

Klassische Theoretische Physik III

# Elektrodynamik

Wintersemester 2023/24

Felix Kahlhöfer, Institut für Theoretische Teilchenphysik

# 1. Elektrostatik

↳ Zusammenhang zw. ruhenden Ladungen, E-Feldern und resultierenden Kräften

## 1.1 Coulomb-Kraft

Kraft zw. zwei Punktladungen  $i=1,2$  mit Ladung  $q_i$  und Position  $\vec{r}_i$

$$\vec{F}_{12} = k \cdot q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad \text{Coulomb-Gesetz}$$

Kraft von  
Ladung 2  
auf Ladung 1

Naturkonstante  $k > 0$   
abhängig vom  
Einheitensystem

Eigenschaften:

-)  $\vec{F}_{12}$  zeigt entlang der Verbindungslinie  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$   
⇒ Zentralkraft

-)  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$   
⇒ 3. Newtonsches Axiom

-) Gleichnamige Ladungen ( $q_1, q_2 > 0$ ): abstoßend  
Ungleichnamige Ladungen ( $q_1, q_2 < 0$ ): anziehend

-) Superpositionsprinzip: Für  $n$  Punktladungen  $i=1, \dots, n$  gilt

$$\vec{F}_{1, \text{gesamt}} = \sum_{i=2}^n \vec{F}_{1i}$$

-)  $\vec{\nabla}_1 \times \vec{F}_{12} = 0$  ( $\vec{\nabla}_1$ : Ableitung nach  $\vec{r}_1$ )

Beweis:  $(\vec{\nabla}_1 \times \vec{F}_{12})_x = \frac{\partial}{\partial y_1} F_{12,z} - \frac{\partial}{\partial z_1} F_{12,y}$

$$F_{12,z} = \frac{z_1 - z_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y_1} F_{12,z} = -\frac{3}{2} \frac{z_1 - z_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^5} \frac{\partial}{\partial y_1} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2$$

$= 2(y_1 - y_2)$

$$= -3 \frac{(z_1 - z_2)(y_1 - y_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^5} = \frac{\partial}{\partial z_1} F_{12,y}$$

$\Rightarrow$  Coulomb-Kraft ist konservativ

$\Rightarrow$  Es existiert Coulomb-Potential

$$\Phi = \frac{k q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad \text{mit} \quad \vec{F}_{12} = -\vec{\nabla}_1 \Phi$$

$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

-)  $|\vec{F}_{12}| \sim \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}$

$\Rightarrow$  langreichweitig (wie Schwerkraft)

In QED: Coulomb-Kraft entsteht durch den Austausch von Photonen  $\gamma$  (Lichtteilchen)

$$\text{Vorhersage: } F \sim \frac{1}{r^2} e^{-r/\lambda}$$

$$\text{mit } \frac{1}{\lambda} = \frac{m_\gamma c}{\hbar}$$

Experimentell: Keine Abweichung von  $\frac{1}{r^2}$

$$\Rightarrow \lambda > 10^{11} \text{ m}$$

$$\Rightarrow m_\gamma \lesssim 10^{-54} \text{ kg}$$

## 1.2 Einheiten

Definition von  $k$  im Coulomb-Gesetz erfordert Wahl der Einheit für Ladungen

SI-Einheiten: Coulomb (C) definiert über die Elementarladung

$$e = 1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\Rightarrow k_{\text{SI}} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$$

↑  
Dielektrizitätskonst. des Vakuums

$$\epsilon_0 = 8,8541878 \dots \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

## Alternativen:

- Gauß-Einheiten:  $k_{\text{CGS}} = 1$   
(altmodisch)

$\Rightarrow$  Ladung hat Einheit

$$1 \text{ esu} = 1 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}$$

$$\Rightarrow e \approx 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ esu}$$

Vorteil: Gleiche Einheit für  $E$  und  $B$

- Heaviside-Lorentz: Wie CGS, aber  $k_{\text{HL}} = \frac{1}{4\pi}$   
(Teilchenphysik)

