dann

$$\varphi_{l=2}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}_i \vec{r}_j t_{ij}}{4\pi\epsilon_0 r^5}. \tag{4.99}$$

Wir gehen zurück zum Dipolmoment der Verteilung. Als einfachstes Beispiel betrachten wir zwei Ladungen $+q$ und $-q$ mit Ortsvektoren $\vec{r}_+ = \vec{a}$ bzw. $\vec{r}_- = 0$. Wir wollen das Dipolmoment dieser Ladungsverteilung berechnen.

Die Verteilung beschreiben wir mit Hilfe der Dirac'schen Delta-funktion. Wir erhalten

$$\rho(\vec{r}) = q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{a}) - q\delta^{(3)}(\vec{r}). \tag{4.100}$$

Die gesamte Ladung in diesem Fall is offensichtlich eine Null

$$Q = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\rho(\vec{r}) = 0, \tag{4.101}$$

und das Dipolmoment lautet

$$\vec{d} = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{r}\,\rho(\vec{r}) = q\vec{a}. \tag{4.102}$$

Dementsprechend finden wir in diesem Fall

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\vec{r}\cdot\vec{a}}{r^3}. \tag{4.103}$$

Schließlich berechnen wir das elektrische Feld eines Dipols. Wir fangen mit dem Dipolpotential Gl. (4.96) an und erhalten

$$\begin{aligned}\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi_1(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\vec{e}_i\partial_i\frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^3} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\vec{e}_i\left(\frac{\vec{d}_i}{r^3} - 3(\vec{d}\cdot\vec{r})\frac{r_i}{r^5}\right)\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(3\frac{(\vec{r}\cdot\vec{d})\vec{r}}{r^2} - \vec{d}\right).\end{aligned} \tag{4.104}$$

5 Dielektrika

In dieser Vorlesung betrachten wir *Dielektrika* – die Materialen wo die Ladungen (z.B. Elektronen) sich *nicht frei* bewegen können und an bestimmten Atomen gebunden sind.

Als Model des Dielektrikums können wir folgendes vorstellen. Ein Dielektrikum besteht aus Atomen. Jedes Atom ist eine Kugel mit Radius a und einer gleichmäßigen Verteilung der negativen Ladung $-q$ und einer positiven Ladung $+q$ in der Mitte der Kugel. Die Verteilung der negativen Ladung ist starr, in dem Sinne, dass die Kugel sich als Ganzes bewegen kann; Umformen kann nicht passieren. Verschiedene Kugeln sind voneinander insuliert, sodass die Elektronen sich nicht bewegen können. Was passiert, falls wir dieses System in elektrisches Feld platzieren?

Betrachten wir ein Atom. Ohne elektrisches Feld ist die Lage mit der positiven Ladung im Zentrum der Kugel im Gleichgewicht. Falls es ein externes elektrisches Feld gibt, ist dies nicht mehr der Fall: die Kugel und die positive Ladung verschieben sich in unterschiedlichen Richtungen entlang dem elektrischen Feld.

Wir bezeichnen den Betrag der Verschiebung mit b. Dann ist der Ortsvektor des Zentrums der Kugel $\vec{r} = 0$ und der Ortsvektor der positiven Ladung ist $\vec{r} = b\vec{n}$, wobei $\vec{n}$ die Richtung des elektrischen Felds beschreibt

$$\vec{E} = E\vec{n}. \tag{5.1}$$

Wir berechnen jetzt die Kraft, welche auf die positive Ladung wirkt.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{5.2}$$

wobei

$$\vec{F}_1 = qE\vec{n}, \tag{5.3}$$

und

$$\vec{F}_2 = \frac{q\rho b}{3\epsilon_0}\vec{n} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} b\vec{n}, \tag{5.4}$$

wobei wir die Formel für das elektrische Feld der Kugel mit gleichförmiger Ladungsdichte benutzt haben.

Für das Gleichgewicht brauchen wir, dass $\vec{F} = 0$. Dann

$$-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} b + qE = 0, \tag{5.5}$$

und wir erhalten

$$\vec{b} = \frac{4\pi\epsilon_0 a^3}{q} E\ \vec{n}. \tag{5.6}$$

Die neue *induzierte* Ladungsverteilung sieht so aus

$$\rho(\vec{r}) = \rho_K(r) + q\ \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{b}), \tag{5.7}$$

wobei ρ_k dies Ladungsverteilung der Kugel ist. Die originelle Ladungsverteilung entspricht $\vec{b} = 0$.

Was ist der wichtigste Unterschied zwischen der neuen und der ursprünglichen Ladungsverteilung? Um das zu verdeutlichen, berechnen wir verschiedene Multipole von beiden. Die ursprüngliche Ladungsverteilung ist sphärisch-symmetrisch; das bedeutet, dass alle Multipole außer dem Monopol eine Null sind. Ferner, weil die gesamte Ladung des Atoms eine Null ist, ist das elektrische Feld außerhalb des Atoms auch eine Null.

Mit der neuen Verteilung ist die Situation anders. Die gesamte Ladung bleibt eine Null aber höhere Multipole verschwinden nicht. Als Beispiel berechnen wir das Dipolemoment

$$\vec{d} = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\ \vec{r}\ \left(\rho_K(\vec{r}) + q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{b})\right) = q\vec{b} = q\frac{4\pi\epsilon_0 a^3}{q}\vec{E} = (4\pi\epsilon_0 a^3)\vec{E}, \tag{5.8}$$

und das Quadrupolmoment

$$\begin{aligned} t_{ij} &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{r}(\frac{\vec{r}_i\vec{r}_j}{3} - \delta_{ij}\vec{r}^2)\left(\rho_K(\vec{r}) + q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{b})\right) = \frac{q}{2}\left(\frac{\vec{b}_i\vec{b}_j}{3} - \delta_{ij}\vec{b}^2\right), \\ t_{ij} &\sim E_i E_j \sim \mathcal{O}(E^2). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Es ist wichtig, dass für realistische Felder die Verschiebung $|\vec{b}|$ *viel kleiner* ist als das Ausmaß des Atoms a. Um das zu sehen, schreiben wir

$$b = a\frac{E}{q/(4\pi\epsilon_0 a^2)} \sim a\frac{E}{E_{\text{atom}}}, \tag{5.10}$$

wobei $E_{\text{atom}} = q/(4\pi\epsilon_0 a^2)$ ist. Das elektrische Feld in einem Atom ist viel stärker als das externe Feld; das bedeutet, dass $b/a \ll 1$.

Dieses Ergebnis bedeutet, dass wir alle Multipole außer dem Dipol vernachlässigen können. Dann haben wir folgende Situation: wenn wir ein Dielektrikum in elektrisches Feld platzieren, benimmt sich jedes Atom wie ein Dipol mit dem induzierten Dipolmoment $\vec{d} \sim \vec{E}$.

Falls jedes Atom ein Dipolmoment $\vec{d}(r)$ hat und die Dichte der Atome $\rho(\vec{r})$ ist, können wir elektrisches Pontential dieser Ladungsverteilung so schreiben

$$\varphi(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \; \rho(\vec{r}_1) \; \frac{\vec{d}(\vec{r}_1) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1|^3}. \tag{5.11}$$

Die Größe

$$\vec{P}(\vec{r}) = \vec{d}(\vec{r})\rho(\vec{r}) \tag{5.12}$$

gibt uns *das Dipolmoment per Volumeneinheit*. Diese Größe nennen wir *die Polarisation*.

Um Gl. (5.11) zu vereinfachen, benutzen wir die folgende Formel

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1|^3} = \vec{\nabla}_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1|}, \tag{5.13}$$

wobei $\vec{\nabla}_1$ die Ableitung nach $\vec{r}_1$ beschreibt. Wir erhalten dann

$$\varphi(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \; \vec{P}(\vec{r}_1) \cdot \vec{\nabla}_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1|}, \tag{5.14}$$

Bevor wir mit der allgemeinen Diskussion weitermachen, ist es nützlich sich ein bisschen mit der Polarisation zu beschäftigen. Als Beispiel berechnen wir das Potential einer Kugel, welche aus einem Material mit konstanter Polarisation $\vec{P}$ besteht. Die Kugel hat einen Radius von R.

Die konstante Polarisation der Kugel beschreiben wir mit dieser Formel

$$\vec{P}(\vec{r}) = \vec{P}_0 \; \theta(R - r). \tag{5.15}$$

Die θ-Funktion ist wichtig, weil die Polarisation nur innerhalb der Kugel existiert.

Um das Potential zu berechnen sollen wir Gl. (5.15) in Gl. (5.14) benutzen und über $\vec{r}_1$ integrieren. Diese Aufgabe können wir vereinfachen, indem wir partiell integrieren. Wir schreiben

$$\vec{P}(\vec{r}_1) \cdot \vec{\nabla}_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1|} = \vec{\nabla}_1 \cdot \left(\frac{\vec{P}(\vec{r}_1)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) - \frac{\vec{\nabla}_1 \cdot \vec{P}(\vec{r}_1)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1|} \; . \tag{5.16}$$

Nach der Integration über $\vec{r}_1$ verschwindet der erste Term. Der zweite Term gibt[8]

$$\vec{\nabla}_1 \cdot \vec{P}(\vec{r}_1) = -\vec{P}_0 \cdot \vec{e}_r \delta(R - r_1). \tag{5.17}$$

Dann erhalten wir folgende Formel für das Potential der Kugel

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{r}_1 \; \vec{P}_0 \cdot \vec{e}_r \delta(R-r)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1|} = \frac{R^2 \; \vec{P}_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int\limits_{|\vec{r}_1|=R} \frac{\mathrm{d}\Omega_1 \; \vec{e}_{r_1}}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}, \tag{5.18}$$

wobei wir über die Richtungen des Vektors $\vec{r}_1$ integrieren sollen.

Das letzte Integral ist ein Vektor. Weil $\vec{r}$ der einzige Vektor in diesem Integral ist, gilt

$$\int\limits_{|\vec{r}_1|=R} \frac{\mathrm{d}\Omega_1 \; \vec{e}_{r_1}}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} = X\vec{r}. \tag{5.19}$$

Um X zu berechnen, multiplizieren wir beide Seiten mit $\vec{r}$ und erhalten

$$X = \frac{1}{r^2} \int\limits_{|\vec{r}_1|=R} \frac{\mathrm{d}\Omega_1 \; \vec{r} \cdot \vec{e}_{r_1}}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \tag{5.20}$$

Wir wählen die z-Achse entlang dem Vektor $\vec{r}$ aus, und erhalten

$$\vec{r} \cdot \vec{e}_{r_1} = r\cos\theta = rP_1(\cos\theta) \tag{5.21}$$

Der nächste Schritt unterscheidet sich für Punkte außerhalb und innerhalb der Kugel. Nehmen wir an, dass $\vec{r}$ außerhalb der Kugel liegt. Dann

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta), \tag{5.22}$$

sodass

$$\begin{aligned} X &= \frac{2\pi}{r} \sum_0^\infty \frac{R^l}{r^{l+1}} \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \; P_1(\cos\theta) P_l(\cos\theta) \\ &= \frac{2\pi}{r} \sum_0^\infty \frac{R^l}{r^{l+1}} \frac{2\delta_{l1}}{2l+1} = \frac{4\pi}{3} \frac{R}{r^3}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

[8] Zur Errinerung: $\mathrm{d}/\mathrm{d}x \; \theta(a-x) = -\delta(x-a)$.

Mit Hilfe der Gleichungen Gl. (5.18), Gl. (5.19) und Gl. (5.23), finden wir

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \tag{5.24}$$

wobei $\vec{P} = 4/3\pi R^3 \vec{P}_0$ das gesamte Dipolmoment der Kugel ist.

Für $\vec{r}$ innerhalb der Kugel schreiben wir

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta), \tag{5.25}$$

Dann

$$X = \frac{2\pi}{r} \sum_{0}^{\infty} \frac{r^l}{R^{l+1}} \frac{2\delta_{l1}}{2l+1} = \frac{4\pi}{3R^2}. \tag{5.26}$$

Dann erhalten wir

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}_0 \cdot \vec{r}. \tag{5.27}$$

Dieses Potential entspicht dem *konstanten* elektrischen Feld

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}_0. \tag{5.28}$$

Nach der Diskussion dieses Beispiels gehen wir zurück zum allgemeinen Fall. Wir integrieren Gl. (5.14) partiell[9] und erhalten

$$\varphi(\vec{r}) = -\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \, (\vec{\nabla}_1 \cdot \vec{P}(\vec{r}_1)) \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1|}, \tag{5.29}$$

Wir vergleichen diese Gleichung mit der allgemeinen Formel für das Potential der kontinuerlichen Ladungsverteilung

$$\varphi(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \, \rho(\vec{r}_1) \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1|}. \tag{5.30}$$

Wir bezeichnen die Divergenz von $\vec{P}$ als $-\rho_d(\vec{r})$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}) = -\rho_d(\vec{r}), \tag{5.31}$$

[9]We nehmen an, dass $\rho(\vec{r})$ eine stetige Funktion ist, welche bei $|\vec{r}| = \infty$ eine Null ist.

und interpretieren $\rho_d(\vec{r})$ als die Ladungsdichte *induzierter* Ladungen.

Das gesamte elektrische Feld $\vec{E}$ erfüllt eine andere Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}, \tag{5.32}$$

wobei ρ die Dichte der gesamten Ladung (externe plus induzierte) $\rho(\vec{r}) = \rho_{\text{ex}}(\vec{r}) + \rho_d(\vec{r})$ ist.

Es ist günstig das neue Feld zu definieren

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \tag{5.33}$$

weil nur *externe* Ladungen dieses Feld bestimmen. Um das zu sehen berechnen wir die Divergenz von $\vec{D}$ und erhalten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = \rho_d + \rho_{\text{ext}} - \rho_{\text{d}} = \rho_{\text{ext}}. \tag{5.34}$$

Um diese Gleichungen nützlich zu machen, sollen wir das Verhältnis zwischen $\vec{E}$ und $\vec{P}$ spezifizieren. Das Beispiel am Anfang dieser Vorlesung zeigt, dass $\vec{P} \sim \vec{E}$ ist.[10] Wir schreiben dann

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}, \tag{5.35}$$

wobei χ eine Konstante ist. Dann

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}. \tag{5.36}$$

Die Größe $\epsilon_r = 1 + \chi$ heißt *dielektrische Konstante*. Wir erhalten dann die Gleichung für $\vec{E}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{ext}}}{\epsilon_0 \epsilon_r}. \tag{5.37}$$

Aus Gl. (5.37) folgt, dass vieles, was wir über elektrische Felder *im Vakuum* gesagt haben, könenn wir übernehmen in dem wir statt ϵ_0, $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ verwenden.

Als Beispiel betrachten wir einen Plattenkondensator. Die Fläche jeder Platte ist A, die Abstand zwischen den Platten ist d. Die Kapazität

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}. \tag{5.38}$$

[10] Solche Dielektrika nennt man *lineare* Dielektrika.

haben wir vorher berechnet. Was passiert mit der Kapazität, falls wir ein Dielektrikum mit dielektrischer Konstante ϵ_r zwischen den Platten platzieren? Die Antwort besteht darin, dass wir in obiger Formel ϵ_0 mit $\epsilon\epsilon_r$ ersetzen. Dann

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d}. \tag{5.39}$$

Weil $\epsilon_r > 1$ ist, ist die Kapazität des Kondensators mit Dielektrikum grösser als ohne Dielektrikum. Weil

$$V = \frac{Q}{C} \tag{5.40}$$

ist, ist die Differenz der Potentiale V für gegebene Ladung Q *kleiner*, falls es Dielektrikum zwischen den Platten gibt. Das bedeutet, dass das Dielektrikum versucht durch die Polarisation das elektrische Feld der externen Ladungen zu kompensieren.

Generell, können wir $\vec{D}$ bzw. $\vec{E}$ aus der Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{ext}}}{\epsilon_0\ \epsilon_r} \tag{5.41}$$

bestimmen. Allerdings, für vollständige Lösungen sollen wir die Randbedingungen diskutieren. Die Randbedingungen für Dielektrika folgen aus zwei Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{ext}}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \tag{5.42}$$

An der Grenze von zwei Dielektrika, sollen folgende Randbedingungen erfüllt sein

$$\vec{D}_{\perp,1} - \vec{D}_{\perp,2} = \sigma_{\text{ext}}, \quad \vec{E}_{||,1} = \vec{E}_{||,2}. \tag{5.43}$$

Eine interessante Konsequenz dieser Gleichungen ist, dass an der Grenze von zwei Dielektrika $E_\perp$ immer nicht stetig ist, sogar für $\sigma_{\text{ext}} = 0$, und dass $\vec{\nabla} \times \vec{D} \neq 0$ ist. Um das zu sehen, schreiben wir die letzte Gleichung als

$$\frac{D_{||,1}}{\epsilon_{r,1}} = \frac{D_{||,2}}{\epsilon_{r,2}}. \tag{5.44}$$

Es folgt dann, dass $\vec{\nabla} \times \vec{D} \neq 0$ ist.

Zusätzlich können wir diese Gleichungen benutzen, um die Ladungsdichte an der Oberfläche des Dielektrikums zu finden. Als Beispiel, etrachten wir die

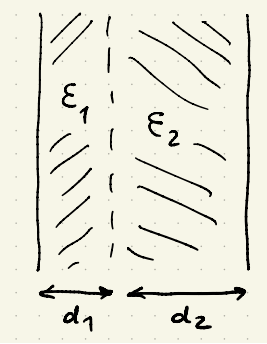

Abbildung 12: Plattenkondensator mit zwei Dielektrika.

Grenze zwischen dem Vakuum und dem Dielektrikum und nehmen an, dass es keine externen Ladungen gibt. Wir schreiben dann die Randbedingungen

$$\epsilon_0 E_{\perp,1} = D_{\perp,2} = \epsilon_0 \epsilon_r E_{\perp,2} = \epsilon_0 (1 + \chi) E_{\perp,2}, \tag{5.45}$$

sodass

$$E_{\perp,1} - E_{\perp,2} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{\epsilon_0}, \tag{5.46}$$

wobei $\vec{n}$ der Normal-Vektor zur Oberfläche ist. Aus dieser Gleichung folgt, dass die Dichte der Ladung an der Oberfläche durch

$$\sigma = \vec{P} \cdot \vec{n}, \tag{5.47}$$

gegeben ist.

Wir diskutieren jetzt zwei Beispiele. Wir betrachten noch ein Mal den Plattenkondensator und stellen uns vor, dass der Raum zwischen zwei Platten mit zwei Dielektrika gefüllt ist (siehe Fig. 12).

Wir wollen die Kapazität berechnen. An der Grenze finden wir

$$D_1 = D_2 = D \to \epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2. \tag{5.48}$$

Dann

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{D\ d_1}{\epsilon_0 \epsilon_1} + \frac{D\ d_2}{\epsilon_0 \epsilon_2} = D \left(\frac{d_1}{\epsilon_1 \epsilon_0} + \frac{d_2}{\epsilon_2 \epsilon_0} \right). \tag{5.49}$$

Für D haben wir das "vakuum" Verhältnis zur externen Ladung. Wir finden dann

$$D = \frac{Q}{A}. \tag{5.50}$$

Es folgt

$$V = \frac{Q}{A\epsilon_0}\left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}\right), \tag{5.51}$$

sodass

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{A\epsilon_0}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}}. \tag{5.52}$$

Als zweites Beispiel betrachten wir eine Kugel im konstanten elektrischen Feld $\vec{E}_0$, ausgerichtet entlang der z-Achse. Die Kugel ist aus einem Dielektrikum mit dielektrischer Konstante ϵ zusammengestellt. Wir wollen das elektrische Feld innerhalb der Kugel finden. Wie früher, schreiben wir das Potential außerhalb bzw. innerhalb der Kugel

$$\begin{aligned} \varphi(r)|_{r>R} &= \sum_{l=1}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta), \\ \varphi(r)|_{r<R} &= \sum_{l=1}^{\infty} C_l r^l \; P_l(\cos\theta). \end{aligned} \tag{5.53}$$

Die Randbedingungen sind

$$D_r|_{r>R} = D_r|_{r<R}, \quad \varphi(r)|_{r>R} = \varphi(r)|_{r<R}, \quad E_r|_{r\to\infty} = E_0\cos\theta, \tag{5.54}$$

wobei D_r und E_r die radielle Komponenten von $\vec{D}$ und $\vec{E}$ sind.

Aus der Randbedingung an $r = \infty$ erhalten wir

$$A_l = -E_0\delta_{l1}. \tag{5.55}$$

Die Stetigkeit des Potentials und des Felds D_r bei $r = R$ führt zu

$$lA_l R^{l-1} - (l+1)\frac{B_l}{R^{l+2}} = \epsilon l C_l R^{l-1}, \quad A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} = C_l R^l. \tag{5.56}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $R/(l+1)$ und addieren beide Gleichungen zusammen. Wir erhalten dann

$$C_l = \frac{A_l(2l+1)}{\epsilon l + l + 1} = -E_0\frac{3\delta_{l1}}{2+\epsilon}. \tag{5.57}$$

Das Potential innerhalb der Kugel folgt. Wir finden

$$\varphi = C_1 r P_1(\cos\theta) = -\frac{3E_0}{2+\epsilon} r\cos\theta = -\frac{3E_0}{2+\epsilon} z. \tag{5.58}$$

Das elektrische Feld innerhalb der Kugel ist dann

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = \frac{3E_0}{2+\epsilon}\vec{e}_z. \tag{5.59}$$

Zum Schluss diskutieren wir die Energie des elektrischen Felds in Dielektrika. Um die Energie zu berechnen, stellen wir uns vor, dass wir freie Ladungen in das Dielektrikum platzieren. Die Arbeit, die dafür benötigt wird, lautet

$$\Delta W = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\, \Delta\rho_f(\vec{r})\, \varphi(\vec{r}). \tag{5.60}$$

Weil $\rho_f = \vec{\nabla}\cdot\vec{D}$ ist, gilt

$$\Delta\rho_f = \vec{\nabla}\cdot\Delta\vec{D}. \tag{5.61}$$

Wir setzen diesen Ausdruck in Gl. (5.60), integrieren partiell und erhalten

$$\Delta W = -\int \mathrm{d}^3\vec{r}\, \Delta\vec{D}\cdot\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\, \Delta\vec{D}\cdot\vec{E} \tag{5.62}$$

Für lineare Dielektrika gilt $\vec{D} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E}$. Wir benutzen dieses Verhältnis zwischen $\vec{D}$ und $\vec{E}$, integrieren die obige Formel und erhalten

$$W = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\, \vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{\epsilon_0\epsilon_r}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\, \vec{E}\cdot\vec{E}. \tag{5.63}$$

Es ist interessant, dieses Ergebnis mit der Formel in Gl. (2.21) zu vergleichen. In Gl. (2.21) ist die Energie des elektrischen Felds durch

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\, \vec{E}\cdot\vec{E} \tag{5.64}$$

gegeben. Der Vergleich von Gl. (5.64) und Gl. (5.63) zeigt, dass diese unterschiedlich sind. Allerdings, aus der Herleitung in der Vorlesung 2 folgt, dass Gl. (5.64) für beliebige Ladungsverteilungen gilt. Ein Dielektrikum ist im Prinzip auch eine gewisse Ladungsverteilung für welche Gl. (5.64) gelten soll.

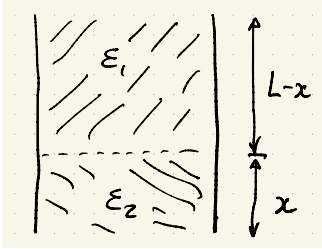

Abbildung 13: Plattenkondensator mit zwei Dielektrika.

Der Grund für die Differenz zwischen Gl. (5.64) und Gl. (5.63) ist, dass diese Größe zwei *unterschiedliche* Energien beschreibt. In der Herleitung Gl. (5.64) halten wir die Lage aller Ladungen fest und addieren weitere Ladungen zur Ladungsverteilung. In Gl. (5.63) lassen wir induzierte Ladungsverteilung auf den neuen freien Ladungen reagieren. Das können wir sehen, weil wir $\Delta\vec{D}$ in ΔW benutzen und $\vec{D}$ ein Beitrag von der Polarisation des Materials hat. Die Änderung der Polarisation beschreibt die Änderung der Verteilung der induzierten Ladungen.

Ein weiterer interessanter Punkt zu diskutieren, ist die Kraft auf einem Dielektrikum. Dieses Problem ist kompliziert und wir werden dies mit Hilfe eines Beispiels untersuchen. Wir betrachten einen Plattenkondesator und stellen uns vor, dass der Raum zwischen den Platten mit zwei Dielektrika gefüllt ist. Die dielektrische Konstanten dieser Dielektrika sind ϵ_1 und ϵ_2 (siehe Fig. 13).

Wir wollen jetzt die Kapazität dieses Kondensators berechnen. In diesem Fall sind die Randbedingungen

$$E_1 = E_2, \tag{5.65}$$

sodass

$$V = E_1 d = E_2 d. \tag{5.66}$$

Allerdings sind die Oberflächenladungen unterschiedlich. Wir schreiben

$$D_1 = \frac{Q_1}{A_1}, \quad D_2 = \frac{Q_2}{A_2}. \tag{5.67}$$

Dann gilt

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_1\epsilon_0} = \frac{Q_1}{A_1\epsilon_1\epsilon_0} = E_2 = \frac{Q_2}{A_2\epsilon_2\epsilon_0}. \tag{5.68}$$

Wir nehmen an, dass die Platten die Ladungen $\pm Q$ tragen, sodass

$$Q = Q_1 + Q_2. \tag{5.69}$$

Wir finden dann

$$Q_i = \frac{A_i\epsilon_i Q}{A_1\epsilon_1 + A_2\epsilon_2}, \quad i = 1, 2. \tag{5.70}$$

Die Potenzialdifferenz zwischen den Platten ist dann

$$V = E_1 d = \frac{Q_1 d}{A_1\epsilon_1\epsilon_0} = \frac{Qd}{\epsilon_0(A_1\epsilon_1 + A_2\epsilon_2)}, \quad i = 1, 2. \tag{5.71}$$

Falls die Länge der Platte L ist und die Grenze zwischen zwei Dielektrika diese Länge in zwei Intervallen mit Längen $L - x$ und x verteilt, dann gilt

$$A_1 = A\frac{L-x}{L}, \quad A_2 = A\frac{x}{L}. \tag{5.72}$$

Dann finden wir

$$V = \frac{Qd}{A\epsilon_0}\frac{1}{\epsilon_1\left(1 - \frac{L}{x}\right) + \epsilon_2\frac{x}{L}}. \tag{5.73}$$

Als nächsten Schritt berechnen wir die Energie in diesem Kondensator. Wir finden

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int \vec{D}\cdot\vec{E}\ \mathrm{d}^3\vec{r} = \frac{1}{2}\left(D_1\frac{L-x}{L} + D_2\frac{x}{L}\right)EAd \\ &= \frac{1}{2}\left(\epsilon_1\frac{L-x}{L} + \epsilon_2\frac{x}{L}\right)E^2Ad = \frac{Q^2d}{2A\epsilon_0}\frac{1}{\left(\epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1)\frac{x}{L}\right)}. \end{aligned} \tag{5.74}$$

Es ist offensichtlich, dass Gl. (5.74) x-abhängig ist. Das bedeutet, dass wir die Arbeit leisten sollen, falls wir die Grenze zwischen zwei Dielektrika ändern wollen. Nehmen wir an, dass $\epsilon_2 > \epsilon_1$ ist. Gl. (5.74) zeigt, dass die Energie des Kondensators kleiner wird, falls wir x größer machen. Das bedeutet, dass

es die Kraft am Dielektrikum gibt, welche in die Richtung *abnehmender* dielektrischer Konstante ausgerichtet ist; in diesem Fall versucht diese Kraft x größer zu machen.

Zwei weitere Bemerkungen.

1. Der Zusammenhang zwischen Polarisation $\vec{P}$ und elektrischem Feld $\vec{E}$

$$\vec{P} = \chi \vec{E}, \tag{5.75}$$

ist sogar für lineare Dielektrika nicht immer gültig. Im allgemeinen Fall ist χ ein Tensor ($3\times$ Matrize), sodass

$$\vec{P} = \hat{\chi} \vec{E}, \tag{5.76}$$

und

$$\hat{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix}. \tag{5.77}$$

2. Es gibt zwei Mechanismen die Materialien zu polarisieren. Ein Mechanismus – induzierte Polarisation – haben wir am Anfang dieser Vorlesung diskutiert. Dieses Mechanismus ist für die Polarisation der Materialien verantwortlich, welche aus neutralen Atomen ohne Dipolmomenta zusammengestellt sind. Es gibt aber auch Substanzen, die aus Molekülen entstehen, welche ohne elektrisches Feld ein Dipolmoment haben. Was passiert, falls wir solches Dielektrikum in elektrisches Feld platzieren?

   Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir eine Ladungsverteilung im kleinen räumlichen Gebiet $\mathcal{V}$. Die Ladungsverteilung befindet sich im externen elektrischen Feld. Die zusätzliche Energie der Verteilung wegen des externes Felds ist

$$U(\vec{r}) = \int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3 \vec{r}_1 \, \rho(\vec{r}_1) \varphi(\vec{r} + \vec{r}_1), \tag{5.78}$$

   wobei φ das elektrische Potential des externen Felds ist. Weil wir über kleines Gebiet integrieren, können wir $\varphi(\vec{r} + \vec{r}_1)$ in $\vec{r}_1$ entwickeln. Wir finden dann

$$U(\vec{r}) \approx Q_{\mathcal{V}} \varphi(\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{d}, \tag{5.79}$$

wobei $Q_{\mathcal{V}}$ die gesamte Ladung und $\vec{d}$ das Dipolmoment der Verteilung sind. Fall $Q_{\mathcal{V}} = 0$ ist, finden wir

$$U(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{d}. \tag{5.80}$$

Das ist die Energie eines Dipols im elektrischen Feld. Diese Formel besagt, dass ein Dipol im elektrischen Feld sich dreht und versucht sich entlang des elektrischen Felds $\vec{E}$ zu orientieren.

Auch dieses Mechanismus resultiert in der Polarisation $\vec{P}$ welche proportional zum $\vec{E}$ ist. Um das zu sehen, merken wir das termische Effekten versuchen das Dipolmoment orientierungslos zu machen. Um den Mittlewert des Dipolmoments zu berechnen, nehmen wir Boltzman Verteilung $e^{-U/(kT)}$, wobei T die Temperatur ist, und schreiben

$$\vec{d}_m = \frac{\langle \vec{d} e^{-U/(kT)} \rangle}{\langle e^{-U/kT} \rangle}, \tag{5.81}$$

wobei wir über die Richtung des Dipols integrieren. Weil für normale Temperaturen $U/kT \ll 1$ ist, können wir die e-Funktion in der obigen Gleichung entwickeln. Wir erhalten

$$\vec{d}_m = \frac{\langle \vec{d} \left(1 + \frac{\vec{d}\cdot\vec{E}}{kT} + \ldots\right) \rangle}{\langle 1 + \frac{\vec{d}\cdot\vec{E}}{kT} + \ldots \rangle} \approx \langle \vec{d} \frac{\vec{d} \cdot \vec{E}}{kT} \rangle = \frac{d^2 \vec{E}}{3kT}, \tag{5.82}$$

sodass die Polarisation

$$\vec{P} = n\vec{d}_m = \frac{nd^2}{3kT}\, \vec{E}, \tag{5.83}$$

wober n die Dichte der Molekulen mit dem Dipolmoment d ist.

6 Lorentz Kraft und Bio-Savar'sches Gesetz

Wir haben bis jetzt über elektrische Felder und elektrische Kräfte geredet. Es gibt aber ein anderes Feld, welches *bewegende* geladene Teilchen beeinflusst. Dieses Feld heißt *magnetisches* Feld; wir bezeichnen es mit $\vec{B}$. Falls ein Teilchen mit der Ladung q im magnetischen Feld $\vec{B}$ sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, verspürt es die Wirkung einer Lorentz-Kraft. Diese Kraft lautet

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}. \tag{6.1}$$

Andererseits kann ein geladenes *bewegendes* Teilchen das magnetische Feld erzeugen. Die Formel dazu lautet

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\ q}{4\pi} \frac{\vec{v}_1 \times \vec{(}r - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}, \tag{6.2}$$

wobei q die elektrische Ladung, $\vec{r}_1$ der Ortsvektor und $\vec{v}_1 = \mathrm{d}\vec{r}_1/\mathrm{d}t$ die Geschwindigkeit des Teilchens sind. Der Parameter μ_0 heißt *die Permeabilität des leeren Raums*. Numerisch lautet es

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ N/A^2, \tag{6.3}$$

wobei N ein Newton und A ein Ampere $1A = C/s$ sind. Die Einheit des magnetischen Felds ist *Tesla* T; $1T = 1N/A/m$. Die obige Gleichungen formen die Basis für Magnetostatik.

Eine wichtige Eigenschaft der Lorentz-Kraft in Gl. (6.1) ist, dass diese Kraft die Energie des Teilchens nicht ändert und deswegen auch keine Arbeit leistet. Um das zu sehen, nehmen wir ein geladenes Teilchen im magnetischen Feld. Die kinetische Energie des Teilchens ist

$$K = \frac{m\vec{v}^2}{2}. \tag{6.4}$$

Die Geschwindigkeit ist eine Funktion der Zeit. Um die Zeitabhängigkeit der kinetischen Energie zu identifizieren, leiten wir K nach der Zeit. Wir erhalten

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = m\vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\ m\vec{v} \cdot [\vec{v} \times \vec{B}] = 0, \tag{6.5}$$

weil die Beschleunigung und die Geschwindigkeit orthogonal zueinander sind.

Was passiert dann mit dem geladenen Teilchen im magnetischen Feld? Nehmen wir an, dass das magnetische Feld in z-Richtung ausgerichtet ist, $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Die Bewegungsgleichung ist dann

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\vec{v} \times \vec{B}. \tag{6.6}$$

Geschrieben für Komponenten des Vektors $\vec{v}$, lauten die Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{qB}{m}v_y, \quad \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\frac{qB}{m}v_x, \quad \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{6.7}$$

Es folgt aus diesen Gleichungen, dass v_z eine Konstante ist.

Um die Gleichungen für v_x und v_y zu lösen, ist es günstig eine komplexe Größe

$$\xi = v_x + iv_y, \tag{6.8}$$

einzuführen. Es folgt

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = -\frac{iqB}{m}\xi. \tag{6.9}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$\xi(t) = \xi_0 e^{-i\omega t}, \tag{6.10}$$

wobei ξ_0 eine komplexe Konstante ist und

$$\omega = \frac{qB}{m}. \tag{6.11}$$

Diese Größe heißt *Zyklotronfrequenz*. Wir schreiben $\xi_0 = v_\perp e^{-i\phi_0}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \xi(t) &= v_x(t) + iv_y(t) = v_\perp e^{-i(\omega t+\phi_0)} \\ &= v_\perp \cos(\omega t + \phi_0) - iv_\perp \sin(\omega t + \phi_0). \end{aligned} \tag{6.12}$$

Es folgt

$$v_x = v_\perp \cos(\omega t + \phi_0), \quad v_y = -v_\perp \sin(\omega t + \phi_0). \tag{6.13}$$

Diese Gleichungen können wir noch ein Mal integrieren. Dann erhalten wir

$$x = x_0 + \frac{v_\perp}{\omega}\sin(\omega t + \phi_0),\ y = y_0 + \frac{v_\perp}{\omega}\cos(\omega t + \phi_0), \tag{6.14}$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir

$$(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 = \frac{v_\perp^2}{\omega^2}. \tag{6.15}$$

Aus Gl. (6.15) folgt, dass die Bahn des Teilchens in der (x-y)-Ebene ein Zirkel mit dem Radius $R = v_\perp/\omega$ ist. Falls das Teilchen zusätzlich die Geschwindigkeitkomponente in der z-Richtung hat, ist die gesamte Bahn eine Schraubenbahn.