## 1.2 Das elektrische Feld

Aus der Coulomb-Kraft  $\vec{F}_c$  auf eine Testladung  $q$  am Ort  $\vec{r}$  ergibt sich das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_c(\vec{r})}{q}$$

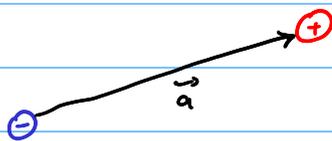
- ↳ unabhängig von  $q$
- ↳ Eigenschaft des Raumes

Beispiel: •  $N$  Punktladungen  $q_i$  an Orten  $\vec{r}_i$  erzeugen

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

### Elektrischer Dipol:

Zwei entgegengesetzte Punktladungen  $\pm q$  mit Abstandsvektor  $\vec{a}$  (von  $-q$  nach  $+q$ )



Wähle Ursprung so, dass  $\vec{r}_{\pm} = \pm \frac{\vec{a}}{2}$

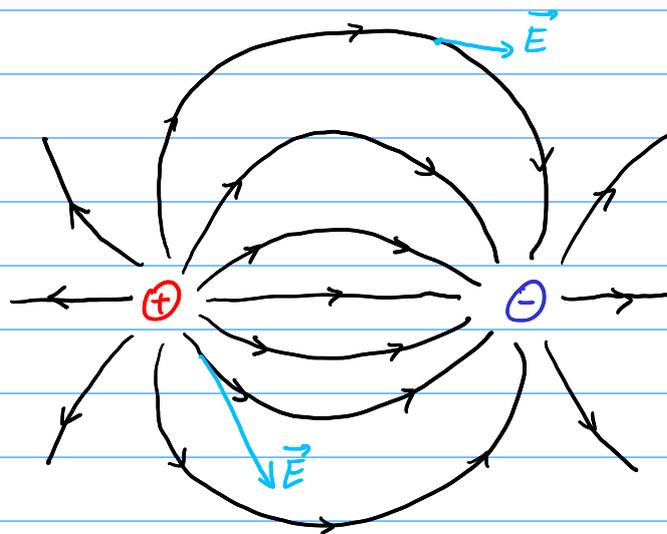
$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}_+}{|\vec{r} - \vec{r}_+|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}_-}{|\vec{r} - \vec{r}_-|^3} \right)$$

Für  $|\vec{r}| \gg |\vec{a}|$  ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{\pm}|^3} &\approx \frac{1}{|\vec{r}|^3} - \frac{3}{|\vec{r}|^4} \vec{r} \cdot (-\vec{r}_{\pm}) \\ &= \frac{1}{|\vec{r}|^3} + \frac{3 \vec{r} \cdot \vec{r}_{\pm}}{|\vec{r}|^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) &\approx \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}_+}{|\vec{r}|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}_-}{|\vec{r}|^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_+) 3 \vec{r} \cdot \vec{r}_+}{|\vec{r}|^5} - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_-) 3 \vec{r} \cdot \vec{r}_-}{|\vec{r}|^5} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{3 \vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{p})}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}|^3} \right] \end{aligned}$$

mit  $\vec{p} = q \cdot \vec{a}$  (el. Dipolmoment)



Feldlinien: - Raumkurven tangential zu  $\vec{E}(\vec{r})$   
=> Feldlinien schneiden sich nicht

- Beginnen an positiven, enden an negativen Ladungen (oder  $\infty$ )

- In der Nähe einer Ladung:  
↳ Gleichmäßig in alle Richtungen  
↳ Anzahl proportional zu  $q$

- Dichte der Feldlinien entspricht Feldstärke  $|\vec{E}|$

Kontinuierliche Ladungsverteilung:

Für  $N$  Punktladungen definieren wir die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad \leftarrow \delta(x-x_i)\delta(y-y_i)\delta(z-z_i)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Für eine große Zahl Punktladungen mit sehr kleinem Abstand kann die Ladungsdichte als kontinuierlich genähert werden:

$$\sum_i q_i = \sum_j \rho_j \delta V_j \xrightarrow{\delta V_j \rightarrow 0} \int \rho(\vec{r}) dV$$

$$\uparrow \rho_j = \frac{1}{\delta V_j} \sum_{\text{Ladung in } \delta V_j} q_i$$

↳ Mathematische Idealisierung

↳ Fundamentale Ladungsträger (Elektronen, Quarks) sind (vermutlich) punktförmig

Einschränkung auf Linie: **Linienladungsdichte  $\lambda(\vec{r})$**

Beispiel: Geladene Linie auf z-Achse:

$$\rho(\vec{r}) = \lambda(z) \delta(x) \delta(y)$$

Einschränkung auf Fläche: **Flächenladungsdichte  $\sigma(\vec{r})$**

Beispiel: Geladene Fläche in x-y-Ebene:

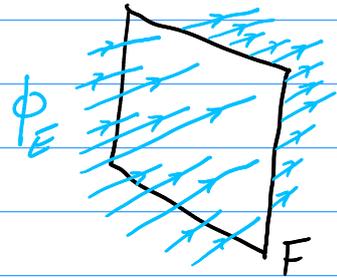
$$\rho(\vec{r}) = \sigma(x, y) \delta(z)$$

## Elektrischer Fluss

Für eine Fläche  $F$  definieren wir den el. Fluss

$$\phi_E = \int_F d\vec{f} \cdot \vec{E}$$

↳ Proportional zur Anzahl Feldlinien durch  $F$



Beispiel: Punktladung  $q$  bei  $\vec{r} = 0$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$F$ : Kugeloberfläche mit Radius  $R$

$$\Rightarrow d\vec{f} = \vec{e}_r R^2 d\Omega$$

↑  $d\varphi \sin\vartheta d\vartheta$

$$\Rightarrow \phi_E = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{e}_r}{r^3} \Big|_{r=R} R^2 d\Omega$$

$$= \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

↳ Konsequenz des  $\frac{1}{r^2}$ -Verhaltens

## Alternativ: Satz von Gauß

$$\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{E} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3r$$

$\uparrow$  Kugeloberfläche       $\uparrow$  Kugel

Für  $|\vec{r}| > 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \partial_i E_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \partial_i \frac{r_i}{\sqrt{r_j r_j}^3}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\delta_{ii}}{(r_j r_j)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{r_i}{(r_j r_j)^{5/2}} \partial_i (r_k r_k) \right]$$

$$\delta_{ii} = \sum_{i=1}^3 1 = 3$$

$$\partial_i (r_k r_k) = \delta_{ik} r_k + r_k \delta_{ik} = 2r_i$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3}{|\vec{r}|^3} - 3 \frac{r_i r_i}{|\vec{r}|^5} \right] = 0 \quad (|\vec{r}| > 0)$$

Damit  $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3r = \frac{q}{\epsilon_0}$  muss gelten:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = 4\pi \delta^3(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{r})$$

Superpositionsprinzip:  $\rho \delta^3(\vec{r}) \rightarrow \rho(\vec{r})$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) \quad \text{1. Maxwell - Gleichung}$$

↳ Ladungen sind die Quellen und Senken des el. Feldes

Integralform:

$$\begin{aligned} \phi_E &= \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3r = \int_V \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) d^3r \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

⇒ Gaußsches Gesetz

El. Fluss durch geschlossene Fläche proportional zur eingeschl. Ladung

↳ Ladung außerhalb von  $V$  trägt nicht zu  $\phi_E$  bei

## 1.3 Das Skalarpotential

Wie für die Coulomb-Kraft gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

2. Maxwell-Gleichung ( $\vec{B} = 0$ )

$$\text{Beweis: } \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \hat{e}_k \epsilon_{ijk} \partial_i \frac{r_j - r'_j}{((r_e - r'_e)(r_e - r'_e))^{3/2}}$$

$$= \hat{e}_k \epsilon_{ijk} \left( \underbrace{\frac{\delta_{ij}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_{\text{antisymmetrisch}} - \frac{3}{2} \frac{r_j - r'_j}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} 2(r_i - r'_i) \right)$$

symmetrisch in  $i \leftrightarrow j$

$$= 0$$

$\Rightarrow$  Es gibt ein Skalarpotential  $\phi(\vec{r})$   
mit  $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r})$

Beweis: 3 verschiedene Strategien

Beweis 1: Betrachte zwei Wege  $C_1$  und  $C_2$  von Punkt  $\vec{a}$  nach Punkt  $\vec{b}$ .