Wir wissen, dass es in einem Leiter viele geladene Teilchen (Elektronen) gibt, welche sich frei bewegen können. Normalerweise bewegen sich die Elektronen chaotisch (thermische Bewegung), sodass, falls wir einen Leiter in ein magnetisches Feld platzieren, die gesamte Kraft eine Null ist. Aber, falls wir einen Leiter mit eine Batterie verbinden, welche eine Potentialdifferenz erzwingt, fangen die Elektronen an, sich koherent zu bewegen; solche gemeinsame Bewegungen beschreiben wir als *Strom*.

Wir definieren jetzt genau, was wir unter diesem Begriff verstehen. Die *Stromdichte* definieren wir mit Hilfe folgender Gleichung

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = \rho(t, \vec{r})\ \vec{v}(t, \vec{r}), \tag{6.16}$$

wobei $\rho(t, \vec{r})$ die Ladungsdichte der Elektronen und $\vec{v}(t, \vec{r})$ die Geschwindigkeit der Elektronen sind. Im Allgemeinen sind beide diese Größen von t und $\vec{r}$ abhängig.

Mit Hilfe der Stromdichte berechnen wir die Ladung, die per Zeiteinheit durch die infinitesimale Fläche fließt. Wir charakterisieren die infinitesimale Fläche mit einem Normal-Vektor $\mathrm{d}\vec{S}$. Dann

$$\Delta Q = \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}\ \Delta t. \tag{6.17}$$

Betrachten wir ein infinitesimales Volumen. Durch die Grenze dieses Volumens fließen die Ladungen. Die Ladung, welche aus dem Volumen per Zeiteinheit fließt, berechnen wir, indem wir den Strom über die Grenze des Volumens integrieren

$$\left.\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right|_{\text{aus}} = \int\limits_{\partial\mathcal{V}} \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{j}. \tag{6.18}$$

Falls diese Größe keine Null ist, ändert sich die Ladung in dem Volumen. Diese Änderung führt zur Änderung der Ladungsdichte in dem Volumen, sodass

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3\vec{r}\,\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{6.19}$$

Weil

$$\left.\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right|_{\text{aus}} = -\frac{\Delta Q}{\Delta t}, \tag{6.20}$$

erhalten wir folgende Gleichung

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3\vec{r}\,\frac{\partial \rho}{\partial t} + \int\limits_{\partial\mathcal{V}} \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{j} = 0. \tag{6.21}$$

Um diese Gleichung zu vereinfachen, wollen wir das Integral über die Oberfläche als Volumen-Integral umschreiben. Das machen wir mit Hilfe des Gauss'schen Satzes:

$$\int\limits_{\partial\mathcal{V}} \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{j} = \int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3\vec{r}\;\vec{\nabla}\cdot\vec{j}. \tag{6.22}$$

Es folgt

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3\vec{r}\,\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}\right] = 0. \tag{6.23}$$

Weil diese Gleichung für beliebige Volumen gilt, muss der *Integrand* eine Null sein. Schließlich erhalten wir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0. \tag{6.24}$$

Diese Gleichung nennt man die *Kontinuitätsgleichung*.

Der Strom ist eine kollektive Bewegung der geladenen Teilchen. Falls diese Teilchen sich im magnetischen Feld bewegen, ist die Lorentz-Kraft vorhanden. Das bedeutet, dass es eine Kraft gibt, welche an einem Draht mit Strom im magnetischen Feld wirkt.

Um diese Kraft zu berechnen, schreiben wir die Lorentz-Kraft, die auf die Ladung $\mathrm{d}N$ wirkt, welche sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt. Wir erhalten

$$\mathrm{d}\vec{f} = \mathrm{d}N\,[\vec{v}\times B]. \tag{6.25}$$

$\mathrm{d}N$ berechnen wir, indem wir die Ladungsdichte mit dem Volumen multiplizieren

$$\mathrm{d}N = \rho \, \mathrm{d}^3\vec{r}. \tag{6.26}$$

Aus Gl. (6.25) folgt

$$\mathrm{d}\vec{f} = \rho \, \mathrm{d}^3\vec{r} \, [\vec{v} \times B] = \mathrm{d}^3\vec{r} \, [\vec{j} \times B]. \tag{6.27}$$

Mit Hilfe dieser Formel können wir die Kraft berechnen, indem wir über das gesamte Volumen integrieren.

Falls der Draht sehr dünn ist, können wir die obige Formel vereinfachen. In diesem Fall fließt der Strom entlang des Drahts und wir können über die Querschnittsfläche des Drahts integrieren,

$$\vec{I} = \int \mathrm{d}S \, \vec{j}. \tag{6.28}$$

$\vec{I}$ ist der Strom in dem Draht. Die Kraft können wir dann so schreiben

$$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}l[\vec{I} \times B], \tag{6.29}$$

wobei $\mathrm{d}l$ die Verschiebung entlang des Drahts beschreibt. Die gesamte Kraft erhalten wir, indem wir über die Länge des Drahts integrieren

$$\vec{F} = \int\limits_{\text{Draht}} \mathrm{d}l \, [\vec{I} \times B]. \tag{6.30}$$

Wir haben am Anfang dieser Vorlesung gesagt, dass bewegende Ladungen magnetisches Feld erzeugen. Strom ist eine kollektive Bewegung von Ladungen; deswegen soll ein Draht mit Strom magnetisches Feld erzeugen. Wir nehmen an, dass der Strom zeitunabhängig ist. Dann schreiben wir mit Hilfe von Gl. (6.2)

$$\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \, \mathrm{d}N}{4\pi} \frac{\vec{v}_1 \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{r}_1) \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \, \mathrm{d}^3\vec{r}_1. \tag{6.31}$$

Diese Formel ist exakt – wir können mit Hilfe dieser Formel das magnetische Feld berechnen, falls wir die Stromdichte kennen. Für gleichmäßige Ströme und *dünne* Drähte können wir über den Querschnitt des Drahts integrieren.

Nach dieser Integration erhalten wir den Strom, der dürch den Draht fließt. Dann

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{\text{Draht}} \frac{\mathrm{d}\vec{I}(\vec{r}_1) \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}. \tag{6.32}$$

Diese Formel heißt *Bio-Savart'sches Gesetz*.

Als Beispiel berechnen wir das magnetische Feld eines unendlich langen Drahts mit dem Strom I. Wir wählen die z Achse entlang des Drahts aus. Wir benutzen zylindrische Koordinaten. Dann ist $\mathrm{d}\vec{I} = I\ \mathrm{d}z_1\ \vec{e}_z$ und auch $\vec{r}_1 = z_1\vec{e}_z$. Vektor $\vec{r}$ schreiben wir mit Hilfe von zylindrischen Koordinaten

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z. \tag{6.33}$$

Dann,

$$\mathrm{d}\vec{I}(\vec{r}_1) \times (\vec{r} - \vec{r}_1) = \mathrm{d}z_1\ I\rho\ \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = I\ \rho\ \vec{e}_\phi\ \mathrm{d}z_1, \tag{6.34}$$

weil $\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \vec{e}_\phi$. Wir erhalten

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I\rho\vec{e}_\phi}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z_1}{(\rho^2 + (z - z_1)^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I\vec{e}_\phi}{4\pi\rho} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{3/2}}. \tag{6.35}$$

Weil

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{3/2}} = 2 \tag{6.36}$$

ist, folgt es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi. \tag{6.37}$$

Wir haben gesehen, dass elektrisches Feld Differenzialgleichungen erfüllt, welche unter anderem $\vec{E}$ und die Ladungsdichte ρ verbindet,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \tag{6.38}$$

Es ist zu erwarten, dass es ähnliche Gleichungen für magnetisches Feld gibt. Um diese Gleichungen herzuleiten, betrachten wir ein Volumen mit dem Strom. Dieser Strom erzeugt das magentische Feld

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\ \ \vec{j}(\vec{r}_1) \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}. \tag{6.39}$$

Als ersten Schritt berechnen wir die Divergenz des magnetischen Felds $\vec{B}(\vec{r})$. Es ist einfach zu sehen, dass diese Divergenz eine Null ist

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \tag{6.40}$$

Um das zu zeigen, schreiben wir[11]

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_r \cdot \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \; \vec{\nabla}_r \cdot \left[\vec{j}(\vec{r}_1) \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \, \vec{j}(\vec{r}_1) \cdot \vec{\nabla}_r \times \vec{\nabla}_r \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) = 0. \end{aligned} \tag{6.41}$$

Als nächsten Schritt berechnen wir die Rotation von $\vec{B}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_r \times \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \; \vec{\nabla}_r \times \vec{j}(\vec{r}_1) \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \; \left[\vec{j}(\vec{r}_1) \, \vec{\nabla}_r \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} - \vec{j}(\vec{r}_1) \cdot \vec{\nabla}_r \, \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \right]. \end{aligned} \tag{6.42}$$

Den ersten Term haben wir schon gesehen als wir die Divergenz des elektrischen Feldes diskutiert hatten. Es gilt

$$\vec{\nabla}_r \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} = 4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_1). \tag{6.43}$$

Um den zweiten Term zu vereinfachen schreiben wir

$$\vec{j}(\vec{r}_1) \cdot \vec{\nabla}_r \, \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} = -\vec{j}(\vec{r}_1) \cdot \vec{\nabla}_{r_1} \, \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}. \tag{6.44}$$

Dann,

$$\begin{aligned} &\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \, \vec{j}(\vec{r}_1) \cdot \vec{\nabla}_r \, \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)_i}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} = -\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \, \vec{j}(\vec{r}_1) \cdot \vec{\nabla}_{r_1} \, \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)_i}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \\ &= -\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \; \left[\vec{\nabla}_{r_1} \cdot \left(\vec{j}(\vec{r}_1) \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)_i}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \right) - \left(\vec{\nabla}_{r_1} \cdot \vec{j}(\vec{r}_1) \right) \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)_i}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \right]. \end{aligned} \tag{6.45}$$

Das Integral in Gl. (6.45) ist eine Null. Den ersten Term können wir mit Hilfe des Gauss'schen Satzes integrieren; falls wir annehmen, dass die Stromdichte

[11] Wir schreiben $\vec{\nabla}_{\vec{r}}$ um die Ableitung nach $\vec{r}$ zu bezeichnen.

bei $\vec{r}_1 = \infty$ eine Null ist, ist auch das Integral Null. Der zweite Term is eine Null, weil für zeitunabhängige Ladungsverteilungen gilt

$$\vec{\nabla}_{r_1} \cdot \vec{j}(\vec{r}_1) = 0. \tag{6.46}$$

Dieses Ergebnis folgt aus der Kontinuitätsgleichung.

Falls wir alle Zwischenergebnisse zusammensetzen, erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}). \tag{6.47}$$

Diese Gleichung ist als *Amper'sches Gesetz* bekannt.

Wir können diese Gleichung in Integral-Form umschreiben, indem wir beide Seiten über eine Oberfläche integrieren. Wir erhalten

$$\mu_0 \int \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{j} = \int \mathrm{d}\vec{S} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r})] = \oint\limits_{\partial S} \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{B}, \tag{6.48}$$

wobei wir in dem letzten Schritt die Integration über die Oberfläche als Integration über die Grenze der Oberfläche umgeschrieben haben.

Ähnlich wie beim Gauss'schen Gesetz, können wir das Ampere'sches Gesetz in Integral-Form verwenden um magnetische Felder zu bestimmen. Allerdings sollen wir ähnlich wie mit dem Gauss'schen Gesetz die Symmetrie des Problems benutzen, um die Richtung des B-Felds vorherzusagen.

Als Beispiel berechnen wir noch ein Mal das magnetische Feld des unendlich langen Drahtes mit dem Strom I. Wie vorher, assoziieren wir den Draht mit der z-Achse. Es ist einfach zu sehen, dass das magnetische Feld nur die $\vec{e}_\phi$-Komponente haben kann. Dann schreiben wir

$$\vec{B} = B\vec{e}_\phi. \tag{6.49}$$

Als Fläche nehmen wir eine Kreisfläche mit dem Radius ρ in der $(x-y)$ Ebene. Dann

$$\mu_0 \int \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{j} = \mu_0 I = B 2\pi\rho, \tag{6.50}$$

wobei wir benutzt haben, dass $\mathrm{d}\vec{l} = \rho\vec{e}_\phi \, \mathrm{d}\varphi$ ist. Die Gl. (6.37) folgt sofort.

Anderes Beispiel ist das magnetische Feld einer sehr langen Spule. Die Spule besteht aus n Schleifen pro Längeneinheit, die sich auf einem Zylinder

mit dem Radius R befinden. Die Schleifen tragen stationären Strom I. Für jeden Punkt ist der Strom in Richtung $\vec{e}_\phi$ ausgerichtet. Aus dem Amper'schen Gesetz und der Tatsache, dass es keine Abhängigkeit von z geben kann, folgt, dass das magnetische Feld in diesem Fall nur der z-Achse entlang sein kann. Dann schreiben wir $\vec{B} = B(\rho)\vec{e}_z$.

Wir berechnen dann die Rotation von $\vec{B}$ entweder innerhalb oder außerhalb der Spule wo es keine Ströme gibt. Dann,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\partial B}{\partial \rho}\vec{e}_\phi = 0, \tag{6.51}$$

sodass B ρ-unabhängig ist.

Es gibt natürlich die Möglichkeit, dass das B-Feld außerhalb und innerhalb der Spule unterschiedliche Werte hat. Nehmen wir als experimentelle Tatsache, dass außerhalb der Spule $B = 0$ ist. Dann finden wir innerhalb der Spule

$$B\Delta L = \mu_0 \Delta L n I, \tag{6.52}$$

sodass

$$\vec{B} = \mu_0\ n\ I\ \theta(R-\rho)\ \vec{e}_z. \tag{6.53}$$

Im Fall der Elektrostatik haben wir mit dem Feld $\vec{E}$ angefangen, aber dann das Potential ϕ eingeführt $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$. Ähnlich, können wir im Fall des magnetischen Feld ein *Vektorpotential* einführen. Die Rotation des Vektorpotentials ist dann magnetisches Feld

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{6.54}$$

Wir merken, dass diese Formel mit der Formel

$$\vec{\nabla} \cdot B = 0, \tag{6.55}$$

kompatibel ist. Das Ampere'sche Gesetz können wir dann umschreiben

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \tag{6.56}$$

Weil wir $\vec{A}$ brauchen um magnetisches Feld zu berechnen, können wir $\vec{A}$ immer so auswählen, dass $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Um das zu sehen, nehmen wir an, dass wir ein Vektorpotential $\vec{\tilde{A}}$ haben, und dessen Divergenz keine Null ist

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{A}} \neq 0. \tag{6.57}$$

Wir konstruieren ein neues Potential $\vec{A}$, indem wir den Gradient einer Funktion zu $\tilde{A}$ addieren

$$\vec{A} = \vec{\tilde{A}} + \vec{\nabla}\phi. \tag{6.58}$$

Weil die Rotation eines Gradients eine Null ist, erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{\tilde{A}} = \vec{B}. \tag{6.59}$$

Diese Gleichung bedeutet, dass das magnetische Feld, welches wir mit Hilfe von $\vec{A}$ berechnen, identisch ist zum magnetischen Feld, das wir mit Hilfe von $\vec{\tilde{A}}$ berechnen. Allerdings,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{A}} + \vec{\nabla}^2\phi. \tag{6.60}$$

Wir können dann ϕ so auswählen, dass

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{A}} = -\vec{\nabla}^2\phi. \tag{6.61}$$

Dann gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \tag{6.62}$$

Letztendlich finden wir aus Gl. (6.56)

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} = -\mu_0\vec{j}. \tag{6.63}$$

Diese Formel sieht wie die Poisson-Gleichung aus und die Lösung ist ähnlich. Wir benutzen

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_1) \tag{6.64}$$

und finden

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \, \frac{\vec{j}(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \tag{6.65}$$

Als Beispiel berechnen wir das Vektorpotential eines unendlich langen Drahts mit dem Strom I. In diesem Fall sieht die Stromdichte so aus

$$\vec{j} = I\,\vec{e}_z\delta^{(2)}(\vec{\rho}), \tag{6.66}$$

wobei $\vec{\rho}$ ein Ortsvektor in $(x-y)$-Ebene ist. Dann,

$$\begin{aligned}\vec{A}(z,\vec{\rho}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\,\frac{I\vec{e}_z\delta^{(2)}(\vec{\rho}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} = \frac{\mu_0 I\vec{e}_z}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z_1}{\sqrt{(z-z_1)^2+\vec{\rho}^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I\vec{e}_z}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z_1}{\sqrt{z_1^2+\vec{\rho}^2}}.\end{aligned} \tag{6.67}$$

Dieses Integral ist etwas komisch – wir machen die Variablentransformation $z_1 \to \xi$, wobei $z_1 = \rho\xi$, und finden

$$\vec{A}(z,\vec{\rho}) = \frac{\mu_0 I\vec{e}_z}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2+1}}. \tag{6.68}$$

Wir sehen, dass $\vec{A}$ in Gl. (6.68) unabhängig von z und $\vec{\rho}$ ist. Dann, weil $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ ist, ist das magnetische Feld für konstantes Vektorpotential eine Null. Allerdings haben wir das magnetische Feld des Drahts vorher berechnet und wissen daher, dass es keine Null ist. Also, was ist schief gelaufen?

Um das zu verstehen, merken wir, dass das Integral in Gl. (6.68) *divergent* ist; das bedeutet, dass diese Formel wenig Sinn macht und wir diese deshalb etwas genauer untersuchen sollten. Statt mit unendlich langem Draht zu arbeiten, nehmen wir an, dass die Länge des Drahts $2L$ ist. Dann,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I\vec{e}_z}{4\pi}\int\limits_{-L-z}^{L-z}\frac{\mathrm{d}z_1}{\sqrt{z_1^2+\vec{\rho}^2}} = \frac{\mu_0 I\vec{e}_z}{4\pi}\int\limits_{-(L+z)/\rho}^{(L-z)/\rho}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2+1}}. \tag{6.69}$$

Weil eventuell wir uns für sehr lange L interessieren, sollen wir dieses Integral im Limit $L \gg |z|, \rho$ untersuchen, Wir benutzen

$$\lim_{X\to\infty} = \int\limits_0^X \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2+1}} = \ln X + \ln(2) + \mathcal{O}(X^{-1}) \tag{6.70}$$

und erhalten

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I\vec{e}_z}{4\pi}\left(2\ln L - 2\ln\rho + 2\ln 2 + \mathcal{O}(L^{-1})\right). \tag{6.71}$$

Weil alle ρ unabhängige Terme das magnetische Feld nicht ändern, ist in diesem Fall nur $\ln\rho$ relevant. Dann schreiben wir

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 I \vec{e}_z}{2\pi} \ln\rho. \tag{6.72}$$

Aus dieser Formel können wir dann das magnetische Feld berechnen und erhalten das Ergebnis in Gl. (6.37).

Ein anderes Beispiel ist das Vektorpotential einer Sphäre mit dem Radius R und der Oberfächenladung σ; die Sphäre dreht sich mit der Winkel-Geschwindigkeit ω um die Achse $\vec{a}$.

Als ersten Schritt wollen wir die Stromdichte berechnen. Der Strom ist ein Produkt zwischen der Ladungsdichte und der Geschwindgkeit. Die Geschwindigkeit des Teilchens mit Ortsvektor $\vec{r}$, welche sich um die Achse $\vec{a}$ dreht, ist $\vec{v} = \omega\vec{a}\times\vec{r}$. Die Ladungsdichte ist $\rho(\vec{r}) = \sigma\delta(r-R)$. Dann

$$\vec{j} = \rho\vec{v} = \rho\omega\ \vec{a}\times\vec{r} = \sigma\omega\delta(r-R)\ \vec{a}\times\vec{r}. \tag{6.73}$$

Das Vektorpotential ist dann

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\ \frac{\vec{j}(\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} = \frac{\mu_0\sigma\omega R^3}{4\pi}\vec{a}\times\vec{K}, \tag{6.74}$$

wobei

$$\vec{K} = \frac{1}{R}\int\limits_{|\vec{r}_1|=R} \mathrm{d}\Omega_1\ \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}. \tag{6.75}$$

Dieses Integral haben wir in der Vorlesung 5 gerechnet. Der Vollständigkeit halber schreiben wir das Integral noch einmal

$$\vec{K} = \vec{r}\begin{cases} \frac{4\pi}{3}\frac{R}{r^3}, & r > R; \\ \frac{4\pi}{3}\frac{1}{R^2}, & r < R. \end{cases} \tag{6.76}$$

Wir setzen dann alles zusammen und erhalten das Vektorpotential

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 R^4\sigma\theta(r-R)}{3r^3}\ [\vec{\omega}\times\vec{r}] + \frac{\mu_0 R\sigma\theta(R-r)}{3}\,[\vec{\omega}\times\vec{r}]\,. \tag{6.77}$$

In dieser Formel haben wir $\vec{\omega} = \omega\ \vec{a}$ eingeführt. Wir merken, z.B. dass das magnetische Feld innerhalb der Sphäre gleichförmig ist

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{2\mu_0 R\sigma}{3}\,\vec{\omega}, \quad r < R. \tag{6.78}$$

Als letztes Beispiel betrachte ich noch einmal die Spule. Die Stromdichte schreiben wir als $\vec{j} = In\vec{e}_\phi\delta(\rho - R)$, wobei n die Zahl der Schleifen per Längeneinheit, I der Strom und R der Radius der Spule sind. Dann

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu_0 In}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\ \frac{\vec{e}_{\phi_1}\delta(\rho_1 - R)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} = -\frac{\mu_0 In}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\ \frac{\vec{e}_z \times \vec{e}_{\rho_1}\delta(\rho_1 - R)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \\ &= -\frac{\mu_0 InR}{4\pi}\vec{e}_z \times \vec{K}_s,\end{aligned} \tag{6.79}$$

wobei

$$\vec{K}_s = \int\limits_{\rho_1 = R} \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}\phi_1\ \frac{\vec{e}_{\rho_1}}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \tag{6.80}$$

Ähnlich zum vorherigen Beispiel schreiben wir

$$\vec{K}_s = X_s\vec{e}_\rho \tag{6.81}$$

wobei

$$X_s = \int \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}\phi_1\ \frac{\vec{e}_{\rho_1}\cdot\vec{e}_\rho}{\sqrt{(z_1 - z)^2 + (\vec{\rho} - \vec{\rho}_1)^2}}. \tag{6.82}$$

Das Integral über z ist divergent und wir sollen mit diesem Integral genau so umgehen wie im Fall vom unendlich langen Draht. Dann finden wir

$$\begin{aligned}X_s &= -\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi_1\ \vec{e}_{\rho_1}\cdot\vec{e}_\rho \ln\left[(\vec{\rho} - \vec{\rho}_1)^2\right] \\ &= -\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi_1 \cos\phi_1\ \ln[\rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos\phi_1].\end{aligned} \tag{6.83}$$

Um weiter zu kommen, machen wir eine partielle Integration und erhalten

$$X_s = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi_1\ \frac{2\rho R\sin^2\phi_1}{\rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos\phi_1} = \frac{2\pi R}{\rho}\theta(\rho - R) + \frac{2\pi\rho}{R}\theta(R - \rho). \tag{6.84}$$

Wir stellen alles zusammen und erhalten

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 InR}{2}\ \vec{e}_\phi\ \left\{\frac{R}{\rho}\ \theta(\rho - R) + \frac{\rho}{R}\ \theta(R - \rho)\right\}. \tag{6.85}$$

Wie können jetzt das magnetische Feld der Spule noch einmal herleiten. Weil $\vec{A}$ nur $\vec{e}_\phi$-Komponente hat, welche von ρ abhängt, ist es einfach die Rotation zu berechnen. Wir erhalten

$$\vec{B} = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho A_\phi)\ \vec{e}_z. \tag{6.86}$$

Für $\rho > R$ ist $A_\phi \sim 1/\rho$ und ρA_ϕ ist eine Konstante. Es folgt, dass außerhalb der Spule $\vec{B} = 0$. Innerhalb der Spule ist $A_\phi \sim \rho$ und wir finden

$$\vec{B} = \mu_0 I n \vec{e}_z. \tag{6.87}$$

Dieses Ergebnis für das magnetische Feld der Spule haben wir schon vorher berechnet.

Ähnlich wie beim elektromagnetischen Potential können wir das Vektorpotential und das magnetische Feld einer Stromverteilung bei größer Entfernung diskutieren. Wir schreiben

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3\vec{r}_1\ \frac{\vec{j}(\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}, \tag{6.88}$$

und entwickeln in r_1/r. Wir erhalten

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3\vec{r}_1\ \vec{j}(\vec{r}_1) + \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3\vec{r}_1\ \vec{j}(\vec{r}_1)\frac{\vec{r}_1\cdot\vec{r}}{r^3} + \ldots \tag{6.89}$$

Wir analysieren den ersten Term. Für zeitunabhängige Stromverteilung gilt

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0. \tag{6.90}$$

Dann schreiben wir

$$\vec{\nabla}_i(\vec{r}_k\vec{j}_i) = \delta_{ik}\vec{j}_i + \vec{r}_k\vec{\nabla}_i\vec{j}_i = \vec{j}_k. \tag{6.91}$$

Wir können jetzt beide Seiten dieser Gleichung über den ganzen Raum integrieren. Wir erhalten

$$\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{j}_k(\vec{r}) = \int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{j}_k(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{\nabla}_i(\vec{r}_k\vec{j}_i) = 0. \tag{6.92}$$

Der letzte Schritt folgt, weil wir die totale Ableitung integrieren und es keinen Strom bei $r = \infty$ gibt.

Wir haben gezeigt, dass der erste Term in Gl. (6.89) eine Null ist. Den zweiten Term können wir auch umschreiben. Betrachten wir $\vec{j}(\vec{r})(\vec{r}\cdot\vec{k})$ wobei $\vec{k}$ ein konstanter Vektor ist, und berechnen

$$\vec{\nabla}_i \left(\vec{j}_i(\vec{r})(\vec{r}\cdot\vec{k})\right) = \vec{j}\cdot\vec{k}. \tag{6.93}$$

Dann schreiben wir

$$\vec{\nabla}_i \left[\vec{r}_j\, \vec{j}_i(\vec{r})(\vec{r}\cdot\vec{k})\right] = \vec{j}_j(\vec{r})(\vec{r}\cdot\vec{k}) + \vec{r}_j\, \vec{j}\cdot\vec{k}. \tag{6.94}$$

Falls wir die linke Seite über das gesamte Volumen integrieren, erhalten wir eine Null, weil wir die totale Ableitung integrieren. Das bedeutet

$$\int \mathrm{d}^3\vec{r}\ \vec{j}\,(\vec{r}\cdot\vec{k}) = -\int \mathrm{d}^3\vec{r}\ \ \vec{r}\ \ (\vec{j}\cdot\vec{k}). \tag{6.95}$$

Mit Hilfe dieser Formel können wir schreiben

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{j}\,(\vec{r}\cdot\vec{k}) &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\ \left(\vec{j}\,(\vec{r}\cdot\vec{k}) - \vec{r}\ \vec{j}\cdot\vec{k}\right)\\ &= \vec{k}\times\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,[\vec{j}\times\vec{r}] = -\vec{k}\times\vec{m},\end{aligned} \tag{6.96}$$

wobei

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\ \ \vec{r}\times\vec{j}, \tag{6.97}$$

das magnetische Dipolmoment der Stromverteilung ist.

Gl. (6.96) hat eine (für uns) wichtige Konsequenz. Nehmen wir als Vektor $\vec{k}$ einen Basis-Vektor $\vec{e}_i$. Dann gilt

$$\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{j}_k\ \vec{r}_i = -[\vec{e}_i\times\vec{m}]_k \tag{6.98}$$

Jetzt berechnen wir

$$\begin{aligned}\delta_{ki}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{j}_k\ \vec{r}_i &= \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{j}\cdot\vec{r} = -[\vec{e}_i\times\vec{m}]_k\delta_{ki}\\ &= -\epsilon_{abc}\vec{e}_{i,b}m_c\delta_{ai} = -\epsilon_{iic}m_c = 0.\end{aligned} \tag{6.99}$$

Wir haben also gezeigt, dass

$$\int \mathrm{d}^3\vec{r}\ \vec{j}\cdot\vec{r}=0. \tag{6.100}$$

Wir betrachten den zweiten Term in Gl. (6.89). Wir identifizieren den Vektor $\vec{r}/r^3$ mit $\vec{k}$ in Gl. (6.96) und erhalten

$$\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\ \vec{j}(\vec{r}_1)\ \left(\frac{\vec{r}_1\cdot\vec{r}}{r^3}\right)=-\frac{\vec{r}\times\vec{m}}{r^3}. \tag{6.101}$$

Demzufolge erhalten wir das Vektorpotential *in der Dipolnäherung*

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}. \tag{6.102}$$

Das ist der führende Term des Vektorpotentials in multipoler Entwicklung.

Wir berechnen jetzt den Dipolmoment für eine Schleife die aus dünnem Draht gemacht ist. Der Strom I fließt durch die Schleife. Die Form der Schleife ist beliebig. In diesem Fall berechnen wir

$$\vec{m}=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\ \ \vec{r}\times\vec{j}=-\frac{I}{2}\int \mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}, \tag{6.103}$$

wobei $\mathrm{d}l$ die Verschiebung entlang des Drahts ist.

Um die obige Formel zu vereinfachen, betrachten wir das Integral

$$\int \mathrm{d}\vec{l}\cdot(\vec{r}\times\vec{k}), \tag{6.104}$$

wobei $\vec{k}$ ein konstanter beliebiger Vektor ist. Wir verwenden den Stokes'sche Satz und erhalten

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\vec{l}\cdot(\vec{r}\times\vec{k})&=\int \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{\nabla}\times\left[\vec{r}\times\vec{k}\right]\\&=\int \mathrm{d}\vec{S}\cdot\left[(\vec{\nabla}_i\ \vec{r}\,\vec{k}_i)-\vec{k}(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}\right)=-2\int \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{k}.\end{aligned} \tag{6.105}$$

Wir schreiben den ersten Term um

$$\int \mathrm{d}\vec{l}\cdot(\vec{r}\times\vec{k})=\vec{k}\cdot\int \mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}, \tag{6.106}$$

und, weil diese Berechnung für beliebigen Vektor $\vec{k}$ gelten soll, erhalten wir

$$\int \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r} = -2 \int \mathrm{d}\vec{S} = -2\vec{S}, \tag{6.107}$$

wobei $\vec{S}$ die integrierte Fläche der Schleife ist. Dann gilt für das Dipolmomentb

$$\vec{m} = I\vec{S}, \tag{6.108}$$

und

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}. \tag{6.109}$$

Aus diesem Vektorpotential berechnen wir das magnetische Feld eines Dipols

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(\vec{m} - 3\frac{\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{m})}{r^2} \right). \tag{6.110}$$

Schließlich möchten wir die Randbedingungen für das Amper'sche Gesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{6.111}$$

bestimmen. Wir betrachten eine Oberfläche mit dem Strom. Wir nehmen die Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{6.112}$$

und integrieren sie über eine kleine Box

$$0 = \int \mathrm{d}^3\vec{r} \ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \int \mathrm{d}^2\vec{S} \cdot \vec{B} = \vec{n} \cdot \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2 \right), \tag{6.113}$$

wobei $\vec{B}_{1,2}$ magnetische Felder über und unter der Oberfläche, und $\vec{n}$ ein Normal-Vektor zur Oberfläche sind.

Ferner nehmen wir einen Vektor $\vec{e}_j$, welcher entlang des Stroms $\vec{j}$ ausgerichtet ist, und schreiben

$$\vec{B} = B_\perp \vec{n} + B_{||,a}\vec{e}_j + B_{||,b}[\vec{e}_j \times \vec{n}]. \tag{6.114}$$

Wir können jetzt eine infinitesimale viereckige Schleife nehmen, die orthogonal zu $\vec{e}_j$ ist. Wir berechnen das Integral entlang dieser Schleife und erhalten

$$B_{||,b}(1) - B_{II,b}(2) = \mu_0 J. \tag{6.115}$$

Schließlich, falls wir eine Schleife nehmen, die parallel zu $\vec{j}$ läuft, erhalten wir

$$B_{||,a}(1) - B_{II,a}(2) = 0. \tag{6.116}$$

Als Beispiel berechnen wir das magnetische Feld einer unendlich großen Platte, welche bei $z = 0$ in der $(x - y)$ Ebene liegt. Der Strom an der Oberfläche fließt in die $\vec{e}_x$ Richtung. Den obigen Bedingungen zufolge, finden wir dann

$$B_z(1) = B_z(2), \quad B_x(1) = B_x(2), \tag{6.117}$$

und

$$B_y(1) - B_y(2) = \mu_0 J. \tag{6.118}$$

Das magnetische Feld kann nur von z abhängig sein. Divergenz-Gleichung gibt

$$\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z} = 0, \quad B_z = \text{const.} \tag{6.119}$$

Aus $\vec{\nabla} \times B$, finden wir

$$\frac{\mathrm{d}B_y}{\mathrm{d}z} = 0, \quad B_y = \text{const.} \tag{6.120}$$

$$\frac{\mathrm{d}B_x}{\mathrm{d}z} = 0, \quad B_x = \text{const.} \tag{6.121}$$

Dann

$$B_y(1) = \frac{\mu_0 J}{2}, \quad B_y(2) = -\frac{\mu_0 J}{2}. \tag{6.122}$$

Alle anderen Komponente des B-Felds können wir zu Null setzen. Dass es tatsächlich so ist, können wir auch mit Hilfe von Gl. (6.65) argumentieren.

7 Magnetisches Feld in Materie

Falls wir ein Stück Material in ein magnetisches Feld platzieren, kann es zwei mögliche Reaktionen geben. Erstens kann sich das Material so polarisieren, dass das magnetische Feld im Material reduziert ist; solche Materialen bezeichnen wir als *diamagnetische*. Zweitens kann sich das Material so polarisieren, dass das magnetische Feld im Material vergroßt ist; solche Materialen bezeichnen wir als *paramagnetische*. Ferner gibt es die Materialien, die magnetische Polarisation ohne externes magnetisches Feld haben. Diese Materialen sind Magneten oder, wie man sagt, *ferromagnetische* Materialien.

Um ein physikalisches Bild zu haben, stellen wir uns vor, dass alle Materialien aus kleinen magnetischen Dipolen zusammengestellt sind. Zum Beispiel drehen sich in Atomen und Molekülen Elektronen um die Kerne; diese Bewegung von geladenen Teilchen ist Strom und, wie wir wissen, kann eine Stromverteilung magnetisches Dipolmoment haben. Falls wir das Material in magnetisches Feld platzieren, reagieren Dipolmomente auf diese Störung und erzeugen makroskopische Polarisation.

Um das zu beschreiben, sollen wir verstehen wie ein externes magnetisches Feld auf ein magnetisches Dipol wirkt. Angenommen, wir haben eine Stromverteilung und ein magnetisches Feld mit $\vec{B}$. Die Lorentz-Kraft, die auf die Verteilung wirkt, können wir so schreiben

$$\vec{F}(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \left[\vec{j}(\vec{r}_1) \times \vec{B}(\vec{r}+\vec{r}_1)\right], \tag{7.1}$$

wobei $\vec{r}$ das "Zentrum" des Dipols ist.