Die Differenz der Wegintegrale beträgt

$$\int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} - \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$= \oint_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Satz von Stokes

$$= \int_F (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{f} = 0$$

$\Rightarrow \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$  ist wegunabhängig

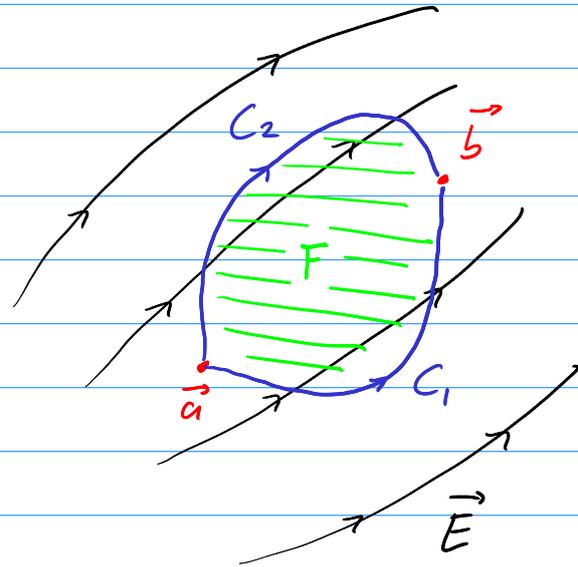
Definiere  $\phi(\vec{r}) = - \int_{\vec{a}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

$$\Rightarrow \vec{E} = - \vec{\nabla} \phi$$

Bemerkung: Punkt  $\vec{a}$  willkürlich. Für Punkt  $\vec{a}'$

$$\phi'(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) - \phi(\vec{a}')$$

$\uparrow$  Konstante



Beweis 2: Explizite Form von  $\phi(\vec{r})$ :

Nutze  $\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

$$\Rightarrow \vec{E} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= - \vec{\nabla}_{\vec{r}} \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{= \phi(\vec{r})}$$

Für endliche Ladung ist  $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(\vec{r}) = 0$

Beweis 3: Formale Lösung mit Greens-Funktion

Aus der 1. MG folgt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = - \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi(\vec{r})) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \Delta \phi(\vec{r}) = - \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

↑  
Laplace-Operator

Poisson-Gleichung

Angenommen wir kennen eine Funktion  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  mit

$$\Delta_{\vec{r}} G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \Delta_{\vec{r}} \int d^3 r' g(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') &= \int d^3 r' g(\vec{r}') \Delta_{\vec{r}} G(\vec{r}, \vec{r}') \\ &= \int d^3 r' g(\vec{r}') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = g(\vec{r}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int d^3 r' g(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}')$$

erfüllt die Poisson-Gleichung

Die Funktion  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  heißt Greens-Funktion.

Wir kennen schon ein Beispiel:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}_{\vec{r}} G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\Rightarrow \Delta_{\vec{r}} G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Die allgemeine Greens-Funktion ist gegeben durch

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}')$$

mit

$$\Delta_{\vec{r}} F(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \text{Laplace-Gleichung}$$

Außerdem gilt  $F(\vec{r}, \vec{r}') = F(\vec{r}', \vec{r})$

Die Funktion  $F(\vec{r}, \vec{r}')$  spielt eine zentrale Rolle bei der Erfüllung von Randbedingungen.  
 $\rightarrow$  später!

Oft kann man die Poisson-Gl. direkt lösen.