Wir interessieren uns für die Situation, wo wir ein "kleines" Dipol haben und ein magnetisches Feld, das sich auf viel größeren Längenskalen ändert. Das bedeutet, dass wir $B(\vec{r}+\vec{r}_1)$ in Gl. (7.1) in $\vec{r}_1$ entwickeln können. Dann gilt

$$\vec{B}(\vec{r}+\vec{r}_1) \approx \vec{B}(\vec{r}) + \vec{r}_{1,i}\, \partial_i \vec{B}. \tag{7.2}$$

Die Kraft auf die Stromverteilung ist dann

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{B} \times \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\, \vec{j}(\vec{r}_1) - \partial_i \vec{B} \times \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\, \vec{r}_{1,i}\, \vec{j}(\vec{r}_1). \tag{7.3}$$

In Vorlesung 6 haben wir gesehen, dass

$$\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\, \vec{j}(\vec{r}_1) = 0. \tag{7.4}$$

Ferner können wir die Diskussion um Gl. (6.96) benutzen, um den zweiten Term in Gl. (7.3) umzuschreiben. Wir erhalten

$$\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\, \vec{j}(\vec{r}_1)\, \vec{r}_{1,i} = [\vec{e}_i \times \vec{m}], \tag{7.5}$$

wobei $\vec{m}$ das magnetische Moment des Systems und $\vec{e}_i$ ein Basisvektor sind. Dann

$$-\partial_i \vec{B} \times \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\, \vec{r}_{1,i}\, \vec{j}(\vec{r}_1) = -\partial_i \vec{B} \times [\vec{e}_i \times \vec{m}] = -\partial_i \vec{e}_i (\vec{B} \cdot \vec{m}). \tag{7.6}$$

Damit sieht die Kraft am magnetischen Dipol so aus

$$\vec{F} = \vec{\nabla}_r (\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{m}). \tag{7.7}$$

Es ist offensichtlich, dass im konstanten magnetischen Feld keine Kraft auf den magnetischen Dipol wirkt. Andererseits gibt es in diesem Fall ein Drehmoment. Um den Drehmoment zu berechnen, schreiben wir

$$\vec{N} = \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\, \vec{r}_1 \times \left[\vec{j}(\vec{r}_1) \times \vec{B}\right] = \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\, \left[\vec{j}(\vec{r}_1)(\vec{r}_1 \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{r}_1 \cdot \vec{j}(\vec{r}_1))\right]. \tag{7.8}$$

Mit Hilfe von Gl. (6.96) und Gl. (6.100) erhalten wir

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}. \tag{7.9}$$

Um zu verstehen was dieses Drehmoment macht, betrachten wir die Lagrangefunktion für eine Menge Teilchen im konstanten magnetischen Feld. Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \sum_a \frac{m_a \vec{v}_a^2}{2} + \sum_a q_a \vec{v}_a \cdot \vec{A}(\vec{r}_a). \tag{7.10}$$

Das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ für ein konstantes magnetisches Feld lässt sich unterschiedlich auswählen. In diesem Fall ist es günstig zu schreiben

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\left[\vec{B} \times \vec{r}\right]. \tag{7.11}$$

Dann erhalten wir

$$L = L_{\mathrm{kin}} + \sum_a \frac{1}{2} q_a \vec{v}_a \cdot [\vec{B} \times \vec{r}_a] = L_{\mathrm{kin}} + \sum_a \frac{1}{2} \vec{B} \cdot [\vec{r}_a \times (q_a \vec{v}_a)] = L_{\mathrm{kin}} + \vec{B} \cdot \vec{m}, \tag{7.12}$$

wobei $\vec{m}$ das magnetische Dipolmoment ist

$$\vec{m} = \sum_a \frac{1}{2} \cdot [\vec{r}_a \times (q_a \vec{v}_a)] = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 \vec{r}\, [\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})]. \tag{7.13}$$

Weil die Lagrangefunktion aus der kinetischen und potentiellen Energie besteht, können wir sagen, dass

$$U = -\vec{B} \cdot \vec{m} \tag{7.14}$$

die potentielle Energie des magnetischen Dipolmoments im magnetischen Feld ist. Das Gleichgewicht ist dann die Konfiguration wo $\vec{m}$ und $\vec{B}$ parallel sind.

Das physikalische Bild besteht darin, dass im magnetischen Feld alle Dipole sich entlang des magnetischen Felds orientieren und das Material eine makroskopische Polarisation erhält. Wir wollen jetzt diskutieren wie wir die Materialien mit magnetischer Polarisation beschreiben können.

Wie bezeichnen das magnetische Dipolmoment pro Volumeneinheit mit dem Buchstaben $\vec{M}(\vec{r})$ und nennen es die *Magnetisierung*. Falls wir die Magnetisierung kennen, können wir das Vektorpotential berechnen

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 \vec{r}_1\, \frac{\vec{M}(\vec{r}_1) \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}. \tag{7.15}$$

Wir schreiben dann[12]

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} = \vec{\nabla}_1 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}, \tag{7.16}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 \vec{r}_1\, \vec{M}(\vec{r}_1) \times \vec{\nabla}_1 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 \vec{r}_1\, \vec{\nabla}_1 \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 \vec{r}_1 \frac{\vec{\nabla}_1 \times \vec{M}(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Falls wir über den gesamten Raum integrieren, können wir den ersten Term vernachlässigen. Der zweite Term sieht aus wie das Vektorpotential einer Stromverteilung

$$\vec{j}_b(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}). \tag{7.18}$$

[12] Wir merken, dass $\vec{\nabla}_1$ bedeutet, dass wir nach $\vec{r}_1$ ableiten.

Das ist ein "gebundener" Strom, welcher die Polarisierung $\vec{M}$ erzeugt.

Als Beispiel berechnen wir das magnetisches Feld einer gleichförmig-magnetisierten Kugel mit dem Radius R. Die Magnetisierung ist

$$\vec{M}(\vec{r}) = \vec{M}_0 \theta(R - r). \tag{7.19}$$

Wir berechnen gebundenen Strom

$$\vec{j}_b(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}) = -\delta(r - R) \frac{\vec{r} \times \vec{M}_0}{r}. \tag{7.20}$$

Dann,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M}_0 \times \int \mathrm{d}^3 \vec{r}_1 \;\; \delta(r_1 - R) \frac{\vec{r}_1}{r_1 |\vec{r} - \vec{r}_1|} = \frac{\mu_0 R^2}{4\pi} \vec{M}_0 \times \frac{1}{R} \int\limits_{r_1 = R} \frac{\mathrm{d}\Omega \; \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \tag{7.21}$$

Dieses Integral haben wir schon mal gerechnet, siehe Gl. (6.75,6.76). Dann finden wir

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4\pi R^3}{3} \frac{\vec{M}_0 \times \vec{r}}{r^3}, & r > R, \\ \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4\pi}{3} \; \vec{M}_0 \times \vec{r}, & r < R. \end{cases} \tag{7.22}$$

Wir sehen, dass innerhalb der Kugel das magnetische Feld gleichförmig ist; außerhalb der Kugel gibt es das magnetische Feld eines Dipols mit dem Dipolmoment $\vec{M} = \vec{M}_0 (4\pi R^3)/3$.

Ähnlich wie bei der elektrischen Polarisierung des Mediums, wo wir zwei elektrische Felder $\vec{E}$ und $\vec{D}$ eingeführt haben, können wir das Medium mit einer magnetischen Polarisation beschreiben, indem wir zwei magnetische Felder einführen. Wir betrachten die Situation, wo in einem Material mit magnetischer Polarisierung auch freier Strom $\vec{j}$ fließt. Das magnetische Feld erfüllt die Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_b), \tag{7.23}$$

wobei $\vec{j}_b$ der gebundene Strom, welcher für die Magnetisierung verantwortlich ist. Es gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{j}_b, \tag{7.24}$$

sodass

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{j}. \tag{7.25}$$

Wir bezeichnen die Größe in Klammern mit dem Buchstabe $\vec{H}$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \tag{7.26}$$

und erhalten dann

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}. \tag{7.27}$$

Wir haben am Ende der Vorlesung 5 erklärt, dass die potentiele Energie des Dipols $U = -\vec{d}\cdot\vec{E}$ zu Polarisation $\vec{P} \sim \vec{E}$ führt. Einen ähnlichen Mechanismus gibt es auch für die Magnetisierung, weil die potentielle Energie $U = -\vec{m}\cdot\vec{B}$ identisch ist. Das bedeutet, dass wir die Situation betrachten sollen, wobei die Magnetisierung proportional zum externen magnetischen Feld ist.

Obwohl es natürlicher wäre $\vec{M} \sim \vec{B}$ zu schreiben, schreibt man aus historischen Gründen dann

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}. \tag{7.28}$$

Die einheitslose Größe χ_m nennt man magnetische Suszeptibilität. Dank der obigen Gleichung können wir das Feld $\vec{B}$ durch das Feld $\vec{H}$ ausdrücken. Wir finden

$$\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H}. \tag{7.29}$$

Die Größe $\mu = \mu_0\,(1+\chi_m)$ bezeichnen wir als Permeabilität des Materials. Im Vakuum ist $\chi_m = 0$, sodass $\mu = \mu_0$ ist. Deswegen nennen wir μ_0 die Permeabilität des Vakuums.

Die Randbedingungen für die Felder $\vec{B}$ und $\vec{H}$ können wir dann aus den Randbedingungen für B im Vakuum konstruieren. Wir betrachten eine Oberfläche, welche zwei Materialien trennt; an dieser Oberfläche fließt freier Flächenstrom $\vec{j_f}$. Um die Randbedingungen zu beschreiben, führen wir lokal drei Vektoren $\vec{n}$, $\vec{e}_j$ und $\vec{e}_3 = [\vec{n}\times\vec{e}_j]$ ein, wobei $\vec{n}$ Normal zur Oberfläche ist (zeigt in die Richtung von Gebiet 1) und $\vec{e}_j||\vec{j}$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\vec{n}\cdot(\vec{B}(1) - \vec{B}(2)) = 0,\\
&\vec{e}_j\cdot(\vec{H}(1) - \vec{H}(2)) = 0,\\
&\vec{e}_3\cdot(\vec{H}(1) - \cdot\vec{H}(2)) = |\vec{j_f}|.
\end{aligned} \tag{7.30}$$

Als Beispiel der Anwendung dieser Randbedingungen betrachten wir folgendes Problem. Es gibt gleichförmiges magnetisches Feld $\vec{B} = \vec{B}_0\vec{e}_z$. In diesem Feld platzieren wir eine Kugel, zusammengestellt aus magnetischem

Material mit der Permeabilität μ. Wir wollen die Magnetisierung der Kugel finden.

Außerhalb der Kugel gibt es keine Ströme. Das bedeutet

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0. \tag{7.31}$$

Ein Vektor *dessen Rotation* eine Null ist können wir immer als Gradient einer Funktion schreiben

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\phi_B(\vec{r}). \tag{7.32}$$

Weil

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{7.33}$$

erfüllt ϕ_B eine Laplace-artige Gleichung

$$\vec{\nabla}^2\phi_B = 0. \tag{7.34}$$

Diese Gleichung ist identisch zur Laplace-Gleichung und alles was wir über Laplace-Gleichung diskutiert haben können wir verwenden. Dann entwickeln wir ϕ_B in Legendre Polynomen

$$\phi_B(r) = \sum_{l=1} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta), \tag{7.35}$$

berechnen magnetisches Feld

$$\begin{aligned} B_r &= \sum_{l=1} \left(A_l l r^{l-1} - (l+1)\frac{B_l}{r^{l+2}} \right) P_l(\cos\theta), \\ B_\theta &= \sum_{l=1} \left(A_l r^{l-1} + \frac{B_l}{r^{l+2}} \right) \frac{d}{\mathrm{d}\theta} P_l(\cos\theta). \end{aligned} \tag{7.36}$$

Wir betrachten den Limit $r \to \infty$, wo das magnetische Feld $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ sein soll. Das bedeutet

$$A_l = B_0\delta_{l1}, \tag{7.37}$$

und die Koeffizienten B_l bleiben in diesem Moment beliebig.

Innerhalb der Kugel haben wir eine Gleichung für $\vec{H}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0. \tag{7.38}$$

Das heißt, dass wir

$$\vec{H} = \vec{\nabla}\phi_H(\vec{r}) \tag{7.39}$$

schreiben können. Weil $\vec{B} \sim \vec{H}$ und

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{7.40}$$

finden wir, dass ϕ_H auch die Laplace Gleichung erfüllt. Dann

$$\phi_H = \sum_l C_l r^l P_l(\cos\theta). \tag{7.41}$$

In diesem Fall finden wir das Feld H

$$\begin{aligned} H_r &= \sum_{l=1} C_l l r^{l-1} P_l(\cos\theta), \\ H_\theta &= \sum_{l=1} C_l r^{l-1} \frac{d}{\mathrm{d}\theta} P_l(\cos\theta). \end{aligned} \tag{7.42}$$

Um die Randbedingungen zu erfüllen, brauchen wir nur Terme mit $l = 1$ in der Entwicklung von ϕ_B und ϕ_H zu berücksichtigen. Die Randbedingungen für B und H bei $r = R$ lauten

$$\begin{aligned} B_r(1) = B_r(2) \;&\rightarrow\; B_0 - 2\frac{B_1}{R^3} = \mu C_1, \\ H_\theta(1) = H_\theta(2) \;&\rightarrow\; B_0 + \frac{B_1}{R^3} = \mu_0 C_1. \end{aligned} \tag{7.43}$$

Es folgt

$$C_1 = \frac{3B_0}{\mu + 2\mu_0}, \tag{7.44}$$

sodass

$$\vec{H} = \frac{3B_0}{\mu + 2\mu_0}\,\vec{e}_z, \quad r < R. \tag{7.45}$$

Die Polarisierung ist dann

$$\vec{M} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\vec{H} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0}\frac{3B_0}{\mu_0}\vec{e}_z. \tag{7.46}$$

8 Elektrodynamik: Ohm'sches Gesetz. Elektromotorische Kraft

In dieser Vorlesung möchten wir diskutieren warum und wie in Leiter *konstanter* Strom läuft. Wir betrachten folgendes Modell: ein Elektron befindet sich in einem Leiter im elektrischen Feld $\vec{E}$. Das Elektron beschleunigt sich in diesem Feld bis es zu einem Zusammenstoß mit einem Atom kommt. In diesem Zusammenstoß verliert das Elektron die gesamte kinetische Energie, die es im elektrischen Feld gewonnen hat.

Unter diese Annahme, berechnen wir das Verhältnis zwischen $\vec{E}$ und dem Strom. Wir bezeichnen die Zeit zwischen den Zusammenstößen mit t. Die gemittelte Drift-Geschwindigkeit v ist dann

$$\vec{v} = \frac{\vec{a}t}{2}. \tag{8.1}$$

Die Beschleunigung $\vec{a}$ und die Zeit t sind

$$\vec{a} = \frac{e\vec{E}}{m}, \quad t = \frac{\lambda}{v_T}, \tag{8.2}$$

wobei v_T die thermische Geschwindigkeit und λ die freie Weglänge des Elektrons sind.[13] Wir finden das Verhältnis zwischen dem elektrischen Feld und der Drift-Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \frac{e\lambda}{2mv_T}\vec{E}. \tag{8.3}$$

Der Ausdruck für den Strom folgt

$$\vec{j} = n\vec{v} = \frac{e\lambda n}{2mv_T}\vec{E} = \sigma\vec{E}. \tag{8.4}$$

Dieses Verhältnis zwischen dem Strom und dem elektrischen Feld

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \tag{8.5}$$

ist *experimentell nachgewiesen* und ist viel allgemeiner als das Modell, welches wir diskutiert haben. Den Parameter σ nennen wir *Leitfähigkeit* des Materials und bezeichnen Eq. (8.5) als *Ohm'sches Gesetz*.

[13] Es ist wichtig zu merken, dass die thermische Geschwindigkeit viel größer ist als die Drift-Geschwindigkeit; deswegen spielt die Drift-Geschwindigkeit bei der Berechnung von t keine Rolle.

Die Leitfähigkeit von verschiedenen Materialen ist sehr unterschiedlich. Leiter haben sehr große Leitfähigkeiten, sodass der Strom ein sehr kleines elektrisches Feld braucht um fließen zu können. Im idealen Leiter ist $\sigma = \infty$ und $\vec{E} = 0$. Deswegen können wir in elektrischen Stromkreisen Drähte mit Strom als Äquipotentialflächen betrachten.

Der Kehrwert von σ heißt *spezifischer Widerstand* $\rho = 1/\sigma$. Der spezifischer Widerstand ist die Eigenschaft des Materials. Zusätzlich führt man eine andere Größe, *den Widerstand*, ein, welcher aber nicht nur das Material, sondern auch den Gegenstand charakterisiert. Die Gegenstände mit Widerstand werden wir auch als Widerstände bezeichnen.

Betrachten wir einen Zylinder mit dem Querschnitt A and der Länge L. Der Zylinder ist aus einem Material mit der Leitfähigkeit σ zusammengestellt. Die Potentialdifferenz V zwischen den Enden des Zylinders wurde eingehalten. Wir wollen den Strom finden, welcher in dem Zylinder fließt.

Wir nehmen an, dass das elektrische Feld innerhalb des Zylinders gleichförmig ist. Dann schreiben wir $E = V/L$, benutzen

$$j = \sigma E \tag{8.6}$$

und erhalten

$$I = jA = \sigma AE = \frac{\sigma A}{L} V. \tag{8.7}$$

Diese Gleichung schreiben wir um als

$$V = RI, \tag{8.8}$$

wobei $R = L/(\sigma A)$ der Widerstand des Zylinders ist. Gl. (8.8) ist auch als *Ohm'sches Gesetz* bekannt.

Es ist interessant, besser zu verstehen, warum in diesem Beispiel das Feld gleichförmig ist. Die Randbedingungen an der Oberfläche des Leiters sind bekannt. In diesem Fall ist es wichtig, dass $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$ ist, weil andererseits muss es eine Ladung an der Oberfläche geben.[14] Wir können dann das Potential innerhalb des Zylinders schreiben

$$\varphi(z) = \frac{V}{L} z. \tag{8.9}$$

[14] Vektor $\vec{n}$ ist der Normalvektor zur Oberfläche.

Dieses Potential erfüllt alle Randbedingungen und, wegen der Eindeutigkeit der Lösung der Laplace-Gleichung, ist diese Lösung dann auch die richtige. Obwohl wir über Zylinder diskutiert haben, ist es einfach zu sehen, dass diese Diskussion allgemeiner ist, weil für dieses Argument kein kreisförmiger Querschnitt gebraucht wurde.

Der Grund des Widerstands sind Zusammenstöße zwischen Elektronen und Kerne in einem Material. Bei diesen Zusammenstößen wird die kinetische Energie der Elektronen in Wärme umgewandelt. Wie viel Arbeit wir leisten müssen, um einen bestimmten Strom in einem elektrischen Kreis laufen zu lassen, ist einfach zu berechnen. Strom I bedeutet, dass wir während einem Zeitintervall Δt die Ladung $\Delta Q = I\delta t$ von $\varphi = 0$ zu $\varphi = V$ transportieren. Dann ist die Arbeit $\Delta W = V\Delta Q = VI\Delta t$ und die Leistung

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = VI = I^2 R. \tag{8.10}$$

Diese Gleichung heißt *Joule'sches Gesetz*. Mit I in Ampere und R in Ohm, erhalten wir P in Watt.

Um Strom in einem Leiter zu erzeugen, sollen wir auf Elektronen wirken. Es gibt verschiedene Möglichkeiten dies zu tun; wir bezeichnen alle diese Möglichkeiten mit dem Begriff *elektromotorische Kraft* (EMK). Z.B. in einem Stromkreis gibt es üblicherweise die Batterien, die Drähte und die Widerstände. Wie wir diskutiert haben, gibt es in Widerständen ein elektrisches Feld, das Elektronen beeinflusst. In der Batterie gibt es zusätzlich eine andere Kraft, welche die Ladungen zwischen den Batterie-Polen bewegt. Diese Kraft bezeichnen wir mit $\vec{f}_s$. Dementsprechend schreiben wir für einen Stromkreis[15]

$$\vec{j} = \sigma \vec{f}, \quad \vec{f} = \vec{E} + \vec{f}_s. \tag{8.11}$$

Wir berechnen jetzt die Potentialdifferenz zwischen den Batterie-Polen. In einer idealen Batterie ist $\vec{f} = 0$; dann gilt

$$V = -\int_a^b \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{E} = \int_a^b \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{f}_s = \mathcal{E}. \tag{8.12}$$

Diese Größe $\mathcal{E}$ beschreibt die Arbeit der externen Kräfte, welche benötigt wird, um die Ladungen zwischen den Batterie-Polen zu transportieren und

[15] Obwohl wir $\vec{f}$ als "Kraft" bezeichnen, ist sie die Kraft pro Ladungeinheit.

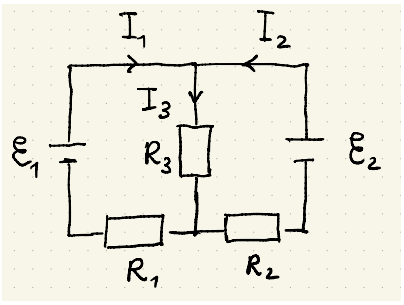

Abbildung 14: Ein Beispiel des Stromkreises.

den Strom am Laufen zu halten. Wir merken, dass, weil das elektrische Feld potentiell ist und weil $\vec{f}_s$ sich nur in der Batterie von einer Null unterscheidet, gilt

$$\mathcal{E} = \int_a^b \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{f}_s = \oint \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{f}_s = \oint \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{f}. \tag{8.13}$$

Wir diskutieren jetzt kurz über die Stromkreise. Ein Stromkreis kann aus Widerständen, Batterien und Kondensatoren zusammengestellt werden. Eine typische Frage ist für solche Kreise, die Ströme an allen Widerständen zu berechnen. Für Stromkreise ohne Kondensatoren gibt es zwei *Kirchhoff'sche Regeln*. Erstens, für jeden Knoten des Stromkreises mit n Zweige, gilt

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0, \tag{8.14}$$

wobei $\{I_k\}$ einlaufende Zweigströme sind. Zweitens, für jeden Umlauf des Kreises gilt

$$\sum_k I_k R_k = \sum_i \mathcal{E}_i. \tag{8.15}$$

Auf der rechten Seite obiger Gleichung summieren wir über alle elektromotorische Kräfte $\mathcal{E}_i$, welche in diesem Umlauf vorhanden sind.

Um ein Beispiel zu diskutieren, betrachten wir einen Stromkreis mit drei Widerständen und zwei Batterien, siehe Bild 14. Wir benutzen die Kirchoff'schen

Regeln und schreiben drei Gleichungen

$$\begin{aligned} I_3 &= I_1 + I_2, \\ I_1 R_1 + I_3 R_3 &= \mathcal{E}_1, \\ I_2 R_2 + I_3 R_3 &= \mathcal{E}_2. \end{aligned} \tag{8.16}$$

Es ist einfach, diese Gleichungen zu lösen. Wir erhalten, z.B.

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_3}. \tag{8.17}$$

Falls es in dem Stromkreis einen Kondensator gibt, kann man weiter die Kirchhoff'schen Regeln benutzen. Allerdings gibt es einen wichtigen Unterschied zur obigen Diskussion und zwar, dass die Ströme im solchen Fall zeitabhängig sind. Der Strom durch den Kondensator lautet

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}. \tag{8.18}$$

Um ein Beispiel zu diskutieren, betrachten wir einen Stromkreis mit einer Batterie mit EMK $\mathcal{E}$, einem Widerstand R und einem Kondensator mit der Kapazität C. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Kondensator ungeladen. Die zweite Kirchhoff'sche Regel lautet

$$\frac{Q}{C} + RI = \mathcal{E}. \tag{8.19}$$

Wir leiten nach der Zeit ab und erhalten

$$\frac{1}{C} I + R \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{8.20}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$I = I_0 e^{-t/(RC)}. \tag{8.21}$$

Weil $Q(t = 0) = 0$ ist und $I(t = 0) = I_0$ ist, erhalten wir aus Gl. (8.19)

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}. \tag{8.22}$$

Die Ladung an dem Kondensator berechnen wir so

$$Q(t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau I(\tau) = I_0 RC \left(1 - e^{-t/RC}\right) = \mathcal{E}C \left(1 - e^{-t/RC}\right). \tag{8.23}$$

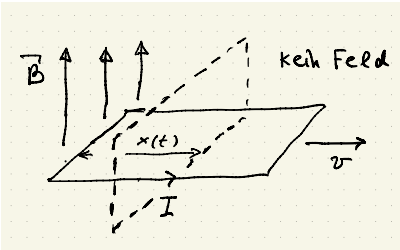

Abbildung 15: Eine Schleife in magnetischem Feld.

Die Integrationsgrenzen in Gl. (8.23) sind so ausgewählt, dass die Bedingung $Q(0) = 0$ erfüllt ist.

Eine wichtige Art elektromotorische Kraft zu erzeugen besteht durch die Bewegung eines Leiters im magnetischen Feld. Betrachten wir eine rechteckige Schleife, zusammengestellt aus vier Drähten. Eine Seite dieser Schleife befindet sich im magnetischen Feld, welche senkrecht zur Oberfläche der Schleife steht (siehe Bild (18)). Die Schleife bewegt sich mit der Geschwindigkeit v. Den Elektronen an der Seite der Schleife, welche sich im magnetischen Feld befinden, wirkt eine "Lorentz-Kraft" $f = F_L/e = vB$ an. Diese Kraft erzwingt die Bewegung der Elektronen und führt dazu, dass der Strom in der ganzen Schleife fließt. Die elektromotorische Kraft ist dann

$$\mathcal{E} = \oint \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = vBh, \tag{8.24}$$

wobei h die Länge der Seite ist, welche sich im magnetischen Feld befindet.

Wir können diese Formel auf sehr wichtige Weise umschreiben. Weil $v = \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$, bedeutet das, dass

$$vBh = -Bh\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \tag{8.25}$$

wobei $\Phi(t)$ der Fluss des magnetischen Felds durch die Schleife ist. Es folgt, dass die elektromotorische Kraft gleich der Ableitung des Flusses nach der Zeit ist

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \tag{8.26}$$

Wir haben diese Formel für *rechteckige* Schleifen hergeleitet. Es ist aber einfach zu sehen, dass die Form der Schleife keine Rolle spielt. Betrachten wir eine beliebig-förmige Schleife, und nehmen einen Punkt O, welcher an der Schleife liegt. Der Ortsvektor dieses Punktes am Zeitpunkt t bezeichnen wir als $\vec{r}(t)$. Der Ortsvektor des gleichen Punktes am $t + dt$ bezeichnen wir als $\vec{r}(t + dt)$. Das Verhältnis zwischen diesen zwei Vektoren lautet

$$\vec{r}(t + dt) = \vec{r} + \vec{v}\, dt, \tag{8.27}$$

wobei $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Punktes O ist. Die Differenz zwischen zwei Flüssen durch die Schleife ist dann

$$\Phi(t + dt) - \Phi(t) = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}. \tag{8.28}$$

Wir integrieren über die Fläche des "Bandes", welches die Schleifen an den Zeitpunkten t und $t + dt$ verbindet. Wir können $\mathrm{d}\vec{\sigma}$ so parametrisieren

$$\mathrm{d}\vec{\sigma} = \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{v}\, dt, \tag{8.29}$$

wobei $\mathrm{d}\vec{l}$ eine Verschiebung entlang der Schleife parametrisiert.

Ein Elektron kann sich nur entlang der Schleife bewegen. Das heißt, dass, falls wir die Geschwindigkeit des Elektrons im Ruhesystem der Schleife mit $\vec{u}$ bezeichnen, ist $\vec{u} \parallel \mathrm{d}\vec{l}$. Die gesamte Geschwindigkeit des Elektrons ist dann $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$ und, weil $\vec{u}$ und $d\vec{l}$ parallel sind, können wir schreiben

$$\mathrm{d}\vec{\sigma} = \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{w}\, dt, \tag{8.30}$$

Dann,

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} dt = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{w}\, dt, \tag{8.31}$$

sodass

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = \int \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{w} \times \vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{F}_{\mathrm{mag}} = \mathcal{E}. \tag{8.32}$$

Wir sehen, dass die elektromotorische Kraft immer durch die Ableitung des Flusses gegeben ist, egal wie genau sich die Schleife bewegt und welche Form sie hat.

Wir haben die obige Formel hergeleitet, indem wir die Bewegung der Schleife im magnetischen Feld untersucht haben. Andererseits ist zu merken dass, Definition des Flusses zur Folge

$$\Phi = \int\limits_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}, \tag{8.33}$$

kann sich der Fluss ändern, falls das magnetische Feld eine Funktion der Zeit ist. Es ist *experimentell nachgewiesen*, dass Gl. (8.32) für zeitabhängige $\vec{B}(t)$ erfüllt bleibt, selbst wenn die Schleife sich nicht ändert bzw. bewegt.

Es ist natürlich unmöglich in diesem Fall die elektromotorische Kraft durch die Lorentz-Kraft zu erklären, weil die Schleife sich nicht bewegt. Also sollen wir annehmen, dass das zeitabhängige magnetische Feld ein *elektrisches Feld* erzeugt. Um das Verhältnis zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Feld zu erstellen, schreiben wir

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\mathcal{E} = -\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int \vec{\nabla} \times \vec{E}\, \mathrm{d}\vec{S}. \tag{8.34}$$

Aus diesem Ergebnis folgt eine neue Differentialgleichung, welche $\vec{E}$ und $\vec{B}$ miteinander verknüpft

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{8.35}$$

Für zeitunabhängige $\vec{B}$ erhalten wir $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, wie wir vorher diskutiert haben. Wir werden später sehen, dass Gl. (8.35) eine von vier Maxwell'schen Gleichungen ist, die ausführlich die Elektrodynamik beschreiben.

Wir machen eine Bemerkung zu Gl. (8.35) und das induzierte elektrische Feld. Das elektrische Feld erfüllt zwei Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{8.36}$$

Falls die Ladungsdichte ρ eine Null ist, sehen diese Gleichungen so aus

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{8.37}$$

Wir können diese Gleichungen mit den Gleichungen für das magnetische Feld vergleichen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \tag{8.38}$$

Das bedeutet, dass für den Fall $\rho = 0$ und das vorhandene magnetische Feld, wir alles übernehmen können, was wir über das magnetische Feld gelernt haben. Das elektrische Feld in diesem Fall können wir so schreiben

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\,\frac{\vec{B}(t,\vec{r}_1)\times(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}. \tag{8.39}$$

9 Induktivität

Wir betrachten eine Schleife mit dem Strom. Der Strom erzeugt das magnetische Feld. Dieses magnetische Feld erzeugt den Fluss durch die Schleife

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}. \tag{9.1}$$

Im allgemeinen Fall ist es schwerig dieses Integral zu berechnen, weil das Integral von der Geometrie der Schleife abhängt. Allerdings können wir sagen, sogar ohne das Integral zu berechnen, dass Φ zu dem Strom in der Schleife proportional ist, weil $B \sim I$. Dann schreiben wir

$$\Phi = L\ I. \tag{9.2}$$

Den Koeffizienten L nennen wir die *Induktivität*.

Als Beispiel berechnen wir die Induktivität einer Spule. Das magnetische Feld in diesem Fall haben wir schon berechnet, siehe Gl. (6.53),

$$B = \frac{\mu_0 N I}{h}. \tag{9.3}$$

In Gl. (9.3) sind N die Zahl der Schleifen der Spule und h die Länge der Spule. Der Fluss durch eine Schleife ist dann

$$\Phi_1 = B\pi R^2 = \frac{\mu_0 N I \pi R^2}{h}, \tag{9.4}$$

wobei R der Radius der Spule ist. Allerdings, um die elektromotorische Kraft einer Spule zu berechnen, brauchen wir den Fluss durch *alle* Schleifen, sodass

$$\Phi_{\text{spule}} = N\Phi_1 = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{h}\ I. \tag{9.5}$$

Das bedeutet, dass die Induktivität einer Spule durch

$$L_{\text{Spule}} = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{h} \tag{9.6}$$

gegeben ist.

Ein anderes Beispiel ist die Induktivität des koaxialen Kabels – zwei unendlich (bzw. sehr) lange konzentrische Zylinderleiter mit den Radien a und

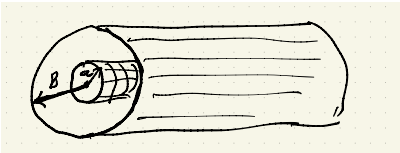

Abbildung 16: Koaxiales Kabel.

b, siehe Bild (16). Der Strom I fließt in einer Richtung durch den inneren Leiter und in der andere Richtung durch den externen Leiter. Das magnetische Feld können wir sofort mit Hilfe des Amper'schen Gesetzes berechnen. Das magnetische Feld hat nur $\vec{e}_\phi$ Komponente, sodass

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi, \quad a < \rho < b. \tag{9.7}$$

Wir betrachten einen Querschnitt in der $(z-\rho)$ Ebene für fixe ϕ und berechnen den Fluss. Die Länge des Kabels in der z-Richtung ist h. Dann

$$\Phi = \int_a^b \mathrm{d}\rho\, |\vec{B}| h = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\frac{b}{a}\, I. \tag{9.8}$$

Die Induktivität in diesem Fall ist dann

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi}\, \ln\frac{b}{a}. \tag{9.9}$$

Die Induktivität ist wichtig, weil diese Größe hilft uns die Leistung der EMK zu berechnen. Wir schreiben

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{9.10}$$

Die EMK bewegt die Ladungen und verrichtet die Arbeit

$$\mathrm{d}W = -\mathcal{E} I \mathrm{d}t = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\, I\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left[\frac{LI^2}{2}\right]. \tag{9.11}$$

Wir integrieren diese Gleichung und finden, dass die Energie des magnetischen Felds der Schleife so aussieht

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}. \tag{9.12}$$

Für die Spule können wir diese allgemeine Formel in eine andere Form umschreiben. Weil das magnetische Feld der Spule konstant ist, schreiben wir den Fluss als $\Phi = B\pi R^2 N$. Wir benutzen dann die Formel für L_{spule} Gl. (9.6) und erhalten

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0}\,\pi R^2 h. \tag{9.13}$$

Weil $\pi R^2 h$ das Volumen der Spule ist, können wir diese Formel als

$$W = \int\limits_{\text{Spule}} \mathrm{d}^3\vec{r}\;\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \tag{9.14}$$

umschreiben. Wir sehen, dass die Energiedichte des magnetischen Felds der Spule durch $\vec{B}^2/(2\mu_0)$ gegeben ist.

Es ist möglich zu zeigen, dass die obige Formel im allgemeinen Fall richtig ist. Wir schreiben

$$\Phi = \int \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int \left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oint \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\xi}. \tag{9.15}$$

Wir schreiben dann

$$W = \frac{\Phi I}{2} = \frac{1}{2}\oint \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}, \tag{9.16}$$

wobei wir benutzt haben, dass in der Schleife $\mathrm{d}\vec{l} = I\mathrm{d}\vec{\xi}$ ist. Wir verallgemeinern Gl. (9.16) auf dem dreidimensionalen Raum und schreiben

$$W = \frac{1}{2}\int \vec{A}\cdot\vec{j}\;\mathrm{d}^3\vec{r} = \frac{1}{2\mu_0}\int \vec{A}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{B}]\;\mathrm{d}^3\vec{r}. \tag{9.17}$$

Dann gilt

$$\vec{A}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{B}] = \epsilon_{ijk}A_i\partial_j B_k = \partial_j\left(\epsilon_{ijk}A_i B_k\right) - \epsilon_{ijk}B_k\partial_j A_i = \vec{\nabla}\cdot[\vec{B}\times\vec{A}] + \vec{B}^2. \tag{9.18}$$

Das Integral des ersten Terms über den ganzen Raum gibt eine Null und wir erhalten

$$W = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\;\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}. \tag{9.19}$$

Wir haben über Stromkreise geredet. Zusätzlich zu Batterien, Widerständen und Kondensatoren, können wir in einem Stromkreis auch Induktivität haben.

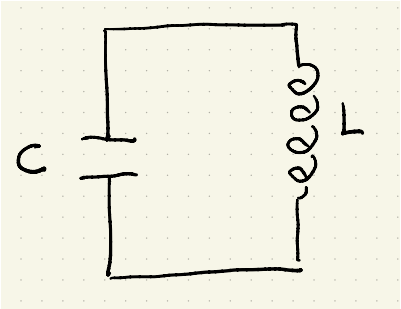

Abbildung 17: Stromkreis aus einem Kondensator und einer Induktivität.

Um ein Beispiel zu geben, betrachten wir wir einen Kreis mit dem Kondensator C und der Induktivität L, siehe Bild (17). Die verallgemeinerte Kirchhoff'sche zweite Regel lautet

$$-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{Q}{C}, \tag{9.20}$$

wobei auf der linken Seite die EMK der Induktivität steht und auf der rechten die Potentialdifferenz an dem Kondensator. Wir nehmen an dass bei $t = 0$ in dem Kreis kein Strom fließt und die Ladung an dem Kondensator Q_0 ist.

Wir leiten die beiden Seiten von Gl. (9.20) nach der Zeit ab, benutzen $\cdot Q = I$ und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + \frac{I}{LC} = 0. \tag{9.21}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist bekannt

$$I = I_0 \sin(\omega_0 t + \phi), \tag{9.22}$$

wobei $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ ist. Weil bei $t = 0$ kein Strom in dem Kreis fließt, ist $\phi = 0$. Um I_0 zu bestimmen, leiten wir Gl. (9.22) nach der Zeit ab, setzen

das Ergebnis in die Gl. (9.20) ein und setzen $t = 0$. Wir erhalten

$$-L\omega_0 I_0 = \frac{Q_0}{C}. \tag{9.23}$$

Dann ist

$$I_0 = -\frac{Q_0}{\sqrt{LC}}, \tag{9.24}$$

und

$$I = -\frac{Q_0}{\sqrt{LC}}\ \sin(\omega_0 t), \tag{9.25}$$

Wir können den Stromkreis komplizierter machen und einen Widerstand dazu nehmen. Dann sieht das Kirchhoff'sche Gesetz so aus

$$-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = RI + \frac{Q}{C}. \tag{9.26}$$

Nach der Zeitableitung erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\ I = 0, \tag{9.27}$$

wobei $\gamma = R/(2L)$ und $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ sind.

Wir können die Lösungen dieser Gleichung in komplexer Form suchen. Wir schreiben

$$I = \mathrm{Re}\left[Ae^{i\omega t}\right], \tag{9.28}$$

und erhalten

$$\omega_\pm = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \tag{9.29}$$

Was in dem Stromkreis passiert hängt davon ab ob $\omega_0 > \gamma$ ist oder nicht. Nehmen wir an, dass $\omega_0 > \gamma$ ist. Dann

$$I = I_0 e^{-\gamma t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t + \phi). \tag{9.30}$$

Die zwei Konstanten I_0 und ϕ können wir mit Hilfe von zwei Randbedingungen feststellen. Eine Möglichkeit ist, dass bei $t = 0$ es in dem Kreis keinen Strom gibt $I(t = 0) = 0$ und die Ladung des Kondensators $Q(t = 0) = Q_0$ ist. Dann finden wir

$$I = -\frac{\omega_0^2 Q_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t). \tag{9.31}$$

Wir gehen zur Induktivität zurück. Wir haben diese Größe eingeführt, indem wir den magnetischen Fluss durch die Schleife mit dem Strom in der selben Schleife miteinander in Verbindung gesetzt haben. Wir können aber eine ähnliche Größe einführen für den Fluss, welcher der Strom in *einer* Schleife durch die *andere* Schleife verursacht. Für den Fluss durch die Schleife 2 wegen dem Strom in Schleife 1 schreiben wir

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1. \tag{9.32}$$

Die Größe L_{21} heißt *Gegeninduktivität*.

Um L_{21} zu berechnen, schreiben wir

$$\begin{aligned} \Phi_{21} &= \int \mathrm{d}\vec{S}_2 \cdot \vec{B}(\vec{r}_2) = \int \mathrm{d}\vec{S}_2 \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}_2)] = \oint \mathrm{d}\vec{\xi}_2 \cdot \vec{A}(\vec{r}_2) \\ &= \oint \mathrm{d}\vec{\xi}_2 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}\xi_1 \, \frac{\vec{I}(\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \oint \frac{\mathrm{d}\vec{l}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}, \end{aligned} \tag{9.33}$$

wobei wir benutzt haben, dass in einer dünnen Schleife

$$\mathrm{d}\xi_2 \, \vec{I}(\vec{r}_1) = I \mathrm{d}\vec{\xi}_2 \tag{9.34}$$

ist. Es folgt, dass der Ausdruck für Gegeninduktivität lautet

$$L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{\mathrm{d}\vec{l}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}. \tag{9.35}$$

Aus dieser Formel folgt, dass

$$L_{12} = L_{21}, \tag{9.36}$$

und dass die Gegeninduktivität eine rein geometrische Größe ist.

10 Die Maxwell'schen Gleichungen und ihre einfache Lösungen

Die Aufgabe der Theorie des Elektromagnetismus ist es, elektrische und magnetische Felder zu bestimmen. Wir haben bisher gesehen, dass diese Felder folgende Gleichungen erfüllen

$$\begin{aligned} &(i) \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (ii) \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \\ &(iii) \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}, \quad (iv) \quad \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} + \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Wir können jetzt zeigen, dass diese Gleichungen miteinander *nicht kompatibel sind*. Der Grund dafür ist, dass wir in der Herleitung dieser Gleichungen die Zeitunabhängigkeit der Ströme und Ladungsdichten angenommen haben.

Wir nehmen die erste Gleichung in Gl. (10.1) und leiten sie nach der Zeit ab. Wir erhalten

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{j}, \tag{10.2}$$

und schreiben diese Gleichung um als

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\epsilon_0}\right) = 0. \tag{10.3}$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass wir die Summe der Zeitableitungen des elektrischen Felds und der Ströme als eine Rotation eines Vektorfelds darstellen können, weil die Divergenz einer Rotation eine Null ist. Dann

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} = \vec{\nabla}\times\vec{U}. \tag{10.4}$$

Wir vergleichen die obige Gleichung mit Gleichung (iii) in Gl. (10.1). Es ist zu sehen, dass, falls wir $\vec{U}$ als $\vec{U} = \vec{B}/(\mu_0\epsilon_0)$ auswählen, stellt Gl. (10.4) dann die Erweiterung der Gleichung (iii) in Gl. (10.1) dar. Diese Erweiterung

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{j}. \tag{10.5}$$

ist nicht die einzige Möglichkeit, aber es folgt aus Experimenten, dass sie richtig ist. Gl. (10.5), zusammen mit den anderen drei Gleichungen (Gl. (eq10.1)

$(i, ii, iv))$ sind als *Maxwell'sche Gleichungen* bekannt und stellen die Grundlage der Theorie des Elektromagnetismus bereit.

Die obige Diskussion betrifft Maxwell'sche Gleichungen im Vakuum; falls es Materialien gibt, ändern sich die Gleichungen. Wie das funktioniert, haben wir in früheren Vorlesungen für die elektrischen und magnetischen Felder diskutiert. Die Maxwell'sche Gleichungen in Materialien sehen so aus

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\ &\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j_f}, \end{aligned} \tag{10.6}$$

wobei ρ_f und $\vec{j_f}$ freie Ladungen und Ströme beschreibt.

Die Felder $\vec{D}$ und $\vec{H}$ haben wir schon gesehen. Zur Erinnerung sind diese Felder so definiert

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}. \tag{10.7}$$

Die Polarisation $\vec{P}$ und die Magnetisierung $\vec{M}$ bestimmen gebundene Ladungen und Ströme

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}, \quad \vec{j_b} = \vec{\nabla} \times \vec{M}. \tag{10.8}$$

Falls die Polarisierung $\vec{P}$ zeitabhängig ist, trägt sie auch zum "Polarisationsstrom" bei, welche auch zur letzten Gleichung in Gl. (10.6) beiträgt. Um das zu sehen, schreiben wir die Kontinuitätsgleichung für ρ_b

$$0 = \frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j_p} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + + \vec{\nabla} \cdot \vec{j_p}. \tag{10.9}$$

Es folgt

$$\vec{j_p} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \tag{10.10}$$

Um Maxwell'sche Gleichungen in Materialien zu lösen, brauchen wir die Verhältnisse zwischen $\vec{D}$ und $\vec{E}$, und zwischen $\vec{B}$ und $\vec{H}$. Diese Verhältnisse haben wir schon früher gesehen und diskutiert. Für lineare Materialien gilt

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}, \tag{10.11}$$

wobei $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$ und $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$. Die Größen χ_e und χ_m charakterisieren die elektrische und magnetische Polarisierbarkeiten von Materialien.

Um Differentialgleichungen zu lösen, brauchen wir die Randbedingungen. Diese Randbedingungen haben wir vorher auch diskutiert und wir stellen alle Randbedingungen noch einmal zusammen. Um die Randbedingungen zu beschreiben, führen wir lokal drei Vektoren $\vec{n}$, $\vec{e}_j$ und $\vec{e}_3 = [\vec{n} \times \vec{e}_j]$ ein, wobei $\vec{n}$ Normal zu der Grenze steht und $\vec{e}_j$ parallel zum freien Flächenstrom ist $(\vec{e}_j | \vec{j})$. An der Grenze von zwei Materialien gilt

$$\begin{aligned} &\vec{n} \cdot (D_1 - D_2) = \sigma_f, \quad \vec{n} \cdot (B_1 - B_2) = 0, \quad \vec{E}_{1,||} = \vec{E}_{2,||}, \\ &\vec{e}_j \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0, \quad \vec{e}_3 \cdot (\vec{H}_1 - \cdot \vec{H}_2) = \vec{e}_j \cdot \vec{j}_f, \end{aligned} \tag{10.12}$$

wobei σ_f und $\vec{j}_f$ die Flächenladungsdichte und die Flächenstromdichte sind, und $\vec{E}_{||} = \vec{E} - (\vec{n}\vec{E})\vec{n}$.

In vorherigen Vorlesungen haben wir gesagt, dass es günstig ist, die Felder mit Hilfe des elektrischen Potentials φ und des Vektor-Potentials $\vec{A}$ darzustellen

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{10.13}$$

Allerdings ist es einfach zu sehen, dass diese Formeln mit den vollen Maxwell'schen Gleichungen nicht kompatibel sind. In der Tat ist $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0$ und deswegen können wir nicht die Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \tag{10.14}$$

erfüllen. Andererseits können wir das Verhältnis zwischen $\vec{B}$ und $\vec{A}$ behalten, weil eine Maxwell'sche Gleichung lautet

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \tag{10.15}$$

Wir haben gesehen, dass es nicht möglich ist $\vec{E}$ als Divergenz darzustellen. Dann schreiben wir

$$\vec{E} = -\nabla\varphi + \vec{K}, \tag{10.16}$$

setzen diesen Ausdruck in Gl. (10.14) ein und erhalten

$$\vec{\nabla} \times \vec{K} = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{10.17}$$

Wir können dann

$$\vec{K} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \tag{10.18}$$

auswählen. Mit Hilfe dieser Gleichung können wir die elektromagnetischen Felder durch φ und $\vec{A}$ ausdrücken:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{10.19}$$

Diese Gleichungen haben eine interessante Eigenschaft, welche wir jetzt diskutieren wollen. Nehmen wir an, dass zwei Funktionen φ und $\vec{A}$ gegeben sind. Mit Hilfe dieser Funktionen können die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ berechnet werden. Es scheint offensichtlich, dass, falls wir statt φ und $\vec{A}$ zwei *andere* Funktionen $\varphi_1, \vec{A}_1$ benutzen, erhalten wir *andere* Felder. Interessanterweise ist diese Aussage nicht ganz richtig, weil, falls $\varphi_1, \vec{A}_1$ mit φ und $\vec{A}$ so verbunden sind

$$\varphi_1 = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \vec{A}_1 = \vec{A} + \vec{\nabla} f, \tag{10.20}$$

dann erhalten wir gleiche Felder egal ob wir mit $\varphi_1, \vec{A}_1$ oder mit $\varphi, \vec{A}$ rechnen. Die Funktion f in Gl. (10.20) ist eine *beliebige* Funktion von t und $\vec{r}$.

Es ist offensichtlich, dass $\vec{B}_1 = \vec{B}$, weil $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$. Für $\vec{E}_1$ finden wir

$$\vec{E}_1 = -\vec{\nabla}\varphi_1 - \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla}\left(\varphi - \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\frac{\partial f}{\partial t} = \vec{E}. \tag{10.21}$$

Die Auswahl einer Funktion f erlaubt uns bestimmte Eigenschaften von ϕ und $\vec{A}$ zu erforden; wir reden dann über Potentiale *in bestimmter Eichung*.

Wir können jetzt die Maxwell'sche Gleichungen für Potentiale schreiben. Die zwei Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \tag{10.22}$$

sind für die Potentiale φ und $\vec{A}$ automatisch erfüllt. Die anderen zwei Gleichungen sind interessanter. Wir erhalten

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla}^2\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ &\vec{\nabla} \times B - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A} - \mu_0\epsilon_0\left(-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}\right) = \mu_0\vec{j}. \end{aligned} \tag{10.23}$$

Um diese Gleichungen zu vereinfachen, können wir *die Eichung auswählen*. Eine Möglichkeit besteht darin, dass wir die Funktion f so auswählen, dass

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \tag{10.24}$$

Diese Gleichung heißt Lorentz'sche Eichung.

Mit Hilfe von Gl. (10.24) können wir Eq. (10.23) so umschreiben

$$\begin{aligned} \Box \varphi &= \left[\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right] \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \Box \vec{A} &= \left[\frac{\partial^2 \vec{A}}{c^2 \partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right] \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \end{aligned} \tag{10.25}$$

$\Box$ heißt *D'Alambert'scher Operator*. Die obige Gleichungen sind die Maxwell'sche Gleichungen in *Lorentz'scher Eichung*, Gl. (10.24). Ferner haben wir den Parameter c eingeführt

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \tag{10.26}$$

Wir merken, dass c die Einheit der Geschwindigkeit haben soll. Wir werden später sehen, dass c die Geschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen im Vakuum ist, also die *Lichtgeschwindigkeit*.

Es gibt auch andere Möglichkeiten die Eichung auszuwählen. Zum Beispiel können wir einfordern, dass

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \tag{10.27}$$

Diese Gleichung heißt *Coulomb'sche Eichung*. In diesem Fall gilt

$$-\vec{\nabla}^2 \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{10.28}$$

sodass wir diese Gleichung sofort lösen können

$$\varphi(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3 \vec{r}_1 \frac{\rho(t, \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \tag{10.29}$$

Die Gleichung für das Vektor-Potential ist, anderseits, kompliziert. Allerdings ist zu bemerken, dass, falls $\rho = 0$ ist und es keine externe Oberfläche mit

Randbedingungen gibt, ist $\phi = 0$. In diesem Fall gilt $\Box\vec{A} = \mu_0\vec{j}$ als die Gleichung für $\vec{A}$ auch in der Coulomb'schen Eichung.

Wir wollen jetzt über die Lösungen der Gl. (10.25) diskutieren. In früheren Vorlesungen haben wir elektrische und magnetische Felder aus Ladungsverteilungen und Stromverteilungen hergeleitet; ohne Ladungen und Ströme und ohne Gegenstände mit fixierten Potentiale waren die Felder eine Null. Wir wollen jetzt anschauen was mit den Lösungen von Gl. (10.25) passiert, falls wir ρ und $\vec{j}$ nach Null setzen. Wir werden sehen, dass in diesem Fall die Lösungen mit $\varphi \neq 0$ und $\vec{A} \neq 0$ existieren.

Eine sehr wichtige Lösung von Gl. (10.25) mit $\rho = 0, \vec{j} = 0$, ist die Lösung welche *ebene Wellen* beschreibt. Um diese Lösungen zu konstruieren, stellen wir uns vor, dass φ und $\vec{A}$ nur von t und einer anderen Koordinate abhängen. Wir nennen diese Koordinate x.

Die Gleichungen, welche wir dann lösen sollen, sehen so aus

$$\left[\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] f(t,x) = 0, \tag{10.30}$$

wobei die Funktion f entweder φ oder $\vec{A}_{x,y,z}$ darstellt.

Gleichung (10.30) können wir so lösen. Wir schreiben den Differenzialoperator um

$$\left[\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] = \left[\frac{\partial}{c\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial}{c\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right], \tag{10.31}$$

und machen eine Variablen-Transformation

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct. \tag{10.32}$$

Es folgt

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_t = \left.\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|_{ct}\left.\frac{\partial}{\partial\xi}\right|_\eta + \left.\frac{\partial\eta}{\partial x}\right|_{ct}\left.\frac{\partial}{\partial\eta}\right|_\xi = \left.\frac{\partial}{\partial\xi}\right|_\eta + \left.\frac{\partial}{\partial\eta}\right|_\xi. \tag{10.33}$$

Ähnlich finden wir

$$\left.\frac{\partial}{c\partial t}\right|_x = \left.\frac{\partial}{\partial\xi}\right|_\eta - \left.\frac{\partial}{\partial\eta}\right|_\xi. \tag{10.34}$$

Der Differenzialoperator Gl. (10.31) verwandelt sich in

$$\left[\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] = 4\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}. \tag{10.35}$$

Die Differentialgleichung lautet dann

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{10.36}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$f(x,t) = g_1(\xi) + g_2(\eta) = g_1(x+ct) + g_2(x-ct), \tag{10.37}$$

wobei g_1 und g_2 zwei *beliebige* Funktionen sind.

Die Bedeutung dieser Lösungen ist klar. Nehmen wir an, dass an dem Zeitpunkt $t = 0$ wir zwei Funktionen $g_1(x)$ und $g_2(x)$ definiert haben. Dann verschieben sich für $t > 0$ diese Funktionen entweder nach links (g_1) oder nach rechts (g_2) mit der Geschwindigkeit c ohne die Form der Funktion zu ändern.

Als Beispiel betrachten wir die Lösungen, welche sich in die Richtung x ausbreiten

$$\varphi(t,x) = f(x-ct), \quad \vec{A}(t,x) = \vec{a}(x-ct). \tag{10.38}$$

Wegen Gl. (10.24) sind die Funktionen f und $\vec{a}$ aber nicht unabhängig. Es muss gelten

$$\frac{\partial f}{c^2 \partial t} + \frac{\partial a_x}{\partial x} = 0. \tag{10.39}$$

Weil f und $\vec{a}$ nur von $\eta = x - ct$ abhängen, können wir diese Gleichung so umschreiben

$$\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta} = \frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}\eta}. \tag{10.40}$$

Wir berechnen jetzt elektrische und magnetische Felder der ebenen Welle. Wir fangen mit dem magnetischen Feld an und erhalten

$$B_x = 0, \;\; B_y = -\frac{\mathrm{d}a_z}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}a_z}{\mathrm{d}\eta}, \quad B_z = \frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}\eta}. \tag{10.41}$$

Für das elektrische Feld finden wir

$$E_x = -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial t} = -\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta} + c\frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}\eta} = 0, \tag{10.42}$$

wobei wir die Gl. (10.40) benutzt haben, und

$$E_y = -\frac{\partial a_y}{\partial t} = c\frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}\eta}, \quad E_z = -\frac{\partial a_z}{\partial t} = c\frac{\mathrm{d}a_z}{\mathrm{d}\eta}. \tag{10.43}$$

Aus Gl. (10.41,10.43) können wir folgende Eigenschaften elektromagnetischer Felder der ebenen Welle herleiten

$$\vec{n}\cdot\vec{E}=0,\quad \vec{n}\cdot\vec{B}=0,\quad \vec{E}\cdot\vec{B}=0,\quad \vec{B}=\frac{\vec{n}\times\vec{E}}{c},\quad \vec{B}^2=\frac{\vec{E}^2}{c^2}, \qquad (10.44)$$

wobei $\vec{n}$ die Richtung der Ausbreitung der Welle ist.

Wir haben gesehen, dass elektrische und magnetische Felder die Energie haben. Die Energiedichte ist

$$w(x,t)=\frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right). \qquad (10.45)$$

Weil $\vec{E}=\vec{E}(x-ct)$ und $\vec{B}=\vec{B}(x-ct)$, breitet sich auch die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes mit der Geschwindigkeit c aus. Diesen Prozess können wir mit einer anderer Größe bezeichnen, den Poynting-Vektor

$$\vec{\mathcal{S}}=\frac{1}{\mu_0}\left[\vec{E}\times\vec{B}\right]. \qquad (10.46)$$

Wir erhalten

$$\vec{\mathcal{S}}(t,x)=c\vec{n}\,w(t,x). \qquad (10.47)$$

Es ist offensichtlich, dass der Poynting-Vektor $\vec{\mathcal{S}}$ den Fluss der Energie durch due infinitesimale Fläche $\mathrm{d}\vec{S}$ beschreibt

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\vec{\mathcal{S}}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \qquad (10.48)$$

Schließlich muss es klar sein, dass eine ebene Welle in beliebige Richtungen propagieren kann. Falls wir die Richtung mit dem Vektor $\vec{n}$ bezeichnen, sollen wir statt der Variable x das Skalarprodukt $\vec{r}\cdot\vec{n}$ benutzen. Dann schreiben wir

$$\vec{E}=\vec{E}(ct-\vec{n}\cdot\vec{r}),\quad \vec{B}=\vec{B}(ct-\vec{n}\cdot\vec{r}), \qquad (10.49)$$

u.s.w.

Unter allen ebene Wellen spielen *monochromatische* Wellen eine sehr wichtige Rolle. Die Felder einer monochromatischen Welle haben harmonische Zeitabhängigkeit, z.B. $\vec{E}\sim\cos(\omega t+\phi)$. Die Frequenzen ω sind in *Hertz*, Hz gegeben; wobei 1 Hz $=$ sek^{-1}. Typische Werte von ω sind: 10^{18} für

Röntgenstrahlung, $10^{15} - 10^{14}$ für sichtbares Licht von Blau bis Rot, 10^9 für Handys, $10^8 - 10^4$ für Fernseher und Radiowellen.

Weil eine ebene Welle von t und $\vec{r}$ nur in einer Kombination abhängen kann, muss eine monochromatische Welle auch harmonische Abhängigkeit von $\vec{r}$ haben. Um die Berechnungen einfacher zu machen, werden wir die Lösungen in komplexer Form schreiben

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left[\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t}\right], \quad \vec{B} = \mathrm{Re}\left[\vec{B}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t}\right]. \tag{10.50}$$

Weil diese Felder eine ebene Welle beschreiben, gilt

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}, \tag{10.51}$$

wobei $\vec{n}$ der Ausbereitungsvektor der Welle ist. Den Vektor $\vec{k}$ nennen wir der *Wellenvektor*, den Betrag von $\vec{k}$ *die Wellenzahl* und

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{10.52}$$

– die *Wellenlänge*.

Die Vektoren $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$ sind komplexe zweidimensionale Vektoren, welche in der Ebene liegen, die orthogonal zum Vektor $\vec{n}$ ist. Diese Vektoren beschreiben die *Polarisation* der Welle. Die Vektoren $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$ erfüllen folgende Gleichungen,

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{B}_0 \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{B}_0 = \frac{\vec{n} \times \vec{E}_0}{c}. \tag{10.53}$$

Betrachten wir den Vektor $\vec{E}_0$. Wir schreiben $\vec{E}_0$ als die lineare Kombination von zwei reellen Vektoren $\vec{e}_{1,2}$, die orthogonal zu $\vec{k}$ sind

$$\vec{E}_0 = \vec{e}_1 c_1 e^{i\alpha_1} + \vec{e}_2 c_2 e^{i\alpha_2 - i\pi/2}. \tag{10.54}$$

Die Konstanten $c_{1,2}$ und $\alpha_{1,2}$ sind auch reell. Das elektrische Feld lautet

$$\vec{E} = \vec{e}_1\, E_1 + \vec{e}_2\, E_2, \tag{10.55}$$

wobei

$$E_1(t,\vec{r}) = c_1 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \alpha_1), \quad E_2(t,\vec{r}) = -c_2 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \alpha_2). \tag{10.56}$$

Wir untersuchen spezifische Werte für $\alpha_{1,2}$. Die einfachste Möglichkeit ist $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$. Dann gilt

$$\vec{E} = (c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2)\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \alpha_1), \tag{10.57}$$

und der Vektor $\vec{E}_1$ zeigt immer in die gleiche Richtung. In diesem Fall reden wir über *lineare Polarisation* der Welle.

Die zweite Möglichkeit ist $\alpha_2 = \alpha_1$ oder $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$. Dann

$$E_1(t,\vec{r}) = c_1\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \alpha_1), \quad E_2(t,\vec{r}) = \mp c_2\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \alpha_1), \tag{10.58}$$

sodass

$$\frac{E_1^2(t)}{c_1^2} + \frac{E_2^2(t)}{c_2^2} = 1. \tag{10.59}$$

Das ist die Gleichung für eine Ellipse und in diesem Fall reden wir über *elliptische* Polarisation. Falls $c_1 = c_2$ ist, haben wir eine *zirkuläre* Polarisation.

Wir merken, dass wir die zirkuläre Polarisation als komplexes Feld so schreiben können

$$\vec{E}_\pm = \sqrt{2}c_1\vec{e}_\pm e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t + i\alpha_1}, \tag{10.60}$$

wobei

$$\vec{e}_\pm = \frac{(\vec{e}_1 \pm i\vec{e}_2)}{\sqrt{2}} \tag{10.61}$$

zwei komplexe Basisvektoren sind, die für die Beschreibung zirkulärpolarisierter Wellen breit genutzt wurde.

Wir merken dass zwei Basis-Vektoren $\vec{e}_\pm$ folgende Gleichung erfüllen

$$i\,[\vec{n}\times\vec{e}_\lambda] = \lambda\,\vec{e}_\lambda, \tag{10.62}$$

wober $\lambda = \pm 1$ und $\vec{n}$ der Ausbretungsvektor der Welle sind. Der Parameter λ heißt *Helizität*. Für zirkulärpolarisierte Welle kann man Gl. (10.62) benutzen um zwischen zwei Polarisationen zu unterscheiden, unabhängig von der Richtung des Ausbretungsvektors.

Im allgemeinen Fall gilt folgende Gleichung

$$\frac{E_1^2(t)}{c_1^2} + \frac{E_2(t)^2}{c_2^2} + 2\frac{E_1(t)}{c_1}\,\frac{E_2(t)}{c_2}\sin(\alpha_{12}) = \cos^2(\alpha_{12}), \tag{10.63}$$

wobei $\alpha_{12} = \alpha_1 - \alpha_2$ ist. Diese Gleichung können wir so umschreiben

$$\left(\frac{E_1}{c_1} + \frac{E_2}{c_2}\right)^2 \frac{1}{1-\sin\alpha_{12}} + \left(\frac{E_1}{c_1} - \frac{E_2}{c_2}\right)^2 \frac{1}{1+\sin\alpha_{12}} = 1. \tag{10.64}$$

Es ist dann offensichtlich, dass auch im allgemeinen Fall die Polarisation elliptisch ist.

Wir betrachten *freie* Maxwell'sche Gleichungen in einem linearen Material. Die Gleichungen sehen so aus

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0,\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0,\quad \vec{\nabla}\times\vec{B}-\mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0. \tag{10.65}$$

Der Unterschied zwischen den Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum und im Material ist, dass das Produkt zwischen den materialabhängigen Konstanten ϵ und μ in der letzten Gleichung statt $\mu_0\epsilon_0$ erscheint. Es ist klar, dass die Maxwell'sche Gleichungen in Materialien auch ebene Wellen als Lösungen haben, aber diese Wellen bereiten sich mit der Geschwindigkeit $c_m = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ anstatt mit c aus. Das Verhältnis zwischen c und c_m bezeichnen wir als n

$$n=\frac{c}{c_m}=\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}}>1, \tag{10.66}$$

und nennen diese Größe *der Brechungsindex*. Umgekehrt ist die Lichtgeschwindigkeit in einem Material mit dem Brechungsindex n *kleiner* als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

$$c_n=\frac{c}{n}<c. \tag{10.67}$$

Monochromatische ebene Wellen in einem Material sehen dann so aus

$$\vec{E}=\vec{E}_0\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t},\quad \vec{B}=\frac{\vec{n}\times\vec{E}_0}{c_m}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}. \tag{10.68}$$

wobei $\vec{k}=\omega/c_m\,\vec{n}$ ist und $\vec{E}_0\cdot\vec{n}=0$ ist.

11 Reflexion und Transmission der elektromagnetischen Wellen

In Vorlesung 10 haben wir ebene Wellen diskutiert. Wir werden diese Diskussion in dieser Vorlesung fortsetzen.

Betrachten wir einen Raum, gefüllt mit zwei Materialien. Der Halbraum $z < 0$ (Gebiet I) enthält das Material mit dielektrischer Konstante ϵ_1 und magnetischer Suszeptibilität μ_1. Der Halbraum $z > 0$ (Gebiet II) enhält das Material mit dielektrischer Konstante ϵ_2 und magnetischer Suszeptibilität μ_2, siehe Bild (**??**). Wir wollen eine Lösung der freien Maxwell'schen Gleichungen finden, welche monochromatische ebene Wellen beschreibt. Die Randbedingungen sind: bei $z = -\infty$ gibt es eine einlaufende Welle, die sich in die positive z-Richtung ausbreitet, und bei $z = +\infty$ gibt es auch eine Welle, die sich in positive z-Richtung ausbreitet.

Die Interpretation dieser Randbedingungen ist Folgendes: wir schicken eine gegebene Welle aus $z = -\infty$ in Richtung der Grenze. An der Grenze wird ein Teil der Welle reflektiert (reflektierte Welle) und ein Teil wird durchgelassen (transmittierte Welle). Dementsprechend, bei $z = -\infty$ gibt es zwei (einlaufende und auslaufende) Wellen und bei $z = +\infty$ – nur die auslaufende. Wir kontrolieren den Wellenvektor und die Polarization der einlaufenden Welle bei $z = -\infty$; die Eigenschaften anderen Wellen sollen wir aus Maxwell'schen Gleichungen bestimmen.

Die Grenze zwischen zwei Gebieten liegt in der $x - y$ Ebene bei $z = 0$. Wir können allerdings x und y Achsen frei auswählen. Wir machen es so, dass der Ausbreitungsvektor der einlaufenden Welle $\vec{n}_I$ in der $(z - x)$-Ebene liegt.

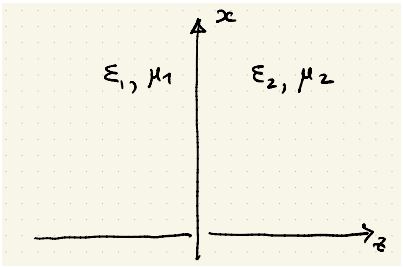

Abbildung 18: Der Raum aufgeteilt in zwei Gebiete.

Dann gilt

$$\vec{n}_I = \cos\theta_I \vec{e}_z + \sin\theta_I \vec{e}_x. \tag{11.1}$$

Den Ausbreitungsvektor der reflektierten Welle schreiben wir so

$$\vec{n}_R = -\cos\theta_R \vec{e}_z + \sin\theta_R \cos\phi_R \vec{e}_x + \sin\theta_I \sin\phi_R \vec{e}_y. \tag{11.2}$$

Per Randbedingung sollen wir im Gebiet II nur die transmittierte Welle haben; ihren Ausbreitungsvektor schreiben wir

$$\vec{n}_T = \cos\theta_T \vec{e}_z + \sin\theta_T \cos\phi_T \vec{e}_x + \sin\theta_T \sin\phi_T \vec{e}_y. \tag{11.3}$$

Als ersten Schritt wollen wir zeigen, dass in obigen Gleichungen $\phi_R = \phi_T = 0$, sodass die reflektierte Welle und die transmittierte Welle *auch in der* $(x-z)$*-Ebene* liegen. Dieses Ergebnis folgt aus den Randbedingungen für verschiedene Komponente von elektrischen und magnetischen Felder an der Grenze, welche im allgemeinen Fall so aussehen

$$(..)_I e^{i\frac{\omega}{c_1}\vec{n}_I\cdot\vec{r}_G} + (..)_R e^{i\frac{\omega}{c_1}\vec{n}_R\cdot\vec{r}_G} = (..)_T e^{i\frac{\omega}{c_2}\vec{n}_T\cdot\vec{r}_G}. \tag{11.4}$$

Der Ortsvektor $\vec{r}_G$ beschreibt Punkte an der Grenze; weil die Grenze bei $z = 0$ liegt, schreiben wir

$$\vec{r}_G = y\vec{e}_y + x\vec{e}_x. \tag{11.5}$$

Falls $\phi_{R,T}$ sich von Null unterscheidet, enthalten dann der zweite Term auf der linken Seite von Gl. (11.4) und der Term auf der rechten Seite von Gl. (11.4) y-abhängige e-Funktionen. Weil Gl. (11.4) für beliebige y gelten soll und weil der erste Term (einlaufende Welle) keine y-Abhängigkeit hat und auch keine Null sein kann, muss $\phi_R = \phi_T = 0$ gelten, um die y-Abhängigkeit der e-Funktionen zu vermeiden. Dann

$$\begin{aligned} \vec{n}_R &= -\cos\theta_R \vec{e}_z + \sin\theta_R \vec{e}_x, \\ \vec{n}_T &= \cos\theta_T \vec{e}_z + \sin\theta_T \vec{e}_x. \end{aligned} \tag{11.6}$$

Was wir über die y-Abhängigket in Gl. (11.4) gesagt haben, gilt auch für die x-Abhändigkeit – die x-abhängige Phasen von drei e-Funktionen sollen *gleich* sein. Das bedeutet

$$\frac{\sin\theta_I}{c_1} = \frac{\sin\theta_R}{c_1} = \frac{\sin\theta_T}{c_2}, \tag{11.7}$$

wobei $c_{1,2}$ Lightgeschwindigkeiten in zwei Gebieten sind. Wir schreiben diese Gleichungen so um

$$\theta_R = \theta_I, \quad \frac{\sin\theta_T}{\sin\theta_I} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{n_1}{n_2}, \tag{11.8}$$

wobei $n_{1,2}$ die Brechungsindexe von zwei Materialien sind.

Wir merken, dass drei Ergebnisse, die wir erzielt haben (die drei Wellen liegen in einer Ebene, der Reflexionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel, und das Brechungsgesetz), drei wichtige Gesetze geometrischer Optik sind.