Beispiel: Skalarpotential einer homogen geladenen Kugel mit Gesamtladung  $Q$

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

$$\rho_0 = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

Symmetrie:  $\phi(\vec{r}) = \phi(r)$

Kugelkoordinaten:

$$\Delta \phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right)$$

Für  $r > R$ :  $\Delta \phi(r) = 0$

$$\Rightarrow r^2 \frac{d\phi}{dr} = C_1$$

$$\Rightarrow \phi(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

Für  $r < R$ :  $\Delta \phi(r) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} r^2$$

$$\Rightarrow r^2 \frac{d\phi}{dr} = -\frac{1}{3} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} r^3 + C_3$$

$$\Rightarrow \phi(r) = -\frac{1}{6} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} r^2 - \frac{C_3}{r} + C_4$$

Randbedingungen: •  $\phi(\infty) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

• keine Singularität bei  $r = 0$   
 $\Rightarrow C_3 = 0$

•  $\phi(r)$  stetig bei  $r = R$

$$\Rightarrow -\frac{C_1}{R} = -\frac{1}{6} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R^2 + C_4$$

$$\Rightarrow C_4 = \frac{1}{6} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R^2 - \frac{C_1}{R}$$

•  $\phi'(r)$  stetig bei  $r = R$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R = + \frac{C_1}{R^2}$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{1}{3} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R^3 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \phi(r) = \begin{cases} -\frac{1}{6} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} (r^2 - R^2) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & (r \leq R) \\ + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & (r > R) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = -\vec{\nabla} \phi(r) = -\vec{e}_r \frac{d}{dr} \phi(r)$$

$$= \vec{e}_r \begin{cases} \frac{1}{3} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} r & (r \leq R) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r > R) \end{cases}$$

Konsistenztest: Fluss durch Kugeloberfläche  
mit Radius  $r$

$$\Phi_E = \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int E(r) r^2 d\Omega = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{\rho_0}{\epsilon_0} & (r \leq R) \\ \frac{Q}{\epsilon_0} & (r > R) \end{cases}$$

## 1.4 Elektrostatistische Energie

Die nötige Arbeit um eine Ladung  $q$  von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$  zu bringen ist

$$W = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} q \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q \underbrace{(\phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1))}_{\text{Potentialdifferenz ("Spannung")}}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow W$  ist wegunabhängig

Setzt man  $\phi(\infty) = 0$ , dann entspricht  $q\phi(\vec{r})$  der Arbeit um Ladung  $q$  von  $\infty$  nach  $\vec{r}$  zu bringen  
 $\hookrightarrow$  Potentielle Energie  $U$

Einheit:  $[\phi] = \frac{J}{C} \equiv V$  (Volt)

Was ist die pot. Energie einer Ladungsverteilung im eigenen Feld?

Idee: Bringe  $N$  Punktladungen  $q_i$  nacheinander von  $\infty$  zu  $\vec{r}_i$

Wichtig: Das elektrische Feld einer Punktladung trägt nicht zur eigenen pot. Energie bei

$$U_1(\vec{r}_1) = 0$$

$$U_2(\vec{r}_2) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

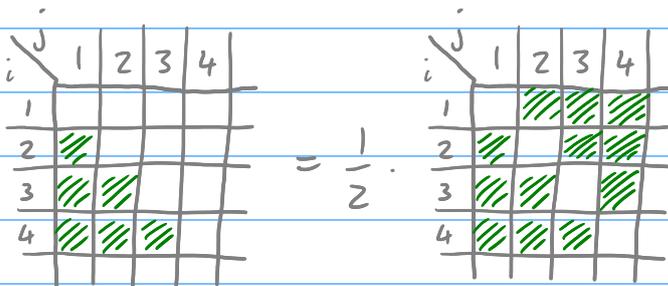
⋮

$$U_i(\vec{r}_i) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

$$U = \sum_{i=1}^N U_i(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

symmetrisch in  $i, j$

$$= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{ij=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$



Für eine stetige Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  ist

$$\sum_{\substack{ij=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \rightarrow \int d^3r d^3r' \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r d^3r' \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\rho \text{ stetig})$$