Wir wollen jetzt die Verhältnisse zwischen den elektromagnetischen Felder der drei Wellen finden. Für das elektrische Feld schreiben wir

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_\alpha e^{\frac{i\omega}{c_\alpha}\vec{n}_\alpha\cdot\vec{r}}, \tag{11.9}$$

wobei $\alpha = I, R, T$ ist und c_α entweder c_1 oder c_2 ist. Wir parametrisieren die Felder $\vec{E}_\alpha$ unter der Bedingung, dass $\vec{E}_\alpha \cdot \vec{n}_\alpha = 0$ ist. Dann

$$\begin{aligned}
\vec{E}_I &= E_{1,I}\left[\sin\theta_I\vec{e}_z - \cos\theta_I\vec{e}_x\right] + E_{2,I}\vec{e}_y,\\
\vec{E}_R &= E_{1,R}\left[\sin\theta_R\vec{e}_z + \cos\theta_R\vec{e}_x\right] + E_{2,R}\vec{e}_y,\\
\vec{E}_T &= E_{1,T}\left[\sin\theta_T\vec{e}_z - \cos\theta_T\vec{e}_x\right] + E_{2,T}\vec{e}_y.
\end{aligned} \tag{11.10}$$

Wir benutzen die Randbedingungen für das D-Feld und E-Feld Gl. (10.12) und erhalten

$$\begin{aligned}
&\epsilon_1\left(E_{1,I}\sin\theta_I + E_{1,R}\sin\theta_R\right) = \epsilon_2 E_{1,T}\sin\theta_T,\\
&E_{1,I}\cos\theta_I - E_{1,R}\cos\theta_R = E_{1,T}\cos\theta_T,\\
&E_{2,I} + E_{2,R} = E_{2,T}.
\end{aligned} \tag{11.11}$$

Wir sehen, dass wir die ersten zwei Gleichungen nach $E_{1,R}$ und $E_{1,T}$ lösen können. Weil $\theta_I = \theta_R$ ist, finden wir

$$\begin{aligned}
E_{1,I} + E_{1,R} &= \frac{\epsilon_2\sin\theta_T}{\epsilon_1\sin\theta_I}E_{1,T},\\
E_{1,I} - E_{1,R} &= \frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I}E_{1,T}.
\end{aligned} \tag{11.12}$$

Wir führen folgende Notationen ein

$$\alpha = \frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I}, \quad \beta = \frac{\epsilon_2\sin\theta_T}{\epsilon_1\sin\theta_I}, \tag{11.13}$$

und erhalten

$$E_{1,T} = \frac{2E_{1,I}}{\alpha+\beta}, \quad E_{1,R} = \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}E_{1,I}. \tag{11.14}$$

Wir merken, dass für den Parameter β eine bessere Schreibweise existiert. Die Idee ist, β durch $\mu_{1,2}$ und $n_{1,2}$ umzuschreiben, weil in vielen Materialien μ sehr nah an μ_0 ist. Dann

$$\beta = \frac{\epsilon_2 \sin\theta_T}{\epsilon_1 \sin\theta_I} = \frac{\epsilon_2\mu_2}{\epsilon_1\mu_1}\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\sin\theta_T}{\sin\theta_I} = \frac{n_2^2}{n_1^2}\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{n_1}{n_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \approx \frac{n_2}{n_1}. \tag{11.15}$$

Wir sollen noch $E_{2,R}$ und $E_{2,T}$ bestimmen. Eine Gleichung haben wir schon, siehe letzte Gleichung in Gl. (11.11). Die zweite Gleichung kommt aus den Randbedingungen für die x-Komponente des magnetischen Felds $\vec{H}$

$$\frac{1}{\mu_1 c_1}\vec{e}_x \cdot \Big([\vec{n}_I \times \vec{E}_I] + [\vec{n}_R \times \vec{E}_R]\Big) = \frac{1}{\mu_2 c_2}\vec{e}_x \cdot [\vec{n}_T \times \vec{E}_T]. \tag{11.16}$$

Die individuelle Beiträge zu dieser Gleichung können wir einfach berechnen. Zum Beispiel,

$$\vec{e}_x \cdot [\vec{n}_T \times \vec{E}_T] = \vec{E}_T \cdot [\vec{e}_x \times \vec{n}_T] = -\cos\theta_T \vec{E}_T \cdot \vec{e}_y = -\cos\theta_T E_{2,T}. \tag{11.17}$$

Wir finden dann

$$E_{2,I} - E_{2,R} = \frac{\mu_1 c_1}{\mu_2 c_2}\,\frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I}E_{2,T} = \beta\alpha E_{2,T}. \tag{11.18}$$

Wir benutzen die obige Formel zusammen mit der letzten Gleichung in Gl. (11.11) und erhalten

$$E_{2,T} = \frac{2}{1+\alpha\beta}\,E_{2,I}, \quad E_{2,R} = \frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta}\,E_{2,I}. \tag{11.19}$$

Wir definieren dann die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten als die Energie per Zeiteinheit, die durch die Grenze übertragen wurde. Für alle Wellen berechnen wir diese Größe mit Hilfe des Poynting-Vektors

$$W_\alpha = \frac{\vec{e}_z \cdot \left[\vec{E}_\alpha \times \vec{B}_\alpha\right]}{\mu_{1,2}} = \frac{\vec{E}_\alpha^2}{c_\alpha \mu_{1,2}}\vec{e}_z \cdot \vec{n}_\alpha, \tag{11.20}$$

mit $\alpha = I, T, R$.

Wir benutzen die obigen Formeln und erhalten

$$
\begin{aligned}
W_I &= \frac{\cos\theta_I}{\mu_1 c_1}\left[E_{1,I}^2 + E_{2,I}^2\right], \\
W_R &= -\frac{\cos\theta_R}{\mu_1 c_1}\left[\frac{(\beta-\alpha)^2}{(\beta+\alpha)^2}E_{1,I}^2 + \frac{(1-\beta\alpha)^2}{(1+\beta\alpha)^2}E_{2,I}^2\right], \\
W_T &= \frac{\cos\theta_T}{\mu_2 c_c}\left[\frac{4}{(\beta+\alpha)^2}E_{1,I}^2 + \frac{4}{(1+\beta\alpha)^2}E_{2,I}^2\right].
\end{aligned}
\tag{11.21}
$$

Wir sollen zwei Polarisationen der einlaufenden Welle separat betrachten. Dann finden wir für $E_{1,I} \neq 0, E_{2,I} = 0$,

$$
R = \frac{|W_R|}{W_I} = \frac{(\beta-\alpha)^2}{(\alpha+\beta)^2}, \quad T = \frac{|W_T|}{W_I} = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2},
\tag{11.22}
$$

wobei R und T der Reflexions- bzw. der Transmissionkoeffizient ist.

Für den Fall $E_{1,I} = 0, E_{2,I} \neq 0$ finden wir

$$
R = \frac{(1-\beta\alpha)^2}{(1+\alpha\beta)^2}, \quad T = \frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha\beta)^2}.
\tag{11.23}
$$

Für beide Polarisationen gilt

$$
R + T = 1.
\tag{11.24}
$$

Es ist interessant spezielle Fälle zu diskutieren. Ein wichtiger Fall entspricht der Situation wo der Ausbreitungsvektor einlaufender Welle orthogonal zur Grenze ist. In diesem Fall ist $\theta_I = 0$. Es folgt, dass

$$
\theta_R = 0, \quad \theta_T = 0, \quad \alpha = 1.
\tag{11.25}
$$

Mit Hilfe von Gl. (11.19) und Gl. (11.14) können wir zeigen, dass folgende Gleichungen gelten

$$
\vec{E}_R = \frac{1-\beta}{1+\beta}\vec{E}_I, \quad \vec{E}_T = \frac{2}{1+\beta}\vec{E}_I.
\tag{11.26}
$$

Das bedeutet, dass in dem Fall wo die Welle senkrecht an der Grenze fällt, die Polarisation der Welle sich nicht ändert.

Um den zweiten Fall zu erklären, schreiben wir Gl. (11.8) so um

$$
\sin\theta_T = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_I.
\tag{11.27}
$$

Es folgt, dass, falls $n_1/n_2 > 1$ ist, ein Winkel θ_I existiert für welchen die rechte Seite von Gl. (11.27) größer als Eins ist. Das ist natürlich ein komisches Ergebnis, weil die linke Seite dieser Gleichung eine Sinusfunktion sein soll und eine Sinusfunktion immer kleiner als Eins sein muss.

Wir sollen dann untersuchen was dieses Ergebnis bedeutet. Gl. (11.27) kommt aus dem Vergleich von Phasen der Wellen an der Grenze. Wir schreiben die transferierte Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_T e^{-i\omega t + i\frac{\omega}{c_2}(\cos\theta_T\ z + \sin\theta_T x)}. \tag{11.28}$$

Weil wir die Gleichung

$$\cos^2\theta_T + \sin^2\theta_T = 1 \tag{11.29}$$

brauchen, um zu behaupten, dass $\vec{E}$ die Lösung der Wellen-Gleichung ist, muss dann $\cos\theta_T$ imaginär sein. Wir schreiben

$$\sin\theta_T \to \cosh(y_T) = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_I, \quad \cos\theta_T \to i\sinh(y_T), \tag{11.30}$$

wobei y_T ein neuer Parameter ist. Dann für $z > 0$ gilt

$$\vec{E} = \vec{E}_T e^{-i\omega t + i\frac{\omega_2}{c}\cosh(y_T)\ x - \frac{\omega_2}{c}\sinh(y_T)\ z}. \tag{11.31}$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass in diesem Fall im Gebiet II die Lösung keine ebene Welle ist; die Lösung *zerfällt exponentiell* für große z-Werte. Weil

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0, \tag{11.32}$$

können wir die Parametrisierung des Vektors $\vec{E}_T$ in Gl. (11.10) benutzen und $\cos\theta_T$ und $\sin\theta_T$ in dieser Gleichung mit Hilfe von Gl. (11.30) interpretieren. Ferner können wir die ganze Analyse wiederholen und identische Ergebnisse für die Felder bekommen. Der einzige Unterschied ist, dass der Parameter α in unserem Fall imaginär ist

$$\alpha = \frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I} = \frac{i\sinh(y_T)}{\cos\theta_I} = i\frac{\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_I - n_2^2}}{n_2\sin\theta_I} = i\tilde{\alpha}. \tag{11.33}$$

Es ist dann einfach zu sehen, dass

$$|E_{1,R}|^2 = |E_{1,I}|^2, \quad |E_{2,R}|^2 = |E_{2,I}|^2. \tag{11.34}$$

Das bedeutet, dass der Reflexionskoeffizient in diesem Fall eine Eins und der Transmissionkoeffizient eine Null sind.

Es ist auch möglich, dass es überhaupt *keine Reflexion* gibt. Betrachten wir den Fall, wo die Polarisation der einfallenden Welle in der Einfallsebene liegt ($E_{2,I} = 0$). In diesem Fall gilt (siehe Gl. (11.14))

$$E_{1,R} \sim (\alpha - \beta) E_{1,I}. \tag{11.35}$$

D.h. die Bedingung, dass es keine reflektierte Welle gibt, ist

$$\alpha = \beta. \tag{11.36}$$

Weil $\beta \approx n_2/n_1$, können wir zwei Gleichungen schreiben

$$\frac{\sin\theta_T}{\sin\theta_I} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \alpha = \frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I} = \beta = \frac{n_2}{n_1}. \tag{11.37}$$

Diese Gleichungen sind miteinander kompatibel, falls

$$\cos\theta_T = \sin\theta_I, \quad \sin\theta_T = \cos\theta_I. \tag{11.38}$$

Wenn diese Gleichungen erfüllt sind, finden wir, dass

$$\tan\theta_I = \frac{n_2}{n_1}. \tag{11.39}$$

12 Wellen in Leiter

In Leiter gibt es freie Ladungen und Ströme. Die Ströme sind, wegen des Ohm'schen Gesetzes, mit dem elektrischen Feld verknüpft. Die Maxwell'schen Gleichungen, das Ohm'sche Gesetz und die Kontinuitätsgleichung lauten

$$\begin{aligned}
&(i)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{1}{\epsilon}\,\rho_f, \quad (ii)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\\
&(iii)\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0, \quad (iv)\quad \vec{\nabla}\times\vec{B}-\mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu\sigma\vec{E},\\
&(v)\quad \frac{\partial\rho_f}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{j_f}=0, \quad (vi)\quad \vec{j_f}=\sigma\vec{E}.
\end{aligned} \tag{12.1}$$

Um diese Gleichungen zu lösen, fangen wir an mit folgender Beobachtung. Wir nehmen Gleichung (vi), berechnen die Divergenz beider Seiten, benutzen Gleichungen (i) und (v) und erhalten

$$\frac{\partial\rho_f}{\partial t}+\frac{\sigma}{\epsilon}\rho_f=0. \tag{12.2}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$\rho_f(t,\vec{r})=\rho_f(0,\vec{r})e^{-t/\tau_R}, \tag{12.3}$$

wobei

$$\tau_R=\frac{\epsilon}{\sigma}, \tag{12.4}$$

die Relaxationszeit ist. Die Leitfähigkeit in einem guten Leiter ist sehr groß; dementsprechend ist τ_R sehr klein. Gl. (12.3) zeigt, dass für $t\gg\tau_R$ die Ladungsdichte ρ_f verschwindet und nach der Zeit τ_R es keine freie Ladungen in dem Leiter mehr gibt.

Dementsprechend können wir in Gl. (12.1) ρ_f nach Null setzen. Interessanterweise können wir für $\rho_f=0$ aus Gl. (12.1) die Wellengleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ herleiten.

Wir nehmen die Gleichung (iv) und leiten nach der Zeit ab. Dann benutzen wir die Gleichung (iii), um $\partial\vec{B}/\partial t$ zu eliminieren. Wir erhalten

$$-\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}-\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \tag{12.5}$$

Dann gilt

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\vec{\nabla}^2\vec{E}, \tag{12.6}$$

weil $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ ist. Wir erhalten dann

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{c_m^2 \partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{E} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \tag{12.7}$$

wobei $c_m^2 = 1/(\epsilon\mu)$ die Lichtgeschwindigkeit in dem Leiter ist. Eine ähnliche Berechnung gibt

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{c_m^2 \partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{B} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \tag{12.8}$$

Wir suchen nach monochromatischen Wellen und nehmen an, dass die Welle sich in z-Richtung ausbreitet. Dann schreiben wir

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t + i\tilde{k}z}, \tag{12.9}$$

setzen diesen Ausdruck in Gl. (12.7) ein und erhalten

$$\frac{\omega^2}{c_m^2} - \tilde{k}^2 + i\mu\sigma\omega = 0. \tag{12.10}$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c_m}\sqrt{1 + i\frac{\sigma}{\epsilon\omega}} = \frac{\omega}{c_m}\sqrt{1 + i\frac{1}{\tau_R\omega}}. \tag{12.11}$$

Es ist klar, dass $\tilde{k}$ eine komplexe Größe ist. Um reelle und imaginäre Teile dieser Größe zu extrahieren, schreiben wir

$$1 + i\frac{1}{\tau_R\omega} = \rho e^{i\theta}, \tag{12.12}$$

sodass

$$\rho\cos\theta = 1, \quad \rho\sin\theta = \frac{1}{\tau_R\omega}. \tag{12.13}$$

Dann gilt

$$\sqrt{1 + i\frac{1}{\tau_R\omega}} = \sqrt{\rho}e^{i\theta/2} = \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right), \tag{12.14}$$

und wir erhalten

$$\mathrm{Re}\left[\sqrt{1 + i\frac{1}{\tau_R\omega}}\right] = \sqrt{\rho\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\sqrt{\rho(1+\cos\theta)}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\rho+1}. \tag{12.15}$$

Eine ähnliche Berechnung ergibt

$$\mathrm{Im}\left[\sqrt{1+i\frac{1}{\tau_R\omega}}\right] = \sqrt{\rho\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\sqrt{\rho(1-\cos\theta)}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\rho-1}. \quad (12.16)$$

Schließlich schreiben wir

$$\tilde{k} = k + i\kappa, \quad (12.17)$$

wobei

$$k = \frac{\omega}{c\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{\tau_R^2\omega^2}}+1}, \quad \kappa = \frac{\omega}{c\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{\tau_R^2\omega^2}}-1}, \quad (12.18)$$

und wir benutzt haben dass

$$\rho = \sqrt{1+\frac{1}{\tau_R^2\omega^2}} \quad (12.19)$$

ist.

Wir schreiben noch einmal die monochromatische Welle in einem Leiter. Unserer ursprünglicher Ansatz ist in Gl. (12.9) gegeben. Wir benutzen dann Gl. (12.17) und erhalten

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\kappa z} e^{-i\omega t + ikz}, \quad (12.20)$$

wobei k und κ komplizierte Funktionen der Wellenfrequenz sind.

Gl. (12.17) bedeutet, dass die Ausbreitung einer Welle in einem Leiter *räumlich begrenzt* ist; die *Eindringstiefe* ist durch

$$d = \frac{1}{\kappa}, \quad (12.21)$$

gegeben.

Es ist interessant zu merken, dass die Eindringstiefe eine starke Funktion der Wellenfrequenzen ist. Falls $\tau_R\omega \gg 1$ ist, was im Wesentlichen mindestens sichtbares Licht braucht, finden wir

$$d \approx 2\tau_R c_m, \quad (12.22)$$

In einem gutem Leiter kann $\tau_R \sim 10^{-13}$ sec sein; dann ist $d \approx 10^{-4}$ m. Die Wellenzahl k ist in diesem Fall durch ein ganz normales Verhältnis gegeben

$$k = \frac{\omega}{c_m}. \tag{12.23}$$

Dann ist das Verhältnis der Eindringstiefe zur Wellenlänge sehr groß

$$\frac{d}{\lambda} \sim dk \sim \tau_R \omega \gg 1. \tag{12.24}$$

Für $\omega\tau_R \ll 1$, was für die meisten Wellen der Fall ist, finden wir, dass

$$\sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\tau_R^2\omega^2}} \pm 1} \approx \frac{1}{\tau_R \omega}. \tag{12.25}$$

Das bedeutet, dass

$$k = \kappa = \frac{\omega}{c_m}\sqrt{\frac{1}{2\omega\tau_R}}, \tag{12.26}$$

und deswegen

$$d \sim \lambda = c_m \tau_R \sqrt{\frac{2}{\tau_R \omega}} \tag{12.27}$$

ist. Für Handyfrequenzen ist $\tau_R\omega \sim 10^{-5}$ und $d \sim 10^{-2}m$. Es ist zu merken, dass das Verhältnis zwischen k und der Frequenz ω in diesem Fall,

$$k \sim \lambda^{-1} \sim \omega^{1/2}, \tag{12.28}$$

ungewöhnlich ist.

In einer Welle gibt es nicht nur das elektrische sondern auch das magnetische Feld. Wir schreiben

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-i\omega t + i\tilde{k}z}, \tag{12.29}$$

benutzen

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}, \tag{12.30}$$

und erhalten

$$\vec{B}_0 = \frac{\tilde{k}}{\omega}\left[\vec{n} \times \vec{E}_0\right], \tag{12.31}$$

wobei $\vec{n} = \vec{e}_z$ ist. Weil $\tilde{k}$ komplex ist, gibt es die relative Phase zwischen den elektrischen und magnetischen Feldern. Diese Phase berechnen wir, indem wir $\tilde{k}$ so schreiben

$$\tilde{k} = \rho_k e^{i\phi}, \tag{12.32}$$

wobei

$$\rho_k = \frac{\omega}{c_m}\rho^{1/2} = \frac{\omega}{c_m}\left[1 + \frac{1}{\tau_R^2\omega^2}\right]^{1/4}, \quad \tan\phi = \tan\frac{\theta}{2} = \tau_R\omega\left[\sqrt{1 + \frac{1}{\tau_R^2\omega^2}} + 1\right]. \tag{12.33}$$

Dann finden wir für linear-polarisierte Wellen z.B.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{-\kappa z}\cos(\omega t - kz + \phi_E), \\ \vec{B} &= \frac{\rho_k}{\omega}\left[\vec{e}_z \times \vec{E}_0\right] e^{-\kappa z}\cos(\omega t - kz + \phi_E - \phi). \end{aligned} \tag{12.34}$$

In einem guten Leiter ist $\tau_R\omega \ll 1$. In diesem Fall ist

$$\rho_k = \frac{\omega}{c_m\sqrt{\tau_R\omega}}, \quad \tan\phi = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}. \tag{12.35}$$

Das Verhältnis von Beträgen der $\vec{B}$- und $\vec{E}$-Felder ist

$$\frac{c_m|\vec{B}|}{|\vec{E}|} = \frac{1}{\sqrt{\tau_R\omega}} \gg 1. \tag{12.36}$$

D.h. dass im idealen Leiter das magnetische Feld monochromatischer Welle viel größer als das elektrische Feld ist.

Als nächsten Schritt untersuchen wir was passiert, falls eine momochromatische Welle auf einen Leiter einfällt. Ein ähnliches Problem, aber für zwei Dielektrika, haben wir in der Vorlesung 11 diskutiert. Jetzt nehmen wir an, dass für $z < 0$ ein Vakuum und für $z > 0$ einen Leiter mit der Leitfähigkeit σ, der dielektrischen Konstante ϵ und der Permeabilität μ gibt. Um dieses Problem zu beschreiben, gehen wir zurück zu Gl. (12.7,12.8) und betrachten monochromatische Welle. Wir schreiben $\vec{E}(t,\vec{r}) = E(\vec{r})e^{-i\omega t}$ und erhalten

$$-\omega^2\epsilon\mu\left(1 + \frac{i\sigma}{\epsilon\omega}\right)\vec{E}(\vec{r}) - \vec{\nabla}^2\vec{E}(\vec{r}) = 0. \tag{12.37}$$

Wir können diese Gleichung so umschreiben

$$-\omega^2\epsilon(\omega)\mu\ \vec{E}(\vec{r}) - \vec{\nabla}^2\vec{E}(\vec{r}) = 0, \tag{12.38}$$

und

$$\epsilon(\omega) = \epsilon\left(1 + \frac{i}{\tau_R \omega}\right), \tag{12.39}$$

als *frequenzabhängige komplexe dielektrische Konstante* interpretieren. Es ist dann möglich mit Hilfe dieser dielektrischen Konstante die Analyse der Vorlesung 11 zu wiederholen. Eigentlich gelten alle Formeln, welche wir in Vorlesung 11 hergeleitet haben auch im jetzigen Fall mit dem Vorbehalt, dass manche Parameter komplex sind und wir die Ergebnisse dementsprechend interpretieren müssen.

Die Analyse der Phasen ergibt

$$\theta_I = \theta_R, \tag{12.40}$$

für die Winkeln einfallender und reflektierter Wellen und

$$\sin\theta_I = n(\omega)\sin\theta_T = c\sqrt{\mu\epsilon(\omega)}\sin\theta_T. \tag{12.41}$$

für einfallende und transmittierte Wellen. Wir schreiben jetzt den zeitunabhängigen Teil der Phase der transmittierten Welle

$$\frac{\omega}{c} n(\omega)(\cos\theta_T z + \sin\theta_T x) = \frac{\omega}{c} n(\omega)\cos\theta_T z + \frac{\omega}{c}\sin\theta_I x. \tag{12.42}$$

Wir merken, dass $n(\omega)\cos\theta_T$ komplex ist und der imaginärere Teil dieser Größe die Eindringstiefe gibt.

Weitere Berechnungen führen wir für einen guten Leiter unter der Annahme, dass $\tau_R\omega \ll 1$. In diesem Fall ist

$$n(\omega) \approx n_2 \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\omega\tau_R}} \gg 1, \tag{12.43}$$

wobei n_2 der Brechungsindex des Leiters ist. Dann,

$$\cos\theta_T = \sqrt{1 - \sin\theta_T^2} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta_I}{n^2(\omega)}} \approx 1. \tag{12.44}$$

Für zwei Fresnel-Parameter α und β erhalten wir

$$\alpha = \frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I} \approx \frac{1}{\cos\theta_I}, \quad \beta \approx \frac{n(\omega)}{n_1} = n(\omega) \gg 1. \tag{12.45}$$

Es folgt aus Gl. (11.14,11.19), dass

$$E_{1,R} = E_{1,I}, \quad E_{1,R} = -E_{2,I}, \quad E_{1,T} = E_{2,T} = 0. \tag{12.46}$$

Diese Gleichungen bedeuten, dass die Welle von der Oberfläche der Leiter *komplett* reflektiert wird.

Die Eindringstiefe in diesem Fall lautet

$$d = \frac{c}{\omega n_2}\sqrt{2\omega\tau_R} \ll \frac{c}{\omega n_2} \sim \frac{\lambda}{n_2}, \tag{12.47}$$

wobei λ die Wellenlänge der Welle in dem Vakuum ist.

13 Geführte Wellen

In dieser Vorlesung betrachten wir die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen in sogenannten Wellenleitern. Unter einem Wellenleiter verstehen wir eine hohle Röhre zusammengestellt aus idealem Leiter. Die Wellen befinden sich in dem Inneren der Röhre.

Um die Diskussion einfach zu halten, wollen wir den rechtwinkligen Wellenleiter diskutieren. Der Querschnitt dieser Leiter ist ein Viereck, welches in der $(x-y)$-Ebene liegt. Die Länge der y-Seite des Vierecks ist b und die Länge der x Seite des Vierecks ist a. Ein Eck des Vierecks befindet sich im Ursprung der $(x-y)$-Ebene.

Weil wir mit dem idealen Leiter zu tun haben, sollen folgende Randbedingungen erfüllt werden

$$\vec{E}_{||} = 0, \quad \vec{B}_{\perp} = 0, \quad \text{an den Grenzen des Wellenleiters.} \tag{13.1}$$

Wir schreiben diese Randbedingungen explizit für den rechtwinkligen Wellenleiter:

$$\begin{aligned} &E_z(y=b) = E_z(y=0) = E_z(x=a) = E_z(x=0) = 0, \\ &E_y(x=a) = E_y(x=0) = E_x(y=0) = E_x(y=b) = 0. \\ &B_y(y=b) = B_y(y=0) = B_x(x=a) = B_x(x=0) = 0. \end{aligned} \tag{13.2}$$

Wir schreiben dann die Lösungen für die elektrischen und magnetischen Felder einer monochromatischen Welle, welche sich in die z-Richtung ausbreitet

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x,y)e^{ikz-i\omega t}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0(x,y)e^{ikz-i\omega t}. \tag{13.3}$$

In einer Welle, welche sich im leeren Raum in z-Richtung ausbreitet, liegen beide Vektoren $\vec{E}_0(x,y)$ und $\vec{B}_0(x,y)$ in der $(x-y)$ Ebene. Es ist nicht offensichtlich, dass diese Aussage auch für Wellen im Wellenleiter gilt. Aber als ersten Schritt versuchen wir eine Lösung der Maxwell'schen Gleichungen zu finden, wo das *elektrische Feld* der Welle $\vec{E}_0(x,y)$ in der $(x-y)$-Ebene liegt und keine z-Komponenten hat.[16]

In dem Inneren des Wellenleiters ist der Raum leer; dann sollen die Felder die Wellengleichungen erfüllen. Für das elektrische Feld lautet die Gleichung

$$\frac{\partial}{c^2\partial t^2}\,\vec{E}_i - \vec{\nabla}^2 E_i = 0, \quad i = x,y. \tag{13.4}$$

[16] Solche Wellen nennen wir TE-Wellen (transverse electric).

Dank Gl. (13.3), können die Ableitungen nach t und z explizit berechnet werden. Wir erhalten dann

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)E_{0,i}=\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)E_{0,i} \tag{13.5}$$

Um diese Gleichung zu lösen, separieren wir die Variablen und schreiben

$$E_{0,i}(x,y)=X_i(x)Y_i(y). \tag{13.6}$$

Falls wir X_i und Y_i so auswählen, dass

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}X_i(x)+\alpha_i^2X_i(x)=0,\\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}Y_i(y)+\beta_i^2Y_i(y)=0,\end{aligned} \tag{13.7}$$

finden wir, dass α_i und β_i folgende Gleichung erfüllen sollen

$$(\alpha_i^2+\beta_i^2)=\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right). \tag{13.8}$$

Die Lösungen der Wellengleichungen sind dann

$$E_{0,i}=C_i\sin(\alpha_i x+\phi_i)\sin(\beta_i y+\theta_i),\quad i=x,y. \tag{13.9}$$

Wir betrachten die Randbedingungen und erhalten

$$\begin{aligned}&E_{0,x}(y=0)=E_{0,x}(y=b)=0,\quad\Rightarrow\quad\beta_x=\frac{\pi n}{b},\quad\theta_x=0,\\ &E_{0,y}(x=0)=E_{0,y}(x=a)=0,\quad\Rightarrow\quad\alpha_y=\frac{\pi m}{a},\quad\phi_y=0,\end{aligned} \tag{13.10}$$

wobei n und m positive ganze Zahlen sind. Es folgt

$$\begin{aligned}E_{0,x}&=C_x\sin(\alpha_x x+\phi_x)\sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right),\\ E_{0,y}&=C_y\sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right)\sin\left(\beta_y y+\theta_y\right).\end{aligned} \tag{13.11}$$

Für nicht-triviale Lösungen soll mindestens eine von zwei ganzen Zahlen n,m sich von Null unterscheiden.

Maxwell'schen Gleichungen zufolge muss die Divergenz des elektrischen Felds eine Null sein, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. Wir berechnen die Divergenz und erhalten

$$C_x \alpha_x \cos(\alpha_x x + \phi_x) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) + C_y \beta_y \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\beta_y y + \theta_y\right) = 0. \tag{13.12}$$

Um diese Gleichung für alle x und y zu erfüllen, brauchen wir

$$\phi_x = -\frac{\pi}{2},\ \theta_y = -\frac{\pi}{2},\ \beta_y = \frac{\pi n}{b}, \quad \alpha_x = \frac{\pi m}{a}. \tag{13.13}$$

Dann,

$$\begin{aligned} E_{0,x} &= -C_x \cos(\frac{\pi m x}{a}) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right), \\ E_{0,y} &= -C_y \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right), \end{aligned} \tag{13.14}$$

und $C_{x,y}$ sollen folgende Gleichung erfüllen

$$C_x \frac{\pi m}{a} + C_y \frac{\pi n}{b} = 0. \tag{13.15}$$

Wir können jetzt das magnetische Feld berechnen. Dazu benutzen wir eine von Maxwell'schen Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{13.16}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} i\omega B_{0,z} &= \partial_x E_{0,y} - \partial_y E_{0,x} \\ &= \left(C_x \frac{\pi n}{b} - C_y \frac{\pi m}{a}\right) \cos(\frac{\pi m x}{a}) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \end{aligned} \tag{13.17}$$

Um die Ergebnisse zu vereinfachen, "lösen" wir Gl. (13.15) mit Hifle von Gl. (13.8) und schreiben

$$C_x = \frac{\pi n}{b} \frac{i\omega}{\omega^2/c^2 - k^2} B_0, \quad C_y = -\frac{\pi m}{a} \frac{i\omega}{\omega^2/c^2 - k^2} B_0, \tag{13.18}$$

wobei B_0 ein Parameter ist. Für magnetisches Feld erhalten wir dann

$$B_{0,z} = B_0 \cos(\frac{\pi m x}{a}) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right). \tag{13.19}$$

Wir sehen, dass in dem TE-Fall ($E_z = 0$), die z-Komponente des magnetischen Felds B_z *keine Null* ist; B_0 ist die Amplitude dieser Komponente. Alle andere Komponenten der elektrischen und magnetischen Felder können wir durch die Amplitude der z-Komponente des B-Felds ausdrücken.

Die Ausbreitung einer TE-Welle in dem Leiter ist durch die Wellenzahl k bestimmt

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_{mn}^2}{\omega^2}}. \tag{13.20}$$

In dieser Gleichung haben wir die Größe

$$\omega_{n,m}^2 = c^2\pi^2\left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{m^2}{a^2}\right) \tag{13.21}$$

eingeführt. Es folgt aus Gl. (13.20), dass eine Welle sich in dem Wellenleiter nur dann ausbreiten kann, falls k reell ist; das ist nur möglich, falls

$$\omega > \omega_{m,n}. \tag{13.22}$$

Aus Gl. (13.21) folgt, dass $\omega_{n,m}$ ein Minimum hat,

$$\omega_{m,n} > \pi c \min\left[\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b}\right]. \tag{13.23}$$

Das bedeutet, dass Wellen mit

$$\omega < \pi c \min\left[\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b}\right] \tag{13.24}$$

sich in dem Wellenleiter *nicht ausbreiten*.

Wir haben gezeigt, dass in dem Wellenleiter die Lösung mit $E_z = 0$ und $B_z \neq 0$ existiert. Wir können versuchen eine "symmetrische" Lösung zu finden, in der $B_z = 0$ und $E_z \neq 0$ ist.[17] Die Berechnung ist fast identisch zu unserern obigen Diskussion. Wir erhalten dann

$$E_z = E_0 \sin(\frac{\pi m x}{a}) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right), \tag{13.25}$$

und alle andere Komponente von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ können wir mit Hilfe von Maxwell'schen Gleichungen finden und durch E_0 ausdrucken.

[17] Solche Wellen heißen TM-Wellen (transverse magnetic).

Statt es für unser Beispiel zu machen, betrachten wir den allgemeinen Fall. Wir fangen mit den Maxwell'schen Gleichungen an,

$$\begin{aligned} (i) \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \quad (iii) \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \\ (ii) \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad (iv) \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{13.26}$$

und benutzen den Ansatz für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Felder Gl. (13.3). Aus der x-Komponente Gl. (13.26(iii)) und der y-Komponente Gl. (13.26(iv)), erhalten wir

$$\begin{aligned} i\omega B_x + ikE_y &= \partial_y E_z, \\ -i\frac{\omega}{c^2}E_y - ikB_x &= -\partial_x B_z. \end{aligned} \tag{13.27}$$

Aus diesen zwei Gleichungen können wir B_x und E_y ausdrücken. Wir erhalten z.B.

$$B_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left[k\partial_x B_z - \frac{\omega}{c^2}\partial_y E_z\right]. \tag{13.28}$$

Ähnlich können wir alle anderen Felder berechnen und finden

$$\begin{aligned} B_y &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left[k\partial_y B_z + \frac{\omega}{c^2}E_z\right], \\ E_x &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left[k\partial_x E_z + \omega\partial_y B_z\right], \\ E_y &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left[k\partial_y E_z - \omega\partial_x B_z\right]. \end{aligned} \tag{13.29}$$

Weil E_z und B_z die Wellengleichungen erfüllen, können wir direkt für E_z und B_z den Ansatz durch $\cos(\alpha x + \phi)\sin(\beta y + \theta)$ schreiben, andere Komponenten von B und E mit Hilfe von obigen Gleichungen berechnen und dann α, β etc. so auswählen, dass die Randbedingungen erfüllt sind.

Die Wellen im Vakuum, welche sich in z-Richtung ausbreiten, haben keine E_z und B_z Komponenten. Solche Wellen heißen TEM-Wellen (transverse electromagnetic). Es ist interessant zu bemerken, dass es Wellenleiter gibt, wo sich auch TEM-Wellen ausbreiten können. Um ein Beispiel zu zeigen, diskutieren wir die Wellen in einem koaxialen Kabel, welches aus zwei idealleitenden Zylindern mit Radien a und b zusammengestellt ist. Die z-Achse ist entlang der Symmetrieachse des Zylinders ausgerichtet.

Wir wollen rausfinden, ob wir in diesem Fall die Maxwell'schen Gleichungen und die Randbedingungen mit einer TEM-Welle erfüllen können. Wir schreiben dann

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{ikz-i\omega t}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{ikz-i\omega t}, \tag{13.30}$$

und nehmen an, dass $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$ *keine z-Komponenten haben*.

Wir benutzen zylindrische Koordinaten, um dieses System zu beschreiben. Die Randbedingungen sind

$$\vec{E}_{||} = \vec{B}_{\perp} = 0, \quad \rho = a, b. \tag{13.31}$$

In zylindrischen Koordinaten bedeutet es, dass

$$\vec{E}_{\phi} = 0, \quad \vec{B}_{\rho} = 0, \quad \rho = a, b. \tag{13.32}$$

Wir fangen an mit zwei Gleichungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Dann, z.B.

$$\frac{1}{\rho}\partial_{\rho}(\rho E_{0,\rho}) + \frac{1}{\rho}\partial_{\phi}(E_{0,\phi}) = 0. \tag{13.33}$$

Wir nehmen an, dass es keine ϕ-Abhängigkeit gibt und finden dann

$$E_{0,\rho} = \frac{C_1}{\rho}, \tag{13.34}$$

wobei C_1 eine Konstante ist. Ähnlich finden wir

$$B_{0,\rho} = \frac{C_2}{\rho}. \tag{13.35}$$

Allerdings, weil $B_{0,\rho}$ für $\rho = a$ und $\rho = b$ eine Null sein soll, finden wir, dass $C_2 = 0$. Dann

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \left(\frac{C_1}{\rho}\vec{e}_{\rho} + f_E(\rho)\vec{e}_{\phi}\right) e^{ikz-i\omega t}, \\ \vec{B} &= f_B(\rho)\vec{e}_{\phi} e^{ikz-i\omega t}. \end{aligned} \tag{13.36}$$

Aus zwei weiteren Maxwell'schen Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial}{c^2 \partial t}\vec{E}, \tag{13.37}$$

finden wir, dass $f_E(\rho) = 0$ ist und

$$f_B(\rho) = \frac{C_1}{\rho}\frac{k}{\omega}, \quad k = \frac{\omega}{c}. \tag{13.38}$$

Dann

$$\vec{E} = \frac{C_1\vec{e}_\rho}{\rho}\, e^{i\omega/cz - i\omega t}, \quad \vec{B} = \frac{C_1\vec{e}_\phi}{c\rho}\, e^{i\omega/cz - i\omega t}. \tag{13.39}$$

Diese Welle ist offensichtlich eine TEM-Welle ($\vec{E}\cdot\vec{e}_z = 0$, $\vec{B}\cdot\vec{e}_z = 0$), die sich dem Wellenleiter entlang ausbreitet.

14 Felder der bewegenden Ladungen

Wir haben gesehen, dass elektrisches Potential ϕ und der Vektor-Potential $\vec{A}$ folgende Gleichungen erfüllen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{c^2 \partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \varphi &= \frac{\rho(t, \vec{r})}{\epsilon_0}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{c^2 \partial t^2} \vec{A} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} &= \mu_0 \vec{j}(t, \vec{r}), \end{aligned} \tag{14.1}$$

wobei $\rho(t, \vec{r})$ und $\vec{j}(t, \vec{r})$ die Ladungsverteilung und die Stromdichte sind. Wir wollen diese Gleichungen für beliebige $\rho(t, \vec{r})$ und $\vec{j}(t, r)$ lösen.

Wir fangen an mit den Gleichungen für das Potential φ. Wir schreiben die rechte Seite dieser Gleichung so um

$$\rho(t, \vec{r}) = \int \mathrm{d}^3 \vec{r}_1 \;\; \rho(t, \vec{r}_1)\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_1). \tag{14.2}$$

Dann, statt Gl. (14.1) direkt zu lösen, betrachten wir folgende Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi_{\vec{r}_1}}{c^2 \partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \varphi_{\vec{r}_1} = \frac{\rho(t, \vec{r}_1)}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_1). \tag{14.3}$$

Die rechte Seite Gl. (14.3) beschreibt die zeitabhängige Ladungsdichte der Punktladung, welche sich an dem Punkt $\vec{r}_1$ befindet.

Es ist wichtig, dass, falls wir die Lösung von Gl. (14.3) kennen, wir die Lösung von Gl. (14.1) durch einfache Integration erhalten können

$$\varphi(t, \vec{r}) = \int \mathrm{d}^3 \vec{r}_1 \; \varphi_{\vec{r}_1}(t, \vec{r}). \tag{14.4}$$

Um Gl. (14.3) zu lösen, führen wir eine neue Koordinate ein, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_1$, und suchen die Lösungen der Gl. (14.3) mit sphärischer Symmetrie. Für $\vec{R} \neq 0$ haben wir eine homogene Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi_{\vec{r}_1}}{c^2 \partial t^2} - \vec{\nabla}_R^2 \varphi_{\vec{r}_1} = 0. \tag{14.5}$$

Falls wir φ als

$$\varphi_{\vec{r}_1}(t, R) = \frac{\chi(t, R)}{R} \tag{14.6}$$

schreiben, erhalten wir die Gleichung für $\chi(t, R)$

$$\frac{\partial^2 \chi}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} = 0. \tag{14.7}$$

Das ist die Wellengleichung, welche wir in Vorlesung 10 diskutiert haben. Die Lösung ist

$$\chi = f(t - R/c) + g(t + R/c), \tag{14.8}$$

wobei f und g zwei beliebige Funktionen sind. Wir schreiben die Lösung als[18]

$$\varphi_{\vec{r}_1} = \frac{f(t - R/c)}{R}. \tag{14.9}$$

Um die Funktion f zu bestimmen, betrachten wir das $R \to 0$ Limit; in diesem Limit spielt die Ableitung von $1/R$ die dominante Rolle. Dann, weil

$$-\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_1) \tag{14.10}$$

ist, finden wir

$$f(t) = \frac{\rho(t, \vec{r}_1)}{4\pi\epsilon_0}. \tag{14.11}$$

Es folgt

$$f(t - R/c) = \frac{\rho(t - R/c, \vec{r}_1)}{4\pi\epsilon_0}. \tag{14.12}$$

Dann,

$$\varphi_{\vec{r}_1} = \frac{\rho(t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c, \vec{r}_1)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1|}. \tag{14.13}$$

Mit Hilfe von Gl. (14.4) können wir das Potential $\varphi(t, \vec{r})$ berechnen. Wir finden

$$\varphi(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \, \frac{\rho(t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c, \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \tag{14.14}$$

Ähnlicherweise berechnen wir das Vektor-Potential $\vec{A}$ und erhalten

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \, \frac{\vec{j}(t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c, \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \tag{14.15}$$

Die Lösungen in Gl. (14.14,14.15) haben eine interessante Zeitabhängigkeit. Das Potential zum Zeitpunkt t ist durch die Ladungsdichte zum *früheren*

[18] Warum wir die zweite mögliche Lösung nicht berücksichtigen, erklären wir später.

Zeitpunkt $\tau = t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c$ bestimmt. Wir interpretieren dieses Ergebnis als einen Effekt der Verzögerung, welche wegen der endlichen Geschwindigkeit des Lichts zu erwarten ist. Diese Bemerkung erklärt, warum wir in Gl. (14.8) die Lösung mit dem Argument $t+R/c$ nicht berücksichtigt haben. Hätten wir in der Tat diese Lösung wahrgenommen, hätten wir das Potential erhalten, welches zum Zeitpunkt t durch die Ladungsdichte zum *späteren* Zeitpunkt bestimmt worden wäre. Wegen die Kausalität ist das natürlich nicht akzeptabel.

Als Beispiel berechnen wir das Vektorpotential eines unendlichen Drahts mit dem Stromdichte $\vec{j}(t, \vec{r}) = I\,\vec{e}_z\,\delta^{(2)}(\vec{\rho})\theta(t)$, sodass bei $t = 0$ wir den Strom einschalten. Der Draht ist entlang der z-Achse ausgerichtet. Wir schreiben das Vektor-Potential

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{e}_z \int \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}^2\vec{\rho}_1 \delta^{(2)}(\vec{\rho}_1)\theta\left(t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c\right) \times \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}, \qquad (14.16)$$

wober $\vec{r}_1 = z_1\vec{e}_z + \vec{\rho}_1$ ist. Der Betrag des Vektors $\vec{r} - \vec{r}_1$ lässt sich vereinfachen. Wir finden

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = \sqrt{(z - z_1)^2 + |\vec{\rho} - \vec{\rho}_1|^2} \to \sqrt{(z - z_1)^2 + \rho^2}, \qquad (14.17)$$

weil $\vec{\rho}_1 = 0$ sein soll. Es folgt

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{e}_z \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\xi\, \frac{\theta\left(ct - \sqrt{\xi^2 + \rho^2}\right)}{\sqrt{\xi^2 + \rho^2}}, \qquad (14.18)$$

wobei wir die neue Variable $\xi = z_1 - z$ eingeführt haben. Wegen der θ-Funktion ist das Integrationsgebiet über ξ begrenzt. Wir brauchen

$$c^2t^2 > \sqrt{\xi^2 + \rho^2} \quad \Rightarrow \quad |\xi| < \sqrt{(ct)^2 - \rho^2}. \qquad (14.19)$$

Diese Lösung existiert natürlich nur für $ct > \rho$. Dann finden wir

$$\begin{aligned} \vec{A}(t, \vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{e}_z\, \theta(ct - \rho) \int_{-\sqrt{(ct)^2-\rho^2}}^{\sqrt{(ct)^2-\rho^2}} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2 + \rho^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\vec{e}_z\, \theta(ct - \rho) \ln\left(\frac{ct}{\rho} + \sqrt{\left(\frac{ct}{\rho}\right)^2 - 1}\right). \end{aligned} \qquad (14.20)$$

Wir sehen, dass die Wellenfront sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Nach langer Zeit, $ct \gg \rho$, finden wir

$$\vec{A}(t,\vec{r}) \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi}\vec{e}_z\,\theta(ct-\rho)\,(\ln 2ct - \ln\rho)\,. \tag{14.21}$$

Weil $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ ist, trägt $\ln(2ct)$ zur Berechnung von $\vec{B}$ in dem Limit $ct \gg \rho$ nicht bei. Der Term $-\ln\rho$ zusammen mit dem Rest in obiger Formel stimmt mit dem Vektor-Potential $\vec{A}$ unendliches Drahts mit dem zeitunabhängigen Strom I überein, siehe Gl. (6.72).

Wir gehen zurück zur allgemeinen Lösung für φ und $\vec{A}$, Gl. (14.14,14.15). Unser Ziel ist es, die Felder zu berechnen. Die Formeln sehen so aus

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}. \tag{14.22}$$

Wir fangen an mit der Berechnung von $\vec{E}$. Wir werden $t - |\vec{r}-\vec{r}_1|/c$ als τ bezeichnen,

$$\tau = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_1|}{c}. \tag{14.23}$$

Der erste Term in dem Ausdruck für elektrisches Feld in Gl. (14.22) ist

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla}\varphi &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \quad \vec{\nabla}\,\frac{\rho(t-|\vec{r}-\vec{r}_1|/c,\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \quad \left[\frac{\rho(\tau,\vec{r}_1)(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} + \frac{\partial\rho(\tau,\vec{r}_1)}{c\partial\tau}\,\vec{\nabla}|\vec{r}-\vec{r}_1|\right]. \end{aligned} \tag{14.24}$$

Weil

$$\vec{\nabla}|\vec{r}-\vec{r}_1| = \frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}, \tag{14.25}$$

erhalten wir

$$-\vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \quad \frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_1-\vec{r}|^3}\left[\rho(\tau,\vec{r}_1) + \frac{\partial\rho(\tau,\vec{r}_1)}{c\partial\tau}|\vec{r}-\vec{r}_1|\right]. \tag{14.26}$$

Die Zeitableitung des Vektor-Potentials berechnen wir auf ähnliche Weise

$$-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \;\; \frac{\partial\vec{j}(\tau,\vec{r}_1)}{c^2\partial\tau}\;\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}. \tag{14.27}$$

Um das Ergebnis zu schreiben, führen wir den Vektor $\vec{r} - \vec{r}_1 = \vec{R}$ ein. Dann

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \quad \left\{ \frac{\vec{R}}{R^3} \left[\rho(\tau, \vec{r}_1) + \frac{\partial\rho(\tau, \vec{r}_1)}{c\partial\tau} R \right] - \frac{1}{R} \frac{\partial\vec{j}(\tau, \vec{r}_1)}{c^2\partial\tau} \right\}. \quad (14.28)$$

Ähnlich können wir das magnetische Feld berechnen. Wir erhalten

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \ \frac{\vec{R}}{R^2} \times \left[\frac{\vec{j}(\tau, \vec{r}_1)}{R} + \frac{\partial\vec{j}(\tau, \vec{r}_1)}{c\partial\tau} \right]. \quad (14.29)$$

Wir wollen jetzt das elektromagnetische Feld eines geladenen Teilchens berechnen, welches sich entlang einer gegebenen Bahn bewegt. Die φ und $\vec{A}$ Potentiale in diesem Fall heißen *Lienard-Wiechert -Potentiale*. Wir fangen an mit dem Potential φ. Die Ladungsdichte ist

$$\rho(t, \vec{r}_1) = q\delta(\vec{r}_1 - \vec{R}(t)), \quad (14.30)$$

wobei q die Ladung des Teilchens und $\vec{R}(t)$ die Bahn des Teilchens sind. Dann,

$$\varphi(t, \vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \ \frac{\delta^{(3)}(\vec{r}_1 - \vec{R}(t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c))}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \quad (14.31)$$

Wir sollen jetzt dieses Integral berechnen. Das Integral enthält eine δ-Funktion, sodass die Integration einfach sein soll. Allerdings ist diese δ-Funktion eine komplizierte Funktion von der Integrationsvariable $\vec{r}_1$ und das macht die Integration schwierig.

Um zu verstehen, wie solche Integrale berechnet werden sollen, betrachten wir eindimensionales Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ \delta(f(x) - a). \quad (14.32)$$

Wir nehmen an, dass

$$f(x^*) = a, \quad (14.33)$$

und es keine weitere Lösungen der Gleichung $f(x) = a$ gibt.

Um das Integral in Gl. (14.32) zu berechnen, merken wir, dass der Integrand für $x \neq x^*$ eine Null ist. Dann, um das Integral zu berechnen, können wir den Integrand in der Nähe von x^* beschreiben. Wir schreiben $x = x^* + \xi$ und erhalten

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi\, \delta(f(x^* + \xi) - a) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi\, \delta\left(f(x^*) + \kappa\xi - a\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi\, \delta\left(\kappa\xi\right) = \frac{1}{|\kappa|}, \end{aligned} \tag{14.34}$$

wobei $\kappa = \mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x|_{x=x^*}$ ist. Um das Integral in Gl. (14.31) zu berechnen, sollen wir das Gleiche machen wie in dem obigen Beispiel.

Dieser Diskussion zufolge nehmen wir an, dass

$$\vec{r}_1^* - \vec{R}(t - |\vec{r} - \vec{r}_1^*|/c)) = 0. \tag{14.35}$$

Wir wollen dann $\vec{r}_1 - \vec{R}(t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c)$ in der Nähe von $\vec{r}_1 = \vec{r}_1^*$ entwickeln. Um das zu machen, brauchen wir die Entwicklung von $\vec{R}(t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c)$. Dann

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| \approx |\vec{r} - \vec{r}_1^*| - \frac{\vec{\eta} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1^*)}{|\vec{r} - \vec{r}_1^*|}, \tag{14.36}$$

und

$$\vec{R}(t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c) \approx \vec{R}_* + \frac{\partial \vec{R}_*}{\partial \tau} \frac{\vec{\eta} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1^*)}{c|\vec{r} - \vec{r}_1^*|}. \tag{14.37}$$

wobei $\vec{R}_* = \vec{R}(t - |\vec{r} - \vec{r}_1^*|/c)$ und $\tau = t - |\vec{r} - \vec{r}_1^*|/c$ sind. Es folgt

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 - \vec{R}(t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c) &\approx \vec{r}_1^* + \vec{\eta} - \vec{R}_1^* - \frac{\partial \vec{R}_*}{\partial \tau} \frac{\vec{\eta} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1^*)}{c|\vec{r} - \vec{r}_1^*|} \\ &= \vec{\eta} - \frac{\partial \vec{R}_*}{\partial \tau} \frac{\vec{\eta} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1^*)}{c|\vec{r} - \vec{r}_1^*|}. \end{aligned} \tag{14.38}$$

Wir benutzen diesen Ausdruck in der Formel für φ und erhalten

$$\varphi(t, \vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{\eta}}{|\vec{r} - \vec{r}_1^* - \vec{\eta}|}\ \delta^{(3)}\left(\vec{\eta} - \frac{\partial \vec{R}_*}{\partial \tau} \frac{\vec{\eta} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1^*)}{c|\vec{r} - \vec{r}_1^*|}\right). \tag{14.39}$$

Um über $\mathrm{d}^3\vec{\eta}$ zu integrieren, sollen wir $\delta^{(3)}$-Funktion in irgendeinem Koordinatensystem als ein Produkt von drei δ-Funktionen darstellen, z.B. $\delta^{(3)}(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$. Um ein günstiges Koordinatensystem zu definieren, bezeichnen wir den Vektor $(\vec{r} - \vec{r}_1^*)/|\vec{r} - \vec{r}_1^*|$ als $\vec{n}$ und wählen ein zylindrisches Koordinatensystem mit $\vec{n}$ als die z-Achse aus. Dann schreiben wir

$$\vec{\eta} = z\vec{n} + \vec{\eta}_\perp, \tag{14.40}$$

bezeichnen

$$\frac{\partial \vec{R}_*}{\partial \tau} = \vec{V}_*, \tag{14.41}$$

und entwickeln

$$\vec{V}_* = (\vec{V}_* \cdot \vec{n})\vec{n} + \vec{V}_{*,\perp}. \tag{14.42}$$

Dann

$$\varphi(t, \vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{\eta}}{|\vec{r} - \vec{r}_1^* - \vec{\eta}|} \; \delta^{(2)}\left(\vec{\eta}_\perp - \vec{V}_{*,\perp} z\right) \delta\left(z - \frac{(\vec{V}_* \cdot \vec{n})}{c} z\right). \tag{14.43}$$

Die Integration in obiger Formel ist trivial. Wir erhalten

$$\varphi(t, \vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1^*|} \frac{1}{(1 - \vec{V}_* \cdot \vec{n}/c)}. \tag{14.44}$$

Eine ähnliche Berechnung gibt für das Vektor-Potential

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0 q \vec{V}_*}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_1^*|} \frac{1}{(1 - \vec{V}_* \cdot \vec{n}/c)} = \frac{\vec{V}_*}{c^2} \, \varphi(t, \vec{r}). \tag{14.45}$$

Als Beispiel betrachten wir die Potentiale φ, $\vec{A}$ eines Teilchens, welches sich mit *konstanter* Geschwindigkeit bewegt. Dann, $\vec{R}(t) = \vec{v}t$. Um die Potentiale explizit zu schreiben, sollen wir $\vec{r}_1^*$ aus folgender Gleichung bestimmen

$$\vec{r}_1^* - \vec{v}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_1^*|}{c}\right) = 0. \tag{14.46}$$

Wir schreiben $\vec{W} = \vec{r} - \vec{r}_1^*$, sodass

$$\vec{W} + \vec{v}\left(t - \frac{W}{c}\right) = \vec{r}, \tag{14.47}$$

wobei W der Betrag des Vektors $\vec{W}$ ist. Wir multiplizieren beide Seiten Gl. (14.47) mit $\vec{v}$ und erhalten

$$\vec{W} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \left(t - \frac{W}{c} \right) = \vec{v} \cdot \vec{r}. \tag{14.48}$$

Um elektrisches Potential zu berechnen, brauchen wir

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{W - \vec{v} \cdot \vec{W}/c} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{W + \frac{v^2}{c}(t - W/c) - \vec{v} \cdot \vec{r}/c} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{W\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + v^2 t/c - \vec{v} \cdot \vec{r}/c} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{W\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \vec{v} \cdot \vec{X}/c}, \end{aligned} \tag{14.49}$$

wobei $\vec{X} = \vec{r} - \vec{v}t$ ist. Es folgt, dass wir den Betrag von $\vec{W}$ brauchen, um das Potential zu bestimmen.

Um W zu berechnen, schreiben wir Gl. (14.47) um als

$$\vec{W} = (\vec{r} - \vec{v}t) + \frac{\vec{v}}{c} W = \vec{X} + \frac{\vec{v}}{c} W, \tag{14.50}$$

und quadrieren beide Seiten. Wir erhalten

$$W^2 = \vec{X}^2 + \frac{v^2}{c^2} W^2 + 2 \frac{\vec{v} \cdot \vec{X}}{c} W. \tag{14.51}$$

Wir lösen diese Gleichung fur W und finden

$$W = \frac{\vec{v} \cdot \vec{X}/c + \sqrt{(\vec{v} \cdot \vec{X})^2/c^2 + \vec{X}^2(1 - v^2/c^2)}}{(1 - v^2/c^2)}. \tag{14.52}$$

Dann,

$$W(1 - v^2/c^2) - \vec{v} \cdot X/c = \sqrt{(\vec{v} \cdot \vec{X})^2/c^2 + \vec{X}^2(1 - v^2/c^2)}, \tag{14.53}$$

sodass

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(\vec{v} \cdot \vec{X})^2/c^2 + \vec{X}^2(1 - v^2/c^2)}}. \tag{14.54}$$

Eine bessere Schreibweise entsteht darin, dass wir $\vec{r}$ relativ zur Geschwindigkeit entwickeln

$$\vec{r} = r_{\parallel} \frac{\vec{v}}{v} + \vec{r}_{\perp}. \tag{14.55}$$

Dann gilt

$$\vec{X}^2 = (r_{\parallel} - vt)^2 + \vec{r}_{\perp}^2, \quad \vec{X} \cdot \vec{v} = v(r_{\parallel} - vt), \tag{14.56}$$

und wir erhalten

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(r_{\parallel} - vt)^2 + (1 - v^2/c^2)\vec{r}_{\perp}^2}}. \tag{14.57}$$

Wir gehen zurück zur Diskussion der allgemeinen Bahn eines Teilchens. Nachdem wir die Potentiale hergeleitet haben, wollen wir elektromagnetische Felder bestimmen. Wir benutzen Gl. (14.28) und merken, dass wir die Zeitableitungen *nach* der Integration berechnen können. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Bigg[& \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \, \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \delta(\vec{r}_1 - \vec{R}(t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c)) \\ & + \frac{\partial}{c\partial t} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \, \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \delta(\vec{r}_1 - \vec{R}(t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c)) \\ & - \frac{\partial}{c^2\partial t} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \vec{V}(t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c) \, \delta(\vec{r}_1 - \vec{R}(t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c)) \Bigg]. \end{aligned} \tag{14.58}$$

Über $\vec{r}_1$ können wir genauso integrieren wie bei der Berechnung von den Potentialen φ und $\vec{A}$. Wir erhalten dann

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{W}}{W^3 K} + \frac{\partial}{c\partial t} \frac{\vec{W}}{W^2 K} - \frac{\partial}{c\partial t} \frac{\vec{\beta}}{WK} \right], \tag{14.59}$$

wobei

$$K = 1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}, \tag{14.60}$$

$\vec{\beta} = \vec{V}^*/c$ und $\vec{n} = \vec{W}/W$ sind.

Um weiter zu kommen, sollen wir die Zeitableitungen nach t für fixen $\vec{r}$ berechnen. Zur Erinnerung:

$$\vec{W} = \vec{r} - \vec{R}(t - W/c), \tag{14.61}$$

sodass die ganze Zeitabhängigkeit ensteht durch die Abhängigkeit an

$$\tau = t - W/c. \tag{14.62}$$

Um zu zeigen wie solche Ableitungen berechnet werden sollen, betrachten wir die Ableitung $\partial\tau/\partial t$. Wir erhalten

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = 1 - \frac{\partial W}{c\partial t} = 1 - \vec{n}\cdot\frac{\partial\vec{W}}{c\partial t}. \tag{14.63}$$

Die Ableitung von $\vec{W}$ nach t können wir aus Gl. (14.61) berechnen

$$\frac{\partial\vec{W}}{\partial t} = -\vec{V}^*\frac{\partial\tau}{\partial t}. \tag{14.64}$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass die Zeitableitung von $\vec{W}$ entlang $\vec{V}^*$ ausgerichtet ist. Wir schreiben

$$\frac{\partial\vec{W}}{\partial t} = \kappa\vec{V}^*. \tag{14.65}$$

Wir benutzen Gl. (14.63) in Gl. (14.64) zusammen mit dem obigen Ausdruck und erhalten

$$\kappa = -\left(1 - \kappa\vec{n}\cdot\beta\right), \tag{14.66}$$

sodass

$$\kappa = -\frac{1}{1-\vec{\beta}\cdot\vec{n}} = -\frac{1}{K}. \tag{14.67}$$

Dann gilt

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = 1 - \kappa\,\vec{n}\cdot\vec{\beta} = \frac{1}{1-\vec{\beta}\cdot\vec{n}} = \frac{1}{K}, \tag{14.68}$$

$$\frac{\partial\vec{W}}{c\partial t} = -\frac{\vec{\beta}}{K}, \qquad \frac{\partial W}{c\partial t} = -\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{n}}{K}. \tag{14.69}$$

und

$$\frac{\partial\vec{n}}{c\partial t} = -\frac{1}{WK}\left[\vec{\beta} - (\vec{\beta}\cdot\vec{n})\vec{n}\right]. \tag{14.70}$$

Die letzte Formel, welche gebraucht wird, ist die Zeitableitung von K. Wir erhalten

$$\frac{\partial K}{c\partial t} = -\frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{c^2K} + \frac{\vec{v}^2 - (\vec{v}\cdot\vec{n})^2}{WK}, \tag{14.71}$$

wobei $\vec{a} = \partial\vec{V}^*/\partial\tau$ die Beschleunigung ist.

Wir berechnen die Ableitungen, stellen alle Beiträge zusammen und erhalten

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\beta^2)}{W^2K^3} + \frac{\vec{n}\times(\vec{n}-\vec{\beta})\times\vec{a}}{c^2WK^3}\right]. \tag{14.72}$$

Die Berechnung von $\vec{B}$ ergibt

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = \frac{\mu_0 qc}{4\pi}\left[\frac{[\vec{\beta}\times\vec{n}]\,(1-\beta^2)}{W^2K^3} + \frac{\vec{a}\times\vec{n}}{c^2WK^2} + \frac{\vec{\beta}\times\vec{n}\,(\vec{a}\cdot\vec{n})}{c^2WK^3}\right]. \tag{14.73}$$

Es ist zu bemerken, dass die magnetischen und elektrischen Felder miteinander verbunden sind. Es gilt

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = \frac{1}{c}\left[\vec{n}\times\vec{E}(t,\vec{r})\right]. \tag{14.74}$$

Wir können jetzt formell die $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Felder untersuchen. Aus Gl. (14.72) sehen wir, dass es zwei Beiträge zum elektrischen Feld gibt: ein Beitrag, welcher für große $\vec{W}$ mit $1/\vec{W}^2$ gegen Null geht, und ein zweiter, welcher für $W \to \infty$ als $1/W$ gegen Null anstrebt. Der zweite Term ist proportional zur Beschleunigung. Dank dem Verhältnis zwischen den $\vec{B}$ und $\vec{E}$ Feldern gibt der zweite Term ein Poynting Vektor, welcher bei $r = \infty$ nur als $1/r^2$ gegen Null geht und deswegen einen Energiefluss in Richtung Unendlichkeit bedeutet. Solchen Energiefluss bezeichnen wir als die *Abstrahlung*; die Abstrahlung erzeugt elektromagnetische Wellen, die wir schon diskutiert haben.

Zum Schluss diskutieren wir die nicht-relativistische Näherung. Formell bedeutet nicht-relativistische Näherung $c \to \infty$. In diesem Limit ist $\vec{\beta} = 0$, $\vec{W} = \vec{r}$, $\vec{n} = \vec{r}/r$ und

$$\vec{E}(t,\vec{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{n}}{r^2}. \tag{14.75}$$

Das ist das elektrische Feld eines Teilchens im Ruhezustand.

15 Die Dipolstrahlung

Wir betrachten eine dipolartige zeitabhängige Ladugnsverteilung

$$\rho(t,\vec{r}) = q\cos(\omega t)\left[\delta^{(3)}(\vec{r}-d\vec{e}_z) - \delta^{(3)}(\vec{r})\right]. \tag{15.1}$$

Wir nehmen an dass die Ladungen an Punkten $z = 0$ und $z = d$ mit einem z-Achse entlang ausgerichtetem Draht verbundet sind. Der Strom in diesem Draht verursacht die Zeitabhängigkeit der Ladungen.

Als erster Schritt berechnen wir diesen Strom mit Hilfe von der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0. \tag{15.2}$$

Der Ström muss entlang die z-Achse fließen. We schreiben (im Zylindrischen Koordinaten)

$$\vec{j} = \vec{e}_z f(z) q\omega\sin(\omega t)\delta^{(2)}(\vec{\rho}). \tag{15.3}$$

Dann, weil

$$\left[\delta^{(3)}(\vec{r}-d\vec{e}_z) - \delta^{(3)}(\vec{r})\right] = \delta^{(2)}(\vec{\rho})\left[\delta(z-d) - \delta(z)\right], \tag{15.4}$$

erhalten wir folgende Gleichung für $f(z)$

$$\delta(z) - \delta(z-d) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = 0. \tag{15.5}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$f(z) = \theta(z-d) - \theta(z) = \begin{cases} 0, & z > d, \\ -1, & 0 < z < d, \\ 0, & z < 0. \end{cases} \tag{15.6}$$

Wir können jetzt elektrisches Potential φ und das Vektor-Potential $\vec{A}$ berechnen. Für φ finden wir

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\,\frac{\rho(t-|\vec{r}-\vec{r}_1|/c,\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\cos\left(\omega(t-\frac{|\vec{r}-\vec{d}|}{c})\right)}{|\vec{r}-\vec{d}|} - \frac{\cos\left(\omega(t-\frac{r}{c})\right)}{r}\right]. \end{aligned} \tag{15.7}$$

Wir sehen dass das Potential eine komplezierte Funktion von t, r und $\vec{d}$ ist. Allerdings, wir interessieren uns für sehr kleinen Abstand zwischen die Ladungen, sodass $d < r$ ist. Dann können wir in d/r entwickeln. Wir benutzen

$$|\vec{r} - \vec{d}| \approx r \left(1 - \frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{r}\right), \tag{15.8}$$

wobei $\vec{n} = \vec{r}/r$ ist, bezeichnen $t - r/c$ als τ und $\omega/c\vec{d} \cdot \vec{r}/r$ als δ,

$$\tau = t - \frac{r}{c}, \quad \delta = \frac{\omega}{c}\, \vec{d} \cdot \vec{n}, \tag{15.9}$$

und erhalten

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[(\cos\omega\tau \cos\delta - \sin\omega\tau \sin\delta) \left(1 + \frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{r}\right) - \cos\omega\tau \right]. \tag{15.10}$$

Die Großenordnung des Parameters δ können wir so abschätzen

$$\delta \sim kd \sim \frac{d}{\lambda}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \tag{15.11}$$

wobei, als wir eventuell sehen werden, λ die Wellenlange der abgestralten Wellen ist. In dem Limit $d/\lambda \ll 1$, können wir Gl. (15.27) weiter vereinfachen. Wir erhalten

$$\varphi = \frac{q \cos\omega\tau}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} - \frac{q\, \delta \sin\omega\tau}{4\pi\epsilon_0 r}. \tag{15.12}$$

Wir interessieren uns für den Fluß der Energie bei $r \to \infty$. In diesem Limit (eignetlich, nur die Bedingung $r \gg \lambda$ wird gebraucht), ist der zweite Term in obiger Gleichung viel großer als der erste Term. Dann

$$\varphi \approx -\frac{q\omega \sin(\omega\tau)}{4\pi c\epsilon_0}\, \frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{r}. \tag{15.13}$$

Um Felder berechnen zu können, brauchen wir das Vektor-Potential. Um das Vektor-Potential zu berechnen, benutzen wir den Ausdruck für den Strom welcher wir am Anfang dieser Vorlesung hergeleitet haben. Wir erhalten

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{e}_z \int_0^d \mathrm{d}z_1\, \frac{q\omega \sin(\omega(t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c))}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}, \tag{15.14}$$

wobei $\vec{r}_1 = z_1 \vec{e}_z$ ist. Weil wir uns für $r \gg d$ interessieren und weil $0 < z_1 < d$ ist, können wir $\vec{A}$ sofort berechnen in dem wir in dem Integrand $\vec{r}_1$ nach Null setzen. Das Integral über z_1 gibt dann der Faktor d. Wir erhalten

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 d \vec{e}_z}{4\pi} \frac{q\omega \sin(\omega\tau)}{r}. \tag{15.15}$$

Wir wollen das elektrische Feld und das magnetische Feld berechnen. Wir interessieren uns besonders für das Limit $r \to \infty$. Wir fangen mit dem $\vec{E}$ an und schreiben

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{15.16}$$

Es ist einfach die Zeitableitung zu berechnen. Wir erhalten

$$-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 q\omega^2 \vec{d}}{4\pi} \frac{\cos(\omega\tau)}{r}, \tag{15.17}$$

wobei wir $\vec{d} = d\vec{e}_z$ eingeführt haben. In dem Limit $r \to \infty$, nimmt $\partial\vec{A}/\partial t$ als $1/r$ ab. In der Berechnung von Gradient φ sollen wir *auch* Terme identifizieren welche sich als $1/r$ bei $r \to \infty$ benehmen. Weil $\varphi \sim 1/r$ ist, es ist nur möglich solche Terme zu bekommen falls wir den Sinus $\sin(\omega\tau)$ nach $\vec{r}$ ableiten. Wir erhalten dann

$$-\vec{\nabla}\varphi \approx \frac{q\omega}{4\pi c\epsilon_0} \frac{\vec{d}\cdot\vec{n}}{r} \vec{\nabla} \sin(\omega\tau) = -\frac{q\omega^2}{4\pi c^2 \epsilon_0} \frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^2} \cos(\omega\tau)\ \vec{n}, \tag{15.18}$$

wo wir

$$\vec{\nabla}\,\tau = \vec{\nabla}\,(t - r/c) = -\frac{\vec{n}}{c}, \tag{15.19}$$

benutzt haben.

Wir setzen Gl. (15.17,15.18) zusammen und berechnen das elektrische Feld $\vec{E}$ in dem Limit $\vec{r} \to \infty$. Das Feld lautet

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\omega^2}{c^2} \cos\omega\tau\,(\vec{p} - (\vec{p}\cdot\vec{n})\vec{n}), \tag{15.20}$$

wobei wir das Dipolmoment des Systems $\vec{p} = q\vec{d}$ eingeführt haben.

Mit Hilfe von ähnlicher Argumentation können wir das magnetische Feld $\vec{B}$ berechnen. Wir erhalten

$$\vec{B} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 cr} \frac{\omega^2}{c^2} \cos\omega\tau \quad \vec{n}\times\vec{p} = \frac{[\vec{n}\times\vec{E}]}{c}. \tag{15.21}$$

Die $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Felder in Gl. (15.20,15.21) nennen wir *die Radiation-Felder*.

Der Energiefluß bei $r \to \infty$ können wir mit Hilfe des Poynting-Vektors finden. Wir berechnen den Poynting-Vektor und finden

$$\vec{\mathcal{S}} = \frac{[\vec{E} \times \vec{B}]}{\mu_0} = \vec{n}\,\frac{\vec{E}^2}{\mu_0 c}. \tag{15.22}$$

Weil $\vec{E} \sim 1/r$ ist, ist $\vec{\mathcal{S}} \sim 1/r^2$ und in Richtung $\vec{n} = \vec{r}/r$ ausgerichtet. Der Flüss die Energie pro Zeiteinheit durch eine Fläche $\mathrm{d}\vec{S}$ welche sich bei $\vec{r} \to \infty$ befindet ist

$$d\mathcal{P} = \lim_{r\to\infty} \vec{\mathcal{S}} \cdot \mathrm{d}\vec{S}. \tag{15.23}$$

Wir benutzen sphärische Koordinaten, schreiben $\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n} r^2 \mathrm{d}\Omega$ wobei $\mathrm{d}\Omega$ das Differenzial des Raumwinkels ist, und erhalten

$$\mathrm{d}\mathcal{P} = \frac{\mu_0}{32\pi^2}\frac{\omega^4}{c}(2\cos(\omega\tau)^2)\left(\vec{p}^2 - (\vec{p}\cdot\vec{n})^2\right)\mathrm{d}\Omega. \tag{15.24}$$

Weil, generel, r und t sehr gross sind, andert sich $\cos(\omega\tau)$ sehr stark falls wir statt einen (unendlich) großen r einen anderen (unendlich) großen r benutzen. Um vernünftiges Ergebniss zu bekommen sollen wir $2\cos^2(\omega\tau)$ mitteln. Wir erhalten dann $2\cos^2(\omega\tau) \to 1$. Dann, falls wir die z-Achse entlang Dipolmoment $\vec{p}$ ausrichten, finden wir die Winkelverteilung der abgestarlen Leistung

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mu_0}{32\pi^2}\frac{\omega^4}{c}p^2\sin^2\theta. \tag{15.25}$$

Die Winkelverteilung ist nicht ganz trivial; z.B. es gibt keine Strahlung in die Richtung des Dipols ($\theta = 0$) oder in die gegenseitige Richtung ($\theta = \pi$). Es ist auch zu bemerken, dass die Leistung zum vierten Potenz der Frequenz ω proportional ist.