Der Beitrag von  $\vec{r} = \vec{r}'$  ist vernachlässigbar

Vereinfachung:  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \phi(\vec{r})$

$$\rho(\vec{r}) = -\epsilon_0 \Delta \phi(\vec{r})$$

$$\Rightarrow U = -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \Delta \phi(\vec{r}) \phi(\vec{r})$$

partielle Integration  
Oberflächenbeitrag  
verschwindet weil  
 $\phi(\infty) = 0$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r (\vec{\nabla} \phi)(\vec{\nabla} \phi)$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \vec{E}^2$$

$\Rightarrow$  Energiedichte der Elektrostatik

$$u(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2(\vec{r})$$

Beispiel: Homogen geladene Kugel

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} & (r \leq R) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r > R) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2(r) d^3r \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{4\pi Q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \left( \int_0^R r^2 \frac{r^2}{R^6} dr + \int_R^\infty r^2 \frac{1}{r^4} dr \right) \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

$$U \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad R \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$  Unendliche Selbstwechselwirkung von Punktladungen

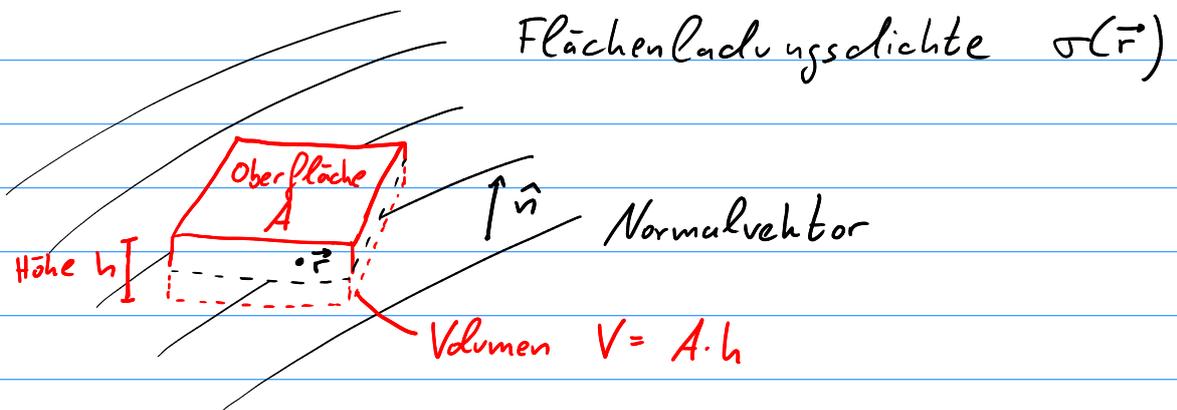
$\hookrightarrow$  Entspricht Beitrag mit  $i=j$  in Summe

Interpretation: Klassische Elektrodynamik verliert Gültigkeit

$\hookrightarrow$  Quantenelektrodynamik (QED)

# 1.5 Grenzflächen

Wie ändert sich das el. Feld an einer geladenen Oberfläche?



Für infinitesimale Umgebung von  $\vec{r}$ :  $\sigma = \text{const}$

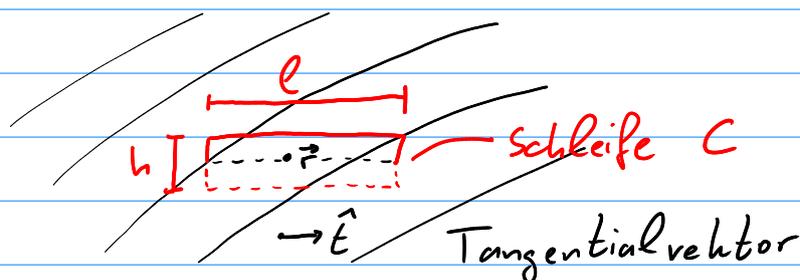
$$\oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d\vec{r} \rho(\vec{r}) = \frac{A}{\epsilon_0} \sigma$$

Für  $h \rightarrow 0$  Fluss durch Seitenflächen vernachlässigbar

$$\Rightarrow \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{E} = A \cdot \hat{n} (\vec{E}_{\text{oben}} - \vec{E}_{\text{unten}})$$