Die gesamte Leistung der Abstrahlung erhalten wir in dem wir über den Raumwinkel integrieren. Wir erhalten

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0}{12\pi}\frac{\omega^4}{c}p^2. \tag{15.26}$$

Alle Formeln, die wir bis diesem Punkt diskutiert haben, beschreiben die Abstrahlung des elektrischen Dipols. Es gibt naturlich andere Möglichkeiten.

Allerdings, bevor wir diese Möglichkeiten diskutieren, versuchen wir die obige Diskussion allgemeiner zu gestalten.

Dementsprechend, betrachten wir eine (räumlich) endliche Verteilung von Ladungen und versuchen das Strahlungsfeld zu finden. Das wichtigste bei dieser Analyse ist, dass wir uns nur für die führende Asymptotic in dem Limit $r \to \infty$ interessieren.

Wir fangen mit der Berechnung von elektrischem Potential an. Das Integral lautet

$$\varphi(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \frac{\rho(\vec{r}_1, t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \tag{15.27}$$

Wir integrierent über endliches Raumgebeit und wir wollen φ in dem Limit $\vec{r} \to \infty$ untersuchen. Dann, ist $r_1/r \ll 1$ und wir können $|\vec{r} - \vec{r}_1|$ in r_1/r entwickeln. Wir erhalten

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = r - \vec{r}_1 \cdot \vec{n}, \tag{15.28}$$

wobei $\vec{n} = \vec{r}/r$ ist.

In Gl. (15.27) sollen wir nur solche Terme betrachten welche zum $\varphi \sim 1/r$ führen. Das bedeutet dass wir $1/|\vec{r} - \vec{r}_1|$ mit $1/r$ ersätzen können weil

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \approx \frac{1}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{r_1}{r^2}\right). \tag{15.29}$$

Dann

$$\varphi(t, \vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \; \rho\left(\vec{r}_1, t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{n}}{c}\right). \tag{15.30}$$

Wir wollen jetz diese Formel weiter entwickeln. Wir bezeichnen $t - r/c$ als τ und schreiben

$$\begin{aligned} \varphi(t, \vec{r}) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \rho\left(\vec{r}_1, \tau + \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{n}}{c}\right) \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \left[\rho(\vec{r}_1, \tau) + \frac{\partial\rho(\vec{r}_1, \tau)}{c\partial\tau} \vec{r}_1 \cdot \vec{n}\right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[Q(\tau) + \vec{n} \cdot \frac{\partial\vec{p}(\tau)}{c\partial\tau}\right], \end{aligned} \tag{15.31}$$

wobei $Q(\tau)$ die Ladung und

$$\vec{p}(\tau) = \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \; \vec{r}_1 \rho(\vec{r}_1, \tau) \tag{15.32}$$

das elektrische Dipolmoment der Ladungsverteilung ist.

Wir setzen mit der Berechnung des Vektor-Potentials fort. Das Vektor-Potential Lautet

$$\vec{A}(t,\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \frac{\vec{j}(\vec{r}_1, t-|\vec{r}-\vec{r}_1|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}. \tag{15.33}$$

Wir entwickeln diese Formel auf gleiche Weise wir voher, betrachten den ersten Term dieser Entwicklung und erhalten

$$\vec{A}(t,\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\, \vec{j}(\vec{r}_1,\tau). \tag{15.34}$$

Dieses Integral haben wir in Vorlesung 6 diskutiert. Wir folgen die Berechnung in Vorlesung 6, benutzen die Kontinuitätsgleichung und erhalten

$$\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\, \vec{j}(\vec{r}_1,\tau) = \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\, \vec{r}_1\, (\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r}_1,\tau)) = \frac{\partial}{\partial\tau}\vec{p}, \tag{15.35}$$

wobe $\vec{p}$ das elektrische Dipolmoment ist. Es folgt

$$\vec{A}(t,\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\frac{\partial\vec{p}}{c^2\partial\tau}. \tag{15.36}$$

Wir sollen jetzt elektisches Feld und magnetisches Feld berechnen. Um elektrisches Feld zu finden, brauchen wir den Gradient des φ und die Zeitableitung von $\vec{A}$. Wir interessieren uns nur für Beiträge welche als $1/r$ bei $r\to\infty$ abnemmen; dass bedeutet das in der Berechnung von Ableitung nur die r-Abhängigkeit von τ betrachten werden soll.

Wir werden auch annehmen dass die gesamte Ladung zeitunabhängig ist, $Q(\tau) = Q_0$. Dann

$$\begin{aligned}-\vec{\nabla}\varphi(t,r) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\vec{\nabla}\left[\frac{Q_0}{r}+\frac{1}{r}\vec{n}\cdot\frac{\partial\vec{p}(\tau)}{c\partial\tau}\right] \to -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\vec{\nabla}\left[\vec{n}\cdot\frac{\partial\vec{p}(\tau)}{c\partial\tau}\right]\\ &\to -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\left[\vec{n}\cdot\frac{\partial^2\vec{p}(\tau)}{c\partial\tau^2}\,\vec{\nabla}\tau\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\vec{n}\,\left[\vec{n}\cdot\frac{\partial^2\vec{p}(\tau)}{c^2\partial\tau^2}\right].\end{aligned} \tag{15.37}$$

Die Zeitableitung von $\vec{A}$ lautet

$$-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\frac{\partial^2\vec{p}}{c^2\partial\tau^2}. \tag{15.38}$$

Dann finden wir

$$\vec{E} = -\frac{\ddot{\vec{p}} - \vec{n}(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n})}{4\pi\epsilon_0 r c^2}, \tag{15.39}$$

wobei $\ddot{\vec{p}} = \partial^2 \vec{p}/\partial\tau^2$ ist.

Das magnetische Feld berechnen wir auf ähnlicher Weise. Wir erhalten

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\frac{\ddot{\vec{p}}}{c^3} \times \vec{\nabla} r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r c^3}\, \ddot{\vec{p}} \times \vec{n}. \tag{15.40}$$

Es folgt

$$\vec{B} = \frac{[\vec{n} \times \vec{E}]}{c}. \tag{15.41}$$

Diese Formel verallgemeinen die Formel für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Felder welche wir für spezifische Ladungsverteilung in Gl. (15.1) hergeleitet haben. Die Leistung der Abstrahlung können wir mit Hilfe des Poyntings-Vektors berechnen.

Die obigen Ergebnisse zeigen dass elektrisches Dipolmoment der Ladungsverteilung für die Abstrahlung verantwortlich ist. Aber, es gibt Ladungsverteilungen welche kein elektrisches Dipolmoment haben. Um zu sehen was in solchen Fälle passiert, können wir die obige Berechnung wiederhölen aber etwas *weiter* nach r_1 entwickeln.

Wir fangen an mit elektrischem Potential φ. Wie merken dass wir Gl. (15.27) als die valide Ausgangspunkt benutzen kann weil alle weitere Terme werden dann nur unterdrückte Beiträge $\mathcal{O}(r_1/r)$ generieren. Dementsprechend, fangen wir mit Gl. (15.27) an, entwickeln ρ nach $\vec{n}\cdot\vec{r}_1$ bis zum dritten Term und erhalten

$$\begin{aligned}
\varphi(t,\vec{r}) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \rho\left(\vec{r}_1, \tau + \frac{\vec{r}_1\cdot\vec{n}}{c}\right) \\
&\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \left[\rho(\vec{r}_1,\tau) + \frac{\partial\rho(\vec{r}_1,\tau)}{c\partial\tau}\vec{r}_1\cdot\vec{n} + \frac{\partial^2\rho(\vec{r}_1,\tau)}{2c^2\partial\tau^2}\left(\vec{r}_1\cdot\vec{n}\right)^2\right].
\end{aligned} \tag{15.42}$$

Zwei erste Terme haben wir schon diskutiert. Der dritte Term ist neu. Dessen Beitrag schreiben wir als

$$\varphi_2(t,\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\, \ddot{\rho}(\vec{r}_1,\tau)\left(\vec{r}_1\cdot\vec{n}\right)^2. \tag{15.43}$$

Ähnlich, berechnen wir zusätzlichen Beitrag zum Vektor-Potential $\vec{A}$; den schreiben wir als

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\, \dot{\vec{j}}(\vec{r}_1, \tau)\ (\vec{r}_1 \cdot \vec{n})\,. \tag{15.44}$$

Wir wollen diese Ausdrücke vereinfachen und wir fangen mit $\vec{A}_2$ an. In diesem Fall sollen wir das Integral

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\, \vec{j}(\vec{r}_1, \tau)\ (\vec{r}_1 \cdot \vec{n}) \tag{15.45}$$

umschreiben. Wir es geht haben wir in Vorlesung 6 gesehen, wo wir allerdings angenommen haben dass ρ zeitunabhängig ist. Wir wiederholen die Berechnung ohne diese Annahme. Fur einen beliebigen Vektor $\vec{k}$ schreiben wir

$$\vec{\nabla}_i \left[\vec{r}_j \vec{j}_i (\vec{r} \cdot \vec{k})\right] = \vec{j}_j (\vec{r} \cdot \vec{k}) + \vec{r}_j (\vec{j} \cdot \vec{k}) + \vec{r}_j (\vec{r} \cdot \vec{k})(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}). \tag{15.46}$$

Dann

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^3\vec{r}\, (\vec{k} \cdot \vec{r})\, \vec{j} &= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3\vec{r}\, \left[(\vec{k} \cdot \vec{r})\, \vec{j} + (\vec{k} \cdot \vec{r})\, \vec{j}\right] \\
&= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3\vec{r}\, \left[(\vec{k} \cdot \vec{r})\, \vec{j} - \vec{r} (\vec{j} \cdot \vec{k}) - \vec{r}\, (\vec{r}\vec{k}) \vec{\nabla} \cdot \vec{j}\right] \\
&= -\vec{k} \times \vec{m} + \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3\vec{r}\, \vec{r}\, (\vec{n} \cdot \vec{r})\, \dot{\rho},
\end{aligned} \tag{15.47}$$

wobei $\vec{m} = 1/2 \int \mathrm{d}^3\vec{r}\ [\vec{r} \times \vec{j}]$ das magnetische Dipolmoment des Systems ist. Ferne, haben wir auch benutzt dass das Integral der totalen Ableitung über den ganzen Raum eine Null ist und dass Kontinuitätgleichung gilt. Wir erhalten

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi c r} \left[-\vec{n} \times \dot{\vec{m}} + \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3\vec{r}\, \vec{r}\, (\vec{n} \cdot \vec{r})\, \ddot{\rho},\right]. \tag{15.48}$$

Das letzte Integral können wir über das elektrische Quadrupolmoment des Systems umschreiben. Wir führen einen Vektor ein

$$D_i = Q_{ij} n_j, \tag{15.49}$$

wobei

$$Q_{ij} = \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\ \rho(\vec{r}_1)\ \left(3\vec{r}_{1,i}\vec{r}_{1,j} - \delta_{ij}\vec{r}_1^2\right) \tag{15.50}$$

das Quadrupolmoment des Systems ist. We schreiben dann

$$\int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\ \vec{r}_1\ (\vec{n}\cdot\vec{r}_1)\ \ddot{\rho} = \frac{1}{3}\dddot{\vec{D}} + \frac{1}{3}\vec{n}\ \int \mathrm{d}\vec{r}_1\ \ddot{\rho}\ \vec{r}_1^2. \tag{15.51}$$

Wir erhalten

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi c r}\left[-\vec{n}\times\dddot{\vec{m}} + \frac{1}{6}\left(\dddot{\vec{D}} + \vec{n}\ \int \mathrm{d}\vec{r}_1\ \ddot{\rho}\ \vec{r}_1^2.\right)\right]. \tag{15.52}$$

Ähnlich schreiben wir φ_2 um und erhalten

$$\varphi_2 = \frac{1}{24\pi\epsilon_0 r c^2}\left[\vec{n}\cdot\dddot{\vec{D}} + \int \mathrm{d}\vec{r}_1\ \ddot{\rho}\ \vec{r}_1^2\right]. \tag{15.53}$$

Die Berechnung von Radiation-Felder ist einfach. Weil die Felder sich asymptotisch als $1/r$ verhalten sollen, söllen wir nur die Ableitung von τ nach $\vec{r}$ berechnen. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}\vec{E}_2(t,\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi r c}\vec{n}\times\ddot{\vec{m}} - \frac{\mu_0}{24\pi r c}\left(\dddot{\vec{D}} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\dddot{\vec{D}})\right),\\ \vec{B}_2(t,\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi r c}\vec{n}\times[\vec{n}\times\ddot{\vec{m}}] - \frac{\mu_0}{24\pi r c}\vec{n}\times\dddot{\vec{D}}.\end{aligned} \tag{15.54}$$

Wir vorher, sehen wir dass magnetisches Feld folgende Gleichung erfüllt

$$\vec{B}_2 = \frac{1}{c}\left[\vec{n}_2\times\vec{E}_2\right]. \tag{15.55}$$

Wir merken dass $\vec{E}_2, \vec{B}_2$ die Beiträge des magnetisches Dipolmoment und elektrisches Quadrupolmoment enthalten. Dementsprechend, reden wir über *magnetische Dipoleabstrahlung* und *elektrische Quadrupoleabstrahlung*.

Betrachten wir ein System welches elektrishes Dipolmoment, elektrisches Quadrupolmoment und magnetisches Dipolmoment hat. Wir wollen die abegstrahlte Leistung berechnen. Das elektrisches Feld lautet

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left(-\ddot{\vec{p}} + \vec{n}(\vec{n}\ddot{\vec{p}})\right) + \frac{\mu_0}{4\pi r c}\vec{n}\times\ddot{\vec{m}} - \frac{\mu_0}{24\pi r c}\left(\dddot{\vec{D}} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\dddot{\vec{D}})\right), \tag{15.56}$$

Weil $\vec{B} = [\vec{n}\times\vec{E}]/c$ ist, lautet der Poynting-Vektor

$$\vec{\mathcal{S}} = \frac{1}{\mu_0 c}\vec{n}\vec{E}^2. \tag{15.57}$$

Die abgestrahlte Lesitung ist dann

$$d\mathcal{P} = \frac{\vec{E}^2}{\mu_0 c}\, \mathrm{d}\Omega. \tag{15.58}$$

Um die gesamte Leistung zu berechnen, sollen wir über $\mathrm{d}\Omega$, also über die Richtungen des Vektors $\vec{n}$, integrieren. Um diese Integration zu Vereinfachen, es ist nutzlich zu zeigen dass die Beiträge von elektrishem Dipolmoment, elektrischem Quadrupolmoment und magnetischem Dipolmoment mit einander *nicht interferieren*. Als Beispiel, betrachten wir die Interferenz des elektrischen Dipolmoment und des magnetischen Dipolmoment. Dann

$$\int \mathrm{d}\Omega\ \left(-\ddot{\vec{p}} + \vec{n}(\vec{n}\ddot{\vec{p}})\right) \cdot [\vec{n} \times \ddot{\vec{m}}] = [\ddot{\vec{p}} \times \ddot{\vec{m}}] \cdot \int \mathrm{d}\Omega\ \vec{n} = 0 \tag{15.59}$$

weil das letzte Integral eine Null ist.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Interferenz des QuadrupolMoments und magnetisches Moments. Wir schreiben

$$\begin{aligned} &\int \mathrm{d}\Omega\ \left(\dddot{\vec{D}} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \dddot{\vec{D}}\right) \cdot [\vec{n} \times \ddot{\vec{m}}] = \int \mathrm{d}\Omega\ \dddot{\vec{D}} \cdot [\vec{n} \times \ddot{\vec{m}}] \\ &= \epsilon_{ijk} Q_{ia} \dddot{m}_k \int \mathrm{d}\Omega\ n_a n_j = \epsilon_{ijk} Q_{ia} \dddot{m}_k \frac{\delta_{aj}}{3}\Omega = \frac{\Omega}{3}\epsilon_{iak} Q_{ia} \dddot{m}_k = 0, \end{aligned} \tag{15.60}$$

weil ϵ_{iak} absolut antisymmetrisch und Q_{ai} symmetrisch ist.

Die gesamte Leistung ist dann die Summe von drei Terme

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_p + \mathcal{P}_m + \mathcal{P}_Q. \tag{15.61}$$

Wir berechnen diese drei Terme separat. Zuerst, die Abstrahlung des elektrischen Dipols

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_p &= \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \int \mathrm{d}\Omega \left(\ddot{\vec{p}}^2 - (\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n})^2\right) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \ddot{\vec{p}}_i \ddot{\vec{p}}_j \int \mathrm{d}\Omega \left(\delta_{ij} - n_i n_j\right) \\ &= \frac{4\pi\mu_0}{16\pi^2 c} \ddot{\vec{p}}_i \ddot{\vec{p}}_j \frac{2}{3}\delta_{ij} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{\vec{p}}^2. \end{aligned} \tag{15.62}$$

Dann

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_m &= \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \int \mathrm{d}\Omega\ \left[\vec{n} \times \ddot{\vec{m}}\right]^2 = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \int \mathrm{d}\Omega\ \left(\ddot{\vec{m}}^2 - (\ddot{\vec{m}} \cdot \vec{n})^2\right) \\ &= \frac{\mu_0}{6\pi c^3} \ddot{\vec{m}}^2. \end{aligned} \tag{15.63}$$

Schließlich

$$\mathcal{P}_Q = \frac{\mu_0}{576\pi^2 c^3} \int \mathrm{d}\Omega \, \left(\dddot{\vec{D}}^2 - \left(\vec{n} \cdot \dddot{\vec{D}} \right)^2 \right) \tag{15.64}$$

Um das obige Integral richtig zu berechnen, sollen wir nicht vergessen dass D auch von $\vec{n}$ anhängt, siehe Gl. (15.49). Um diese Integrale zu berechnen schreieben wir

$$\int \mathrm{d}\Omega \, \dddot{\vec{D}}^2 = \dddot{Q}_{ij} \dddot{Q}_{ik} \int \mathrm{d}\Omega \, n_j n_k = \frac{4\pi}{3} \dddot{Q}_{ij} \dddot{Q}_{ik} \delta_{jk} = \frac{4\pi}{3} \dddot{Q}_{ij} \dddot{Q}_{ij}. \tag{15.65}$$

und

$$\begin{aligned} &\int \mathrm{d}\Omega \, (\dddot{\vec{D}} \cdot n)^2 = \dddot{Q}_{ij} \dddot{Q}_{km} \int \mathrm{d}\Omega \, n_i n_j n_k n_m \\ &= \frac{4\pi}{15} \dddot{Q}_{ij} \dddot{Q}_{km} (\delta_{ij}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kj} + \delta_{ik}\delta_{jm}) = \frac{8\pi}{15} \dddot{Q}_{ij} \dddot{Q}_{ij}. \end{aligned} \tag{15.66}$$

In dem letzten Schritt wir benutzt haben dass Q_{ij} ein symmetrische, spurlose Tensor ist. Wir setezen die Ausrucke in Gl. (15.65) und Gl. (15.66) in Gl. (15.64) ein und erhalten

$$\mathcal{P}_Q = \frac{\mu_0}{720\pi c^3} \dddot{Q}_{ij} \dddot{Q}_{ij} \tag{15.67}$$

Die gesamte Leistung der Abstrahlung ist dann

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0}{6\pi c} |\ddot{\vec{p}}|^2 + \frac{\mu_0}{6\pi c^3} |\ddot{\vec{m}}|^2 + \frac{\mu_0}{770\pi c^3} \dddot{Q}_{ij} \dddot{Q}_{ij}. \tag{15.68}$$

Aus obiger Formel können wir erfahren wie viel jedes Multipol zur Abstrahlung beitragt. We nehmen an dass das Außmas des Ladungsverteilung d ist und die Zeitabhändigkeit der Ladungsverteilung mit dem Parameter τ charakterisiert werden kann. Dann

$$\ddot{p} \sim \frac{qd}{\tau^2}, \quad \ddot{m} \sim \frac{qd^2}{\tau^3}, , \quad \dddot{Q} \sim \frac{qd^2}{\tau^3} \tag{15.69}$$

sodass

$$\frac{\mathcal{P}_m}{\mathcal{P}_d} \sim \frac{\mathcal{P}_Q}{\mathcal{P}_d} \sim \left(\frac{d}{\tau c} \right)^2. \tag{15.70}$$

Weil $\tau \sim 1/\omega$ ist, ist $\lambda \sim \tau c$ die Wellenlänge der Strahlung. Das bedeutet dass die Multipol-Entwicklung konvergiert falls $d \ll \lambda$ ist.

16 Die Abstrahlung einer Punktladung

In Vorlesung 14 haben wir elektrisches und magnetischs Felder eines Teilchens berechnet welches sich entlang gegebene Trajektorie $\vec{R}(t)$ bewegt. Dir Formeln sehen so aus

$$\begin{aligned}\vec{E}(t,\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\beta^2)}{W^2K^3}+\frac{\vec{n}\times(\vec{n}-\vec{\beta})\times\vec{a}}{c^2WK^3}\right],\\ \vec{B}(t,\vec{r}) &= \frac{\mu_0 qc}{4\pi}\left[\frac{[\vec{\beta}\times\vec{n}]\,(1-\beta^2)}{W^2K^3}+\frac{\vec{a}\times\vec{n}}{c^2WK^2}+\frac{\vec{\beta}\times\vec{n}\,(\vec{a}\cdot\vec{n})}{c^2WK^3}\right],\end{aligned} \tag{16.1}$$

wobei

$$\begin{aligned}&\vec{W}=\vec{r}-\vec{R}(\tau),\quad \tau=t-W/c,\quad \vec{\beta}=\frac{\vec{V}}{c},\quad \vec{V}=\frac{\partial\vec{R}(\tau)}{\partial t},\\ &\vec{a}=\frac{\partial\vec{V}(\tau)}{\partial\tau},\quad K=1-\vec{\beta}\cdot\vec{n},\quad \vec{n}=\frac{\vec{W}}{W},\end{aligned} \tag{16.2}$$

Die $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Felder erfüllen folgende Gleichung

$$\vec{B}(t,\vec{r})=\frac{1}{c}\left[\vec{n}\times\vec{E}(t,\vec{r})\right]. \tag{16.3}$$

Wir interessieren uns für die *Abstrahlung*. Unter diesem Begriff verstehen wir den Fluß der Energie bei $|\vec{r}|=\infty$. Wir haben in Vorlesung 14 erwähnt dass nur Beiträge zu $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Felder welche als $1/W\sim 1/r$ bei $r\to\infty$ abnehmen, bei der Berechnung von Abstrahlung eine Rolle spielen. Aus Gl. (16.1) es ist klar zu sehen dass nur Terme mit der *Beschleunigung* relevant sind.

Wir fangen an mit der Diskussion der *nicht-relativistischen Näherung*. Dieser Fall entspricht $c\to\infty$, sodass alle Retardation-Effekte nicht relevant sind. Dann gilt

$$\tau=t,\quad W=r-\vec{R}(t),\quad K=1,\quad |\beta|\ll 1. \tag{16.4}$$

Weil wir uns für $\vec{r}\to\infty$ interessieren, können wir schreiben

$$\vec{E}_{\text{rad}}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 rc^2}\vec{n}\times\vec{n}\times\vec{a}=-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 rc^2}\left(\vec{a}-\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{a})\right). \tag{16.5}$$

Magnetisches Feld erhalten wir aus Gl. (16.3).

Der Poynting-Vektor bei $r \to \infty$ lautet

$$\vec{\mathcal{S}} = \frac{1}{\mu_0}[\vec{E}_{\text{rad}} \times \vec{B}_{\text{rad}}] = \vec{n}\,\frac{\vec{E}^2_{\text{rad}}}{\mu_0 c}. \tag{16.6}$$

Die Energie welche das Teilchen per Zeiteinheit abstrahlt ist

$$\mathrm{d}\mathcal{P} = \vec{\mathcal{S}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q^2}{16\pi^2\mu_0\epsilon_0^2 c^5}\left(\vec{a}^2 - (\vec{a}\cdot n)^2\right)\mathrm{d}\Omega. \tag{16.7}$$

Nach der Winkelintegration erhalten wir die Energieverlust des Teilchens pro Zeiteinheit

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}. \tag{16.8}$$

Die Leistung der Abstrahlung ist proportional zur Beschleunigung; ohne Beschleunigung strahlt das Teilchen nicht ab.

Wir werden jetz diskutieren was im relativischen Fall passiert. Wie wir es schon gesagt haben, sollen wir nur solche Terme in dem Ausdruck für elektrisches Feld betrachten welche die Beschleunigung enthalten. In dem Limit $r \to \infty$, finden wir dass die Energie ΔT, welche in Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ während der Zeit Δt abgestrahlt wurde, lautet

$$\mathrm{d}\left[\Delta T\right] = \frac{\vec{E}^2_{\text{rad}}}{\mu_0 c}\;\Delta t\,\mathrm{d}\Omega. \tag{16.9}$$

Falls wir uns für den *Energieverlust* des Teilchens pro Zeiteinheit interessieren, sollen wir

$$\mathrm{d}\mathcal{P} = \frac{\mathrm{d}\Delta T}{\Delta\tau} \tag{16.10}$$

berechnen weil die Energie ΔT an dem Zeitpunkt τ und während der Zeit $\Delta\tau$ abgesrtahlt wurde. Dann finden wir

$$\mathrm{d}\mathcal{P} = \frac{\vec{E}^2_{\text{rad}}}{\mu_0 c}\,\frac{\partial t}{\partial\tau}\,\mathrm{d}\Omega. \tag{16.11}$$

Die Ableitung $\partial\tau/\partial t$ haben wir in Vorlesung 14 berechnet. Es gilt

$$\frac{\partial t}{\partial\tau} = K. \tag{16.12}$$

Dann erhalten wir die Formel für den Energieverlust des geladenen Teilchens pro Zeiteinheit

$$\mathrm{d}\mathcal{P} = \frac{q^2}{\mu_0 c(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{1}{c^4 K^5}|\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\vec{a}]|^2\,\mathrm{d}\Omega. \tag{16.13}$$

Um den gesamten Energieverlust zu berechnen, sollen wir über den Raumwinkel in Gl. (16.13) integrieren. Wir fangen an mit der Berechnung von $|\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\vec{a}]|^2$. Als erster Schritt, schreiben wir

$$\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\vec{a} = (\vec{n}-\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\vec{a}) - \vec{a}(1-\vec{n}\vec{\beta}) = (\vec{n}-\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\vec{a}) - \vec{a}K. \tag{16.14}$$

Dann,

$$|\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\vec{a}|^2 = (\vec{n}-\vec{\beta})^2(\vec{n}\cdot\vec{a})^2 + \vec{a}^2K^2 - 2K(\vec{n}\cdot\vec{a})(\vec{n}\cdot\vec{a}-\vec{\beta}\cdot\vec{a}) \tag{16.15}$$

Wir wollen diesen Ausdruck umschreiben indem wir alle Skalarprodukte $\vec{n}\cdot\vec{\beta}$ durch K ersetzen, $\vec{\beta}\cdot\vec{n} = 1-K$. Wir erhalten

$$|\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\vec{a}]|^2 = -(\vec{n}\cdot\vec{a})^2(1-\beta^2) + \vec{a}^2K^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\vec{a})K. \tag{16.16}$$

Es folgt dass um die Leistung zu berechnen, brauchen wir drei Integrale

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \mathrm{d}\Omega\frac{K^2}{K^5} = \int\frac{\mathrm{d}\Omega}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3},\\ I_2 &= \int \mathrm{d}\Omega\frac{(\vec{n}\cdot\vec{a})K}{K^5} = \int\frac{\mathrm{d}\Omega\quad(\vec{n}\cdot\vec{a})}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^4},\\ I_3 &= \int \mathrm{d}\Omega\frac{(\vec{n}\cdot\vec{a})^2}{K^5} = \int\frac{\mathrm{d}\Omega\;(\vec{n}\cdot\vec{a})^2}{(1-\beta\cdot\vec{n})^5}. \end{aligned} \tag{16.17}$$

Das erste Integral ist elementar. Wir richten die z-Achse entlang des Vektors $\vec{\beta}$ aus, und erhalten

$$I_1 = \int\frac{\mathrm{d}\cos\theta\,\mathrm{d}\phi}{(1-\beta\cos\theta)^3} = 2\pi\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{(1-\beta\cos\theta)^3} = \frac{4\pi}{(1-\beta^2}. \tag{16.18}$$

Das zweite Integral ist komplezierter. Wir schreiben zuerst

$$I_2 = \vec{a}\cdot\vec{I_2}, \tag{16.19}$$

wobei

$$\vec{I_2} = \int \frac{\mathrm{d}\Omega \quad \vec{n}}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^4}, \tag{16.20}$$

Der Vektor $\vec{I_2}$ muss in die Richtung von $\vec{\beta}$ zeigen weil es keinen anderen Vektor in $\vec{I_2}$ gibt. Dann schreiben wir

$$\vec{I_2} = X_1\,\vec{\beta}, \tag{16.21}$$

multiplizieren beide Seiten obiger Gleichung mit $\vec{\beta}$ und erhalten

$$X_1 = \frac{1}{\beta^2}\vec{\beta}\cdot\vec{I_2} = \frac{1}{\beta^2}\int \frac{\mathrm{d}\Omega \quad \vec{\beta}\cdot\vec{n}}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^4} = \frac{1}{\beta^2}\int \mathrm{d}\Omega \left[\frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^4} - \frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\right] \tag{16.22}$$

Wir berechnen das Integral

$$\int \mathrm{d}\Omega\ \frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^4} = \frac{4\pi}{3}\frac{3+\beta^2}{(1-\beta^2)^3}. \tag{16.23}$$

Das zweite Integral in Eq. (16.22) ist uns bekannt, siehe Gl. (16.18). Wir setzen die Integrale zusammen und erhalten

$$X_1 = \frac{16\pi}{3}\frac{1}{(1-\beta^2)^3}. \tag{16.24}$$

Dann

$$I_2 = \frac{16\pi(\vec{\beta}\cdot\vec{a})}{3}\frac{1}{(1-\beta^2)^3}. \tag{16.25}$$

Es bleibt I_3 zu berechnen. Wir schreiben

$$I_3 = \int \mathrm{d}\Omega \frac{(\vec{n}\cdot\vec{a})^2}{K^5} = a_i a_j I_{ij}, \tag{16.26}$$

und parametrisieren die "Matrize" I_{ij} auf dieser Weise

$$I_{ij} = \int \mathrm{d}\Omega\ \frac{n_i n_j}{K^5} = X_2\delta_{ij} + X_3\beta_i\beta_j. \tag{16.27}$$

Um die Koeffizienten $X_{2,3}$ zu berechnen, kontrahieren wir beide Seiten obiger Gleichung mit entweder δ_{ij} oder $\beta_i\beta_j$. Dann

$$\begin{aligned} I_s &= \delta_{ij}I_{ij} = \int \mathrm{d}\Omega\ \frac{1}{K^5} = 3X_2 + X_3\beta^2, \\ I_\beta &= \beta_i\beta_j I_{ij} = \int \mathrm{d}\Omega\ \frac{(\vec{\beta}\cdot\vec{n})^2}{K^5} = X_2\beta^2 + X_3\beta^4. \end{aligned} \tag{16.28}$$

Falls wir die Integrale I_s und I_β kennen, stellen obige Gleichungen lineare Gleichungssystem dar, welches wir für $X_{2,3}$ lösen kann. Wir erhalten

$$X_1 = \frac{1}{2}\left(I_s - \frac{1}{\beta^2}\, I_\beta\right), \quad X_2 = \frac{1}{\beta^2}\left(I_s - 3X_1\right). \tag{16.29}$$

Die zwei Integrale $I_{s,\beta}$ ist einfach zu berechnen. Wir finden

$$\begin{aligned} I_s &= \int \mathrm{d}\Omega\, \frac{1}{K^5} = \frac{4\pi(1+\beta^2)}{(1-\beta^2)^4}, \\ I_\beta &= \int \mathrm{d}\Omega\, \frac{(\vec{\beta}\cdot\vec{n})^2}{K^5} = \int \mathrm{d}\Omega\, \frac{(1-K)^2}{K^5} = \frac{4\pi}{3}\frac{\beta^2(1+5\beta^2)}{(1-\beta^2)^4}. \end{aligned} \tag{16.30}$$

Aus Gl. (16.29) erhalten wir

$$X_1 = \frac{4\pi}{3(1-\beta^2)^3}, \quad X_2 = \frac{8\pi}{(1-\beta^2)^4}, \tag{16.31}$$

sodass

$$I_3 = \frac{4\pi}{3(1-\beta^2)^3}\vec{a}^2 + \frac{8\pi}{(1-\beta^2)^4}\,(\vec{a}\vec{\beta})^2. \tag{16.32}$$

Den Energieverlust pro Zeiteinheit $\mathcal{P}$ in Gl. (16.13) können wir jetz durch Integrale $I_{1,2,3}$ ausdrucken

$$\mathcal{P} = \int \frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{q^2}{16\pi^2\mu_0\epsilon_0^2 c^5}\left[\vec{a}^2 I_1 + 2(\vec{a}\cdot\vec{\beta})I_2 - (1-\beta^2)I_3\right]. \tag{16.33}$$

Wir setzen die Ergebnisse für drei Integrale ein und erhalten

$$\mathcal{P} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3(1-\beta^2)^2}\left\{\vec{a}^2 + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{\beta})^2}{(1-\beta^2)}\right\}. \tag{16.34}$$

Im nicht-relativischen Limit $\beta \ll 1$, bekommen wir die Gl. (16.8) zuruck. Im ulta-relativistischen Fall, ist $\beta \sim 1$, und die Leistung ist verstärkt

$$\mathrm{d}\mathcal{P} \sim \frac{q^2(\vec{a}\cdot\vec{\beta})^2}{6\pi\epsilon_0 c^3(1-\beta^2)^3}. \tag{16.35}$$

Die Winkelverteilung der Abstrahlung im ultra-relativistischen Fall ist auch interessant. Um diese Verteilung zu untersuchen, gehen wir zuruck zur Gl. (16.13).

We merken dass $\mathrm{d}\mathcal{P} \sim 1/K^5$ ist. Weil $K = 1-\vec{\beta}\cdot\vec{n}$ und im ultrarelativistischen Fall $|\vec{\beta}| \sim 1$ ist, ist die Abstrahlung meistens entlang $\vec{\beta}$ ausgerichtet. Um das zu quantifizieren, wählen wir Koordinatensystem mit der z-Achse parallel zur Geschwindigkeit β. Dann $\vec{\beta} = \beta\vec{e}_z$ und

$$\vec{n} = \cos\theta\vec{e}_z + \vec{n}_\perp, \tag{16.36}$$

wobei $\vec{n}_\perp \cdot \vec{e}_z = 0$. Dann

$$K = 1 - \vec{\beta}\cdot\vec{n} = 1 - \beta\cos\theta = (1-\beta) + \beta(1-\cos\theta) \approx \frac{1}{2}\left(\delta^2 + \theta^2\right), \tag{16.37}$$

wobei wir $\cos\theta$ für kleine θ entwickelt haben und $1-\beta^2$ als δ^2 bezeichnet haben.

Der Zähler in Gl. (16.13) sollen wir auch in dem Limit $\beta \to 1$ und $\vec{n}||\vec{\beta}$ analyzieren. Wir benutzen Eq. (16.36) und schreiben

$$\vec{n} - \vec{\beta} = (\cos\theta - \beta)\vec{e}_z + \vec{n}_\perp. \tag{16.38}$$

Weil θ klein ist und $\vec{n}^2 = 1$ ist, ist $\vec{n}_\perp| = \theta$. Das bedeutet dass in obiger Gleichung wir $(\cos\theta - \beta)\vec{e}_z$ vernachlässigen kann. Dann

$$[\vec{n}\times(\vec{n}-\vec{\beta})\times\vec{a}]^2 \approx [\vec{n}\times\vec{n}_\perp\times\vec{a}]^2 \approx \theta^2(\vec{\beta}\vec{a}). \tag{16.39}$$

Die Winkelverteilung der Abstrahlung ist dann

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2\,(\vec{a}\cdot\vec{\beta})^2}{\mu_0 c(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{32\,\theta^2}{(\delta^2+\theta^2)^5} = \frac{2\,\mu_0 q^2(\vec{a}\cdot\vec{\beta})^2}{\pi^2 c}\frac{\theta^2}{\left(\delta^2+\theta^2\right)^5}\,\mathrm{d}\Omega. \tag{16.40}$$

While $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, und es keine Abhängigkeit von Azimuthalwinkel φ vorhanden ist, integrieren wir über φ und erhalten für kleinen θ

$$\mathrm{d}\mathcal{P} = \frac{4\,\mu_0 q^2(\vec{a}\cdot\vec{\beta})^2}{\pi c}\frac{\theta^3\,\mathrm{d}\theta}{\left(\delta^2+\theta^2\right)^5}. \tag{16.41}$$

Diese Verteilung hat ein Maximum bei $\theta = \theta^* = \sqrt{3}\delta$ und fällt nach diesem Maximum sehr stark ab; d.h. dass relativistisches Teilchen die Energie in die Richtung der Geschwindigkeit abstrahlt; die Breite der Winkelverteilung ist $\Delta\theta \sim \delta \sim 1-\beta^2 \ll 1$. Nach einer Integration über θ erhalten wir das Ergebniss in Gl. (16.36).

17 Relativitätstheorie

Wir betrachten ein Teilchen mit der Masse m. Die Lagrangefunktion dieses Teilchen lautet

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} - U(\vec{r}). \tag{17.1}$$

In dieser Formel ist $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$ die Geschwindigkeit des Teilchens und $U(\vec{r})$ – das Potential. Die Bewegungsgleichung folgt aus dieser Lagrangefunktion und lautet

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}}. \tag{17.2}$$

Wir wählen dann ein anderen Koordinantensystem aus, welches sich relative zum ursprünglichen (K)-System mit der Geschwindigkeit $\vec{V}$ bewegt. Wir werden dieses Koordinatensystem als K_1-System bezeichnen. Der Ortsvektor des Teilchens in K_1-System schreiben wir als $\vec{r}_1$. Dann gilt

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{V}t. \tag{17.3}$$

Das ist die Relation von Koordinaten in zwei Inertialsysteme. Wir setzen den Ausdruck Gl. (17.3) in die Lagrangfunktion Gl. (17.1) ein und erhalten

$$L = \frac{m(\vec{v}_1 + \vec{V})^2}{2} - U(\vec{r}_1 + \vec{V}t). \tag{17.4}$$

Diese Formel beschreibt die Lagrangefunktion des Teilchens in dem neuen Koordinatensystem. Wir können diese Formel vereinfachen und Gl. (17.4) wieder als die Differenz von kinetischer und potentieller Energien schreiben. In der Tat, es gilt

$$\frac{m(\vec{v}_1 + \vec{V})^2}{2} = \frac{m\vec{v}_1^2}{2} + m\vec{v}_1 \cdot \vec{V} + \frac{m\vec{V}^2}{2} = \frac{m\vec{v}_1^2}{2} + m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}_1 \cdot \vec{V}\right) + \frac{m\vec{V}^2}{2}, \tag{17.5}$$

und weil wir Konstanten und totale Zeitableitungen zur Lagrangefunktion addieren kann ohne Bewegungsgleichungen zu beeinflußen, es ist möglich zwei letzte Terme in Gl. (17.5) vernachlässignen und statt Gl. (17.4) folgene Lagrangefunktion benutzen um das Teilchen in K_1-System zu beschreiben

$$L = \frac{m\vec{v}_1^2}{2} - U(\vec{r}_1 + \vec{V}t). \tag{17.6}$$

Wir betrachten jetzt die Lagrangefunktion eines geladenen Teilchens (die Ladung q) im elektrischen Feld eines anderen Teilchens (die Ladung Q) welches sich im Ruhe in Ursprung des K-Systems befindet. Die Lagrangefunktion des Teilchens mit der Ladung q in K-System ist dann

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} - \frac{q\,Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \tag{17.7}$$

Als wir gesehen haben, die Lagrangfunktion im K_1-System lautet

$$L = \frac{m\vec{v}_1^2}{2} - \frac{q\,Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}_1 + \vec{V}t|}. \tag{17.8}$$

Allerdings, im K_1 System, bewegt sich in K-System ruhendes Teilchen mit der Ladung Q mit der Geschwindigkeit $-\vec{V}$. In Vorlesung 14 haben wir elektrisches Potential enes Teilchens, welches sich mit konstanter Geschwindigkeit $(-\vec{V})$ bewegt, gerechnet. Das Ergebniss lautet

$$\varphi_{-V}(t,\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(r_{||} + Vt)^2 + (1 - V^2/c^2)r_\perp^2}}, \tag{17.9}$$

wobei $r_{||}$ und $\vec{r}_\perp$ die Entwicklung des Vektors $\vec{r}$ beschreiben

$$\vec{r} = r_{||}\frac{\vec{V}}{V} + \vec{r}_\perp, \quad \vec{V}\cdot\vec{r}_\perp = 0. \tag{17.10}$$

Wir könnten dann erwarten dass wir, statt Gl. (17.8), folgende Lagrangefunktion brauchen um dieses physikalischen System zu beschreiben

$$L = \frac{m\vec{v}_1^2}{2} - q\varphi_{-V}(t,\vec{r}). \tag{17.11}$$

Der Unterschied zwischen Gl. (17.8) und Gl. (17.11) ist bemerkungswert weil wir die Lagrangefunktion Gl. (17.8) heregeleitet haben in dem wir von einer Inertialkoordinatensystem zur anderen Inertialsystem gewechselt haben; nach Gallilei'schem Prinzip erwarten wir dass solche transformation die Physik nicht beinflüßen kann. Wir sehen auch dass Gl. (17.8) und Gl. (17.11) in nicht-relativistischem Fall $V/c \ll 1$ identisch sind. Wir vermuten dass Gallilei'sche Transformation Gl. (17.3) nur nicht-relativistishes Limit ($V/c \ll 1$)

einer "richtige" Transformation beschreiben. Unser Ziel ist die Erweiterung Gallileischer Transformation für relativistischen Fall zu finden.

Wir versuchen jetz die Koordinatentransformation zu finden welche uns das "richtigen" Potential gibt. Demzufolge, schreiben wir Gl. (17.9) so um

$$\varphi_{-V} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-V^2/c^2}\sqrt{\frac{(r_{1\,||}+Vt)^2}{1-V^2/c^2}+r_{1\,\perp}^2}}. \tag{17.12}$$

Nehmen wir an dass der Geschwindigkeitsvektor $\vec{V}$ entlang der x-Achse ausgerichtet ist sodass $r_{||} = x$ und $r_\perp^2 = y^2 + z^2$. Wir wollen jetz fordern dass die Abhängigkeit des Potentials φ_{-V} von x, y, z und t das Ergebniss der "richtigen" Version des Galilei'schen Transformation sein soll. Eine Möglichkeit ist folgende Transformation zu betrachten

$$x = \frac{Vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y_1, \quad z = z_1, \tag{17.13}$$

wobei $\beta = V/c$. Wir sehen dass es nicht möglich ist in ein System zu gehen welches sich mit der Geschwindigkeit $V > c$ bewegt. In diesem Fall ist $\beta > 1$ und alle obige Formeln inklusive die Lösungen von Maxwell'schen Gleichungen machen keinen Sinn mehr.

Wir werden jetz die Transformation Eq. (17.13) auf einer speziellen Weise schreiben und das Konzept des Viervektors einführen. Dementsprechend, packen wir ct und $\vec{r}$ in einen Vektor zusammen und schreiben die Transformations-Regel dieses Vektor wie folgt

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}. \tag{17.14}$$

Die Fragezeichen unterstreichen dass es auch die Zeit-Transformationen geben kann. Eine Möglichkeit wäre diesen Fragezeichenvektor einfach mit dem Vektor $(1, 0, 0, 0)$ zu ersetzen so dass, wie bei Galilei'schen Transformationen, die Zeit sich nicht ändert $t_1 = t$.

Es gibt auch eine andere Möglichkeit. Nehmen wir an dass ct und x einigermaßen ähnlich sind. Dann weil die Trasformation von x die Zeit involviert,

können wir uns vorstellen dass die Zeittransformation auch x-abhängig sein kann. Dann, sollen wir den "Fragezeichenvektor" als $(a, b, 0, 0)$ schreiben. Um die Idee über a und b zu bekommen, merken wir dass, falls wir $1/\sqrt{1-\beta^2}$ so bezeichnen

$$1/\sqrt{1-\beta^2} = \cosh\eta, \tag{17.15}$$

gilt

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sinh\eta. \tag{17.16}$$

Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ \sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \tag{17.17}$$

und falls wir $\cosh\eta$ und $\sinh\eta$ mit Cosinus oder Sinus ersetzen, sieht mindestenst x-Transformation als eine Art von Drehung in ct und x Ebene aus. Um diese Analogie komplett zu machen, sollen wir a mit $\cosh\eta$ und b mit $\sinh\eta$ ersetzen. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & \sinh\eta & 0 & 0 \\ \sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}. \tag{17.18}$$

Die Transformation in Gl. (17.18) beschreibt das Verhältnis zwischen Koordinaten und Zeit in K_1-System und Koordinaten und Zeit in K-System welches sich relative zu K_1 mit Geschwindigkeit $-\vec{V}$ bewegt.

Die Form dieser Transformation und das Konzept des Viervektors welcher die Zeit und die Raumkoordinaten enthält unterstreicht die Ähnlichkeit von Zeit und Raum. Die (Lorentz'sche) Transformationen beschreiben eine "Drehung" in dem Raum der Viervektoren. Physikalische Gesetze mussen unter solchen Drehungen invariant sein.

Wir reden jetz über geometrische Interpretation von Lorentz'schen Transformationen. Betrachten wir folgende Grösse (*das Intervall*)

$$s_1^2 = c^2 t_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2. \tag{17.19}$$

Das Intervall sieht wie der Betrag des Vektors $\vec{r}^2 = x_1^2 + x_2^2 + ...$ aus aber Vorzeichen vor ct_1 und x_1, y_1 u.s.w. sind unkonventionell. Es ist bekannt das die Länge des Vektors im Ortsraum ünter Drehungen invariant ist. Wir zeigen dass das Intervall ünter *Lorentz'sche* Transformationen invariant ist. Dementsprechend, berechnen wir das Intervall im K-System

$$\begin{aligned} s^2 &= c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\ &= (\cosh\eta\ ct_1 + \sinh\eta\ x_1)^2 - (\sinh\eta\ ct_1 + \cosh\eta\ x_1)^2 - y_1^2 - z_1^2 \\ &= (\cosh^2\eta - \sinh^2\eta)(ct_1^2 - x_1^2) - y_1^2 - z_1^2 = s_1^2, \end{aligned} \tag{17.20}$$

weil $\cosh^2\eta - \sinh^2\eta = 1$ ist. Wir sehen dass das Intervall unter Lorentz'schen Transformationen invariant ist.

Lorentz'sche transformationen haben Konsequenzen welche nicht intuitiv sind. Zum Beispiel betrachten wir zwei Ereignisse in K_1-System welche gleichzeitig passieren. Die Viervektoren diese Ereignisse sind $(ct, x_1, 0, 0)$ und $(ct, x_2, 0, 0)$. In K-System sind die Zeitpunkten diese Ereignisse durch $t_1 = \cosh\eta t + \sinh\eta\ x_1/c$ und $t_2 = \cosh\eta t + \sinh\eta\ x_2/c$ gegeben. Es ist klar dass

$$t_1 - t_2 = \frac{1}{c}\sinh\eta\ (x_1 - x_2) \neq 0, \tag{17.21}$$

und die gleiche zwei Ereignisse in K-System *nicht* gleichzeitig stattfinden.

Wir wollen das Intervall als eine Art von Skalaprodukt von Viervektoren aufstellen. Dementsprechend, führen wir einen Metriktensor ein. Der Tensor lautet

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1). \tag{17.22}$$

Es gibt weitere Metriktensoren

$$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1), \quad g^{\mu}_{\ \nu} = g_{\mu}^{\ \nu} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1), \tag{17.23}$$

welche sich unterscheiden in dem manche Indexes oben und manche unten stehen; die Differenz zwischen dem werden wir bald diskutieren.

Der Viervektor welcher die Zeit und Ortsraumkoordinaten enthält schreiben wir als

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z). \tag{17.24}$$

Dann ist das Interval durch solche Formel gegeben

$$s^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = g_{00}x^0x^0 + g_{11}x^1x^1 + ... = (ct)^2 - x^2 - ... \qquad (17.25)$$

Wir können diese Formel so umschreiben

$$s^2 = x_\mu x^\mu, \qquad (17.26)$$

wobei

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (ct, -x, -y, -z). \qquad (17.27)$$

Wir bezeichen Viervektoren mit obigen Indexes als *kovariante Vektoren* und Viervektoren mit unteren Indexes als *kontravariante Vektoren*. Wir können immer aus einem kovarianten Vektor (A^μ) einen kontravarianten Vektor (A_μ) machen in dem wir A^μ mit dem Metriktensor kontrahieren

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu. \qquad (17.28)$$

Generell, können wir nur obige Indexes mit unteren Indexes kontrahieren; die Ausdrucke wir z.B.

$$x^\mu x^\mu, \qquad (17.29)$$

sind *sinnloss und sollen in Formeln nicht erscheinen*. Falls wir zwei Viervektoren haben, berechnen wir das Skalarprodukt von Viervektoren wie folgt

$$g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu. \qquad (17.30)$$

Der Linearraum von Viervektoren mit dem Skalarprodukt wie in Gl. (17.30) bezeichnen wir als *Minkowski'scher Raum*.

Wir wissen dass im Ortsraum viele "normale" Vektoren gibt, wie z.B. Ortsvektor $\vec{r}$, Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$, Beschleunigungsvektor $\vec{a}$, die Kraft $\vec{F}$ u.s.w. Es ist interessant zu diskutieren was mit diesen Vektoren im Minkowski'schen Raum passiert.

Als Beispiel betrachten wir den Geschwindigkeitsvektor. Wir nehmen an dass ein Teilchen in K-System zur Zeit t sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt. Das K_1-System bewegt sich mit der Geschwindigkeit V; der Vektor $\vec{V}$ richtet sich entlang der x-Achse aus. Die Relation zwischen x_1^μ und x^μ lautet

$$x_1^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu, \qquad (17.31)$$

wobei

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{17.32}$$

Um die Geschwindigkeit zu berechnen, schreiben wir

$$\begin{aligned} v_{1,x} &= \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t_1} = \frac{\cosh\eta\,\mathrm{d}x - \sinh\eta\; c\mathrm{d}t}{\cosh\eta\,\mathrm{d}t - \sinh\eta\,\mathrm{d}x/c} \\ &= \frac{\cosh\eta\; v_x - \sinh\eta\; c}{\cosh\eta - \sinh\eta\; v_x/c} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}, \\ v_{1,y} &= \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t_1} = \frac{\mathrm{d}y}{\cosh\eta\,\mathrm{d}t - \sinh\eta\,\mathrm{d}x/c} = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}, \\ v_{1,z} &= \frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t_1} = \frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}. \end{aligned} \tag{17.33}$$

Die Transformation der Geschwindigkeit in Gl. (17.33) sieht anders als die Transformation einen Viervektor x^μ. Um ein Objekt zu konstruieren welches "geschwindigkeit-artig" ist und sich ähnlich zum x^μ transformiert, sollen wir das Intervall benutzen. Wir wissen dass Intervall invariant ist. In dem Ruhesystem des Teilchens ist infinitesimales Intervall

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2 \tag{17.34}$$

Das gleiche Intervall im Koordinatensystem wo sich das Teilchen mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, sieht dann so aus

$$\mathrm{d}s^2 = c\mathrm{d}t(1 - v^2/c^2). \tag{17.35}$$

Es folgt,

$$\mathrm{d}s = c\mathrm{d}\tau = c\mathrm{d}t\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{17.36}$$

Wir können jetz einen Viervektor konstruieren welches sich wie die Geschwindigkeit für kleine v/c benimmt. Wir schreiben

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}. \tag{17.37}$$

Der Viervektor u^μ ist der Viervektor der Geschwindigkeit; wir sagen dass das ein Viervektor ist weil u^μ sich ähnlich zum x^μ transformiert

$$u_1^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, u^\nu. \tag{17.38}$$

Wir schreiben u^μ explizit. Wir finden

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \tag{17.39}$$

Eine interessante Eigenschaft dieses Viervektors ist

$$u^\mu u_\mu = 1. \tag{17.40}$$

Das hat Konsequenzen für die Beschleunigungs-Viervektor

$$w^\mu = \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}s}. \tag{17.41}$$

In der Tat, nach der Ableitung von Gl. (17.40), erhalten wir

$$w_\mu u^\mu = 0. \tag{17.42}$$

Es ist wichtig einzumerken dass die Geschwindigkeit des Teilchens v die Lichtgeschwindigkeit c nicht überschreiten darf; falls, z.B. sich ein Teilchen mit der Geschwindigkeit c bewegt, dann es ist nicht möglich ein Koordinatensystem zu finden in dem die Geschwindigkeit des Teilchens grösse als c ist.

Ein Weiteres sehr wichtige Viervektor können wir einführen in dem wir u^μ mit eine Konstante mc multiplizieren. Wir erhalten

$$p^\mu = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \tag{17.43}$$

Bei kleinen Geschwindigkeiten $v/c \ll 1$ erhalten wir

$$p^\mu \approx \left(\frac{mc^2 + \frac{mv^2}{2}}{c}, m\vec{v} \right). \tag{17.44}$$

Falls m die Masse des Teilchens ist, können wir $mv^2/2$ mit kinetischer Energie und $m\vec{v}$ mit dem Impuls des Teilchens assoziieren. Mit dieser Motivation, können wir sagen dass Vektor p^μ der Vierumpulsvektor ist. Wir schreiben

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right), \tag{17.45}$$

wobei

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{17.46}$$

sind. E ist die Energie und $\vec{p}$ ist der Impuls relativistisches Teilchens. Weil $p^\mu = mcu^\mu$ und $u^\mu u_\mu = 1$ sind, erhalten wir

$$p_\mu p^\mu = m^2c^2. \tag{17.47}$$

Wir merken dass die Energie des ruhendes Teilchen $E = mc^2$ ist.

18 Relativitätstheorie II

Wir haben gesehen dass es viele Objekte gibt die sich ähnlich zum Viervektor x^μ unter Lorentz'schen Transformation transformieren. Um den Begriff "Viervektor" vollständig definieren zu können, sagen wir dass *alle* Objekte welche sich ähnlich zum x^μ transformeiren

$$A_1^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu, \tag{18.1}$$

(kovariante) *Viervektoren* sind. Ein kontravarianter Vektor transformiert sich auf ähnliche (aber nicht gleiche) Weise

$$A_{1\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu. \tag{18.2}$$

Wir haben schon gesehen dass das Interval sich uberhaupt nicht ändert (d.h. bleibt invariant). Auch invariant bleiben *Skalarprodukte von Viervektoren*. Betrachten wir zwei Vektoren A und B. Wir schreiben das Skalarprodukt als

$$s_{AB} = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu. \tag{18.3}$$

Im anderen Koordiantensystem finden wir

$$s_{1,AB} = g_{\mu\nu} A_1^\mu B_1^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_{\mu_1} \Lambda^\nu{}_{\nu_1} A^{\mu_1} B^{\nu_1}. \tag{18.4}$$

Aus der Invarianz des Intervals, wissen wir dass

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_{\mu_1} \Lambda^\nu{}_{\nu_1} = g_{\mu_1\nu_1}, \tag{18.5}$$

und das bedeutet dass Skalarprodukten von Viervektoren invariant sind

$$A_{1\mu} B^{1\mu} = A_\mu B^\mu. \tag{18.6}$$

Es gibt auch Objekten mit vielen Indexes. Falls solche Objekte sich als direkt Produkt von Viervektoren transformieren, nennen wir diese Objekte *Tensoren*. Z.B. wir schreiben

$$T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu, \tag{18.7}$$

wobei A and B Viervektoren sind. Nach Lorentz'sche Transformation erhalten wir

$$T_1^{\mu\nu} = A_1^\mu B_1^\nu = \Lambda^\mu{}_{\mu_1} \Lambda^\nu{}_{\nu_1} A^{\mu_1} B^{\nu_1} = \Lambda^\mu{}_{\mu_1} \Lambda^\nu{}_{\nu_1} T^{\mu_1\nu_1}. \tag{18.8}$$

Das ist die Transformationsregel von *rank-zwei* Tensors.

Wir haben $g_{\mu\nu}$ als "Metriktensor" bezeichnet. Falls $g_{\mu\nu}$ ein Tensor ist, soll er sich auch transformieren. Wir haben schon eine Transformation in Gl. (18.5). Wir werden die Transformation von $g_{\mu\nu}$ noch einmal diskutiren nachdem wir die Matrize der inverse Lorentz'sche Transformation beschreiben.

Betrachten wir eine Lorentz'sche Transformation aus K-System zum K_1-System. Die Lorentz'sche Transformation lautet

$$x_1^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu, \tag{18.9}$$

wobei

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{18.10}$$

Wir wollen die Matrize der *inverse Transformation* konstruieren, also eine Matrize $\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu$ welche folgende Gleichung erfüllt

$$x^\mu = \tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu x_1^\nu. \tag{18.11}$$

Aus dieser Formel, finden wir die Gleichung welche $\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu$ erfüllen soll

$$\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\alpha = g^\mu{}_\alpha. \tag{18.12}$$

Falls, Gl. (18.5) zufolge, wir $\tilde{\Lambda}$ wie folgt schreiben

$$\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu, \tag{18.13}$$

erhalten wir Gl. (18.12) erfüllt. Dann

$$\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu = g_{\nu\alpha}\Lambda^\alpha_\beta g^{\beta\mu}. \tag{18.14}$$

Es ist jetz einfach zu sehen dass die Matrize $\tilde{\Lambda}$ ähnlich zur Gl. (18.10) aussieht aber mit dem Ersatz $\eta \to -\eta$, was auch physikalisch Sinn macht. Explizit

$$\tilde{\Lambda}^\nu{}_\mu = \begin{pmatrix} \cosh\eta & \sinh\eta & 0 & 0 \\ \sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{18.15}$$

Weil $\tilde{\Lambda}$ auch eine Lorentz'sche Transformation darstellt, gilt für $\tilde{\Lambda}$ Gl. (18.5) auch

$$g_{\mu\nu}\tilde{\Lambda}^{\mu}{}_{\mu_1}\tilde{\Lambda}^{\nu}{}_{\nu_1} = g_{\mu_1\nu_1}. \tag{18.16}$$

Wir benutzen jetz Gl. (18.13) und erhalten

$$g_{\mu_1\nu_1} = \Lambda_{\mu_1}^{\mu}\,\Lambda_{\nu_1}^{\nu} g_{\mu\nu}. \tag{18.17}$$

Es folgt

$$g^{\mu_1\nu_1} = \Lambda^{\mu_1}_{\mu}\,\Lambda^{\nu_1}_{\nu} g^{\mu\nu}. \tag{18.18}$$

Auf der rechte Seite steht die Lorentz'sche Transformation eines Tensors, auf der rechte Seite das Ergebniss – der Tensor in einem anderen Koordinatensystem. Gl. (18.18) bedeutet dass Metriktensoren in allen Systemen gleich sind.

Weil Tensoren sich wir direkt Produkten von Vektoren unter Lorentz'schen Transformationen benemmen, muss es klar sein das z.B. der Spur eines Tensors $T^{\mu}_{\mu} = T^{\mu\nu}g_{\mu nu}$ oder generell ein Produkt von zwei Tensoren $T_{\mu\nu}W^{\mu\nu}$ u.s.w. invariant unter Lorentz'schen Transformationen sind.

Wir gehen zuruck zu Gl. (**??**) für das Potential des Teilchens mit der Geschwindigkeit $-V$. Wir schreiben diese Formel als

$$\varphi_{-V}(x^{\mu}) = \cosh(\eta)\,\varphi_{V=00}(\Lambda^{\mu}_{-V\nu}x^{\nu}), \tag{18.19}$$

wobei $\phi_0 = Q/(4\pi\epsilon_0 r)$ das Potential im Ruhesystem des Teilchens ist. Zusätslicher Faktor $\cosh\eta$ können wir erklaren in dem wir elektrisches Potential als die Zeitkomponente eines Viervektors betrachten. Das Vektor enthalt elektrisches Potential ϕ und das Vektorpotential $\vec{A}$

$$A^{\mu} = (\varphi/c, \vec{A}). \tag{18.20}$$

Wir bezeichnen dieses Vektor auch als Vektorpotential.

Weil A^{μ} Viervektor ist, gelten für A^{μ} die gleiche Transformationsregeln wie für andere Viervektoren auch

$$\begin{aligned} A_1^{\mu}(x_1) &= \Lambda^{\mu}_{\nu}\,A^{\nu}(x), \\ x_1^{\mu} &= \Lambda^{\mu}_{\nu}\,x^{\mu}. \end{aligned} \tag{18.21}$$

Wir versuchen jetz die Gleichungen der Elektrodynamik im relativistische Form zu schreiben. Als erster Schritt schreiben wir Differenzialoperatoren um.

Ähnlich zum Gradientoperator $\vec{\nabla}$ können wir vierdimensionalen Gradientoperator einführen. Wir schreiben dann

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \vec{\nabla} \right). \tag{18.22}$$

Wir wollen finden wie ∂_μ sich nach Lorentz-Transformationen transformiert. Nehmen wir ein dass nach einer Lorentztransformation erhalten wir

$$x_1^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\mu. \tag{18.23}$$

Dann

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x_1^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_1^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x_1^\nu}. \tag{18.24}$$

Wir kontrahieren beide Seiten mit $\Lambda_\alpha{}^\mu$ und erhalten

$$\Lambda_\alpha{}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \Lambda_\alpha{}^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x_1^\nu} = g_\alpha{}^\nu \frac{\partial}{\partial x_1^\nu} = \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}. \tag{18.25}$$

Das bedeutet dass ∂_μ sich als kontravarianter Vektor transformiert. Es ist dann offensichtlich dass

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, -\vec{\nabla} \right), \tag{18.26}$$

sich als kovarianter Vektor transformiert.

Wir konstruieren jetz einen rank-2 Tensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{18.27}$$

Die Definition zufolge, ist $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \tag{18.28}$$

Das bedeutet z.B. dass

$$F^{00} = F^{xx} = F^{yy} = F^{zz} = 0. \tag{18.29}$$

Insgesamt, gibt *sechs* unabhängige Elemente des Tensors $F^{\mu\nu}$. Es ist zu merken dass $6 = 3+3$ ist und um einen Drei-Vektor zu beschreiben, brauchen wir genau drei Komponenten. D.h. dass wir mit Hilfe von $F^{\mu\nu}$ zwei Drei-Vektoren

beschreiben können und wir wollen finden was für Vektoren das sind. Wir schreiben

$$\begin{aligned} F^{0i} &= \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \frac{\partial}{c\partial t} A^i - \partial^i A^0 = \frac{\partial}{c\partial t} A^i + \frac{\partial}{\partial x^i} A^0 \\ &= \frac{1}{c}\left(\vec{\nabla}^i \varphi + \frac{\partial}{\partial t} A^i\right) = -\frac{\vec{E}^i}{c}. \end{aligned} \tag{18.30}$$

Ähnlich schreiben wir

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\frac{\partial A^j}{\partial x^i} + \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \tag{18.31}$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, schreiben wir

$$\frac{1}{2}\epsilon_{kij} F^{ij} = -\epsilon_{kij} \frac{\partial A^j}{\partial x^i} = -[\vec{\nabla} \times \vec{A}]_k = -\vec{B}_k. \tag{18.32}$$

Wir sehen dass

$$F^{0i} = -\frac{\vec{E}^i}{c}, \quad \frac{1}{2}\epsilon_{kij} F^{ij} = -\vec{B}^k. \tag{18.33}$$

Aus diesen Gleichungen, erfahren wir dass $F^{\mu\nu}$ elektrisches und magnetisches Felder beschreibt.

Es ist praktisch $F^{ij]}$ durch $\vec{B}$ auszudrucken. Wir schreiben

$$\frac{1}{2}\epsilon_{mnk}\epsilon_{kij} F^{ij} = -\epsilon_{mnk} B_k. \tag{18.34}$$

Weil

$$\epsilon_{mnk}\epsilon_{kij} = \delta_{mi}\delta_{nj} - \delta_{mj}\delta_{ni}, \tag{18.35}$$

und $F^{ij} = -F^{ji}$ ist, finden wir

$$F^{mn} = -\epsilon_{mnk} B_k. \tag{18.36}$$

Wir wollen sehen wie wir Maxwell'sche Gleichungen mit Hilfe von relativistischen Notation schreiben kann. Als erster Schritt, schreiben wir die Lorentz'sche Eichung, siehe Gl. (10.24)

$$\frac{\partial}{c^2 \partial t}\varphi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \tag{18.37}$$

um. Es gilt

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \tag{18.38}$$

wobei A^μ und ∂_μ in Gl. (18.20) und Gl. (18.23) gegeben sind.

Wir haben gesehen dass die Gleichungen für φ und $\vec{A}$ in Lorentz'sche Eichung so aussehen

$$\begin{aligned} \Box\, \varphi &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \Box\, \vec{A} &= \mu_0 \vec{j}. \end{aligned} \tag{18.39}$$

wobei

$$\Box = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \vec{\nabla}^2 = \partial_\mu \partial^\mu, \tag{18.40}$$

ist.

Wir schreiben die Gleichungen in Gl. (18.39) zusammen

$$\Box A^\mu = \mu_0 J^\mu, \tag{18.41}$$

wobei

$$J^\mu = \left(c\rho, \vec{j}\right). \tag{18.42}$$

ist.

Weil $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$ invariant unter Lorentz'schen Transformation ist und A^μ Viervektor ist, muss auch J^μ ein Viervektor sein.

Um Gl. (18.41) zu erhalten, können wir $F^{\mu\nu}$ nach ∂_μ ableiten. Wir erhalten

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \Box A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \Box A^\nu = J^\nu, \tag{18.43}$$

weil in Lorentz'scher Eichung $\partial_\mu A^\mu$ =0 ist.

Die Gleichung

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0\, J^\nu. \tag{18.44}$$

ist äquivalent zu zwei Maxwell'sche Gleichungen. Um das zu sehen, setzen wir $\nu \to 0$ in der obigen Gleichung. Dann, weil $F^{i0} = \vec{E}_i/c$ ist, finden wir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \mu_0 c^2 \rho = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{18.45}$$

Die zweite Möglichkeit ist ν nach $i = 1, 2, 3$ zu setzen. Dann

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \frac{\partial F^{0i}}{c\partial t} + \frac{F^{ki}}{\partial x^k} = \mu_0\, j^i. \tag{18.46}$$

Weil $F^{0i} = -E^i/c$ ist und $F^{ki} = -\epsilon_{kin}B^n$, können wir diese Gleichung als

$$-\frac{\partial \vec{E}}{c^2\partial t} + \vec{\nabla} \times B = \mu_o \vec{j} \tag{18.47}$$

schreiben. Das ist auch eine Maxwell'sche Gleichung.

Wir brauchen noch zwei Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times E + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \tag{18.48}$$

Diese zwei Gleichungen erhalten wir aus folgender Gleichung

$$\partial^\mu F^{\alpha\beta} + \partial^\beta F^{\mu\alpha} + \partial^\alpha F^{\beta\mu} = 0. \tag{18.49}$$

Zum Schluss diskutieren wir warum $J^\mu = (c\rho, \vec{j})$ eigentlich ein Viervektor ist. Um zu erklären warum es so ist, sollen wir finden wie sich die Ladungdichte ρ unter Lörentz'sche Transformationen benimmt. Die Ladungdichte ist als Verhältnis von Ladung ΔQ und das Volumen $\Delta\mathcal{V}$ definiert ist,

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta \mathcal{V}}. \tag{18.50}$$

Die Ladung ΔQ ist, in wessentlichen, die Zahl von Teilchen; diese Zahl kann sich nicht ändern. Es geht dann um die Transformation des Volumens.

Um die Transformation dieser Grösse zu verstehen, betrachten wir das Ruhesystem des Teilchens (K_0-System). In diesem System ist die Ladungdichte ρ_0.

$$\rho_0 = \frac{\Delta Q}{\mathrm{d}x_0\ \mathrm{d}y_0\ \mathrm{d}z_0}. \tag{18.51}$$

In anderem (K)-System, wo das Teilchen sich mit der Geschwindigkeit v entlang x-Achse bewegt, definieren wir die Ladungdichte

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z}. \tag{18.52}$$

Hier Berechnen wir $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ für *fixe Zeit in K-System*. Weil die Lorentz-Transformation nur x und t beeinflüsst, gilt

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \mathrm{d}y_0\mathrm{d}z_0. \tag{18.53}$$

Dann

$$\mathrm{d}t = \cosh\eta\,\mathrm{d}t_0 + \sinh\eta\,\frac{\mathrm{d}x_0}{c}, \quad \mathrm{d}x = \sinh\eta\,c\mathrm{d}t_0 + \cosh\eta\,\mathrm{d}x_0. \tag{18.54}$$

Wir wollen in K-System $\mathrm{d}t = 0$ haben. Dann finden wir

$$\mathrm{d}t_0 = -\frac{\sinh\eta}{\cosh\eta}\frac{\mathrm{d}x_0}{c}, \tag{18.55}$$

und

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x_0}{\cosh\eta}. \tag{18.56}$$

Wir erhalten

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z} = \cosh\eta\frac{\Delta Q}{\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0\,\mathrm{d}z_0} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{18.57}$$

Weil ρ_0 unter Lorentz-Transformationen invariant ist (es gibt nur ein Ruhesystem des Teilchens und in diesem System ist die Ladungsdichte ρ_0), sehen wir dass ρ sich als $1/\sqrt{1-\vec{\beta}^2}$ transformiert. Und das ist genau was J^μ braucht um ein Viervektor zu sein. Um diese Aussage explizit zu machen, können wir J^μ so schreiben

$$J^\mu = (c\rho, \vec{v}\rho) = \rho_0 c u^\mu. \tag{18.58}$$

Weil ρ_0 invariant ist und u^μ ein Viervektor ist, ist J^μ auch ein Viervektor.