$\Rightarrow$  Sprung in Normalkomponente des E-Feldes:

$$\hat{n} (\vec{E}_{\text{oben}} - \vec{E}_{\text{unten}}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



$$\oint_C d\vec{s} \cdot \vec{E} = \int d\vec{f} (\vec{v} \times \vec{E}) = 0$$

Für  $h \rightarrow 0$ :  $\oint_C d\vec{s} \cdot \vec{E} = L \hat{t} (\vec{E}_{\text{unten}} - \vec{E}_{\text{oben}})$

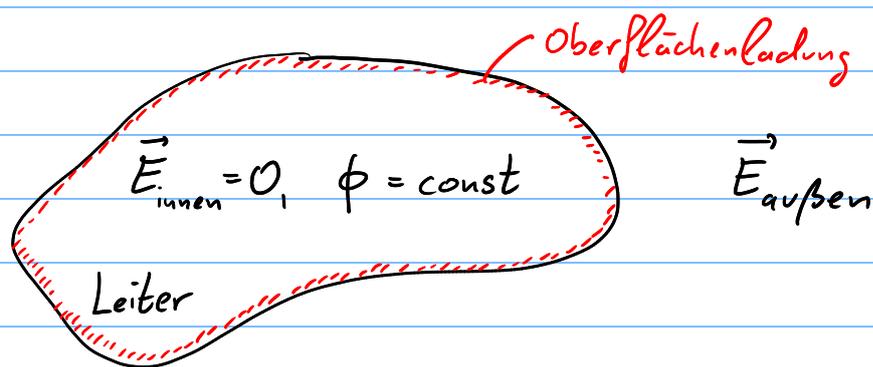
$\Rightarrow$  Tangentialkomponente ist stetig:

$$\hat{t} \cdot \vec{E}_{\text{oben}} = \hat{t} \cdot \vec{E}_{\text{unten}}$$

## 1.5.1 Leiter

In einem el. Leiter können sich Ladungen frei bewegen

$\Rightarrow$  Für statische Lösung muss E-Feld im Leiter verschwinden ( $\phi = \text{const}$ )



Falls  $\vec{E}_{\text{außen}} \neq 0$ , wird eine Oberflächenladung erzeugt.

Dabei gilt:  $\hat{t} \cdot \vec{E}_{\text{außen}} = \hat{t} \cdot \vec{E}_{\text{innen}} = 0$

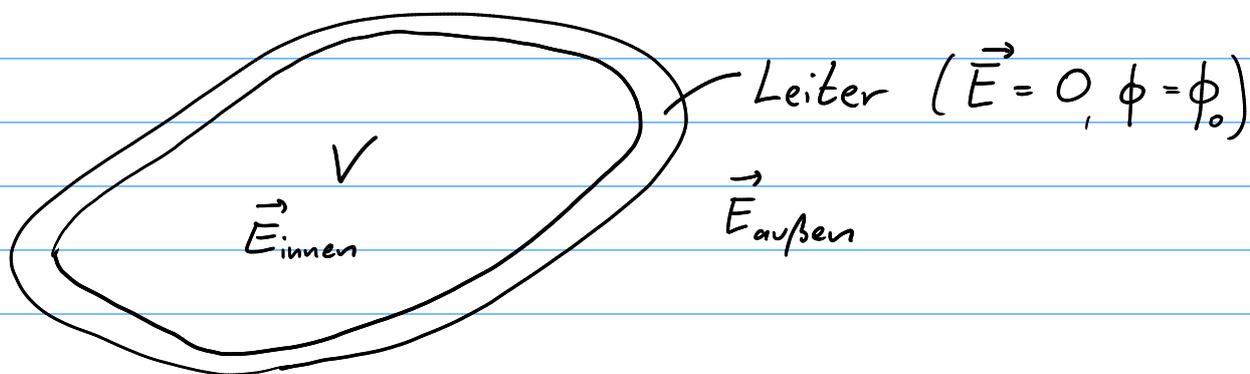
$\Rightarrow \vec{E}_{\text{außen}}$  steht senkrecht auf Oberfläche

$$\hat{n} \cdot (\vec{E}_{\text{außen}} - \vec{E}_{\text{innen}}) = \hat{n} \cdot \vec{E}_{\text{außen}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Im Allgemeinen ist  $\sigma$  unbekannt und muss berechnet werden  $\rightarrow$  nächste Vorlesung

Anwendung: Faraday-Käfig

$\hookrightarrow$  Leiter umschließt Volumen  $V$



Falls  $V$  keine Ladungen enthält, gilt

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 0 \quad \text{für alle } \vec{r} \in V$$

Außerdem ist  $\phi = \phi_0$  für  $\vec{r} \in \partial V$

$\Rightarrow$  Eindeutige Lösung:  $\phi_{\text{innen}} = \phi_0 \Rightarrow \vec{E}_{\text{innen}} = 0$

## 1.6 Randwertprobleme

Bisher: Gegeben  $\rho(\vec{r})$ , gesucht  $\phi(\vec{r})$ ,  $\vec{E}(\vec{r})$

Lösung durch Greens-Funktion

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

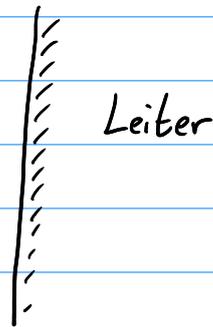
$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Jetzt: Grenzflächen mit unbekannter  
Ladungsdichte

Beispiel:

⊙  
Punktladung

Volumen  $V$



Bekannt:  $\phi = \phi_0$  im Leiter

Gesucht:  $\phi(\vec{r})$  für  $\vec{r} \in V$  mit  $\phi(\vec{r}) = \phi_0$  für  $\vec{r} \in \partial V$

$\Rightarrow$  Randwertproblem

Man unterscheidet:

$\phi$ auf $\partial V$ gegeben:	Dirichlet Randbedingung
$\hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi$ auf $\partial V$ gegeben:	Neumann Randbedingung

(bei mehreren Grenzflächen sind gemischte Randbedingungen möglich)

## 1.6.1 Eindeutigkeitssatz

Gegeben eine Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  für  $\vec{r} \in V$  und eine Randbedingung für  $\vec{r} \in \partial V$ , so ist  $\phi(\vec{r})$  (bis auf eine Konstante) eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien  $\phi_1(\vec{r})$  und  $\phi_2(\vec{r})$  zwei Lösungen mit

$$\Delta \phi_1(\vec{r}) = \Delta \phi_2(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad \text{für } \vec{r} \in V$$

$$\text{und } \underbrace{\phi_1(\vec{r}) = \phi_2(\vec{r})}_{\text{(Dirichlet)}} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{\hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi_1(\vec{r}) = \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi_2(\vec{r})}_{\text{(Neumann)}} \\ \text{für } \vec{r} \in \partial V$$

$$\Rightarrow U = \phi_1 - \phi_2 \quad \text{erfüllt}$$

$$\Delta U = 0 \quad \text{und} \quad U|_{\partial V} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \hat{n} \cdot \vec{\nabla} U|_{\partial V} = 0$$

1. Satz v. Green:

$$\int_V d\vec{r} [(\vec{\nabla}\psi)(\vec{\nabla}\phi) + \psi \Delta\phi] = \int_{\partial V} d\vec{f} \psi \vec{\nabla}\phi$$

Für  $\psi = \phi = u$ :

$$\int_V d\vec{r} [(\vec{\nabla}u)^2 + \underbrace{u \Delta u}_{=0}] = \int_{\partial V} d\vec{f} \underbrace{u \vec{\nabla}u}_{=0}$$

da entweder  $u=0$  oder  
 $\hat{n} \vec{\nabla}u = 0$  auf  $\partial V$

$$\Rightarrow \int d\vec{r} (\vec{\nabla}u)^2 = 0$$

$\Rightarrow \vec{\nabla}u = 0$  für alle  $\vec{r} \in V \Rightarrow u = \text{const}$

## 1.6.2 Formale Lösung

Erinnerung: Die Greens-Funktion der Elektrostatik erfüllt

$$\Delta_r G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

$\Rightarrow$  Lösung nicht eindeutig!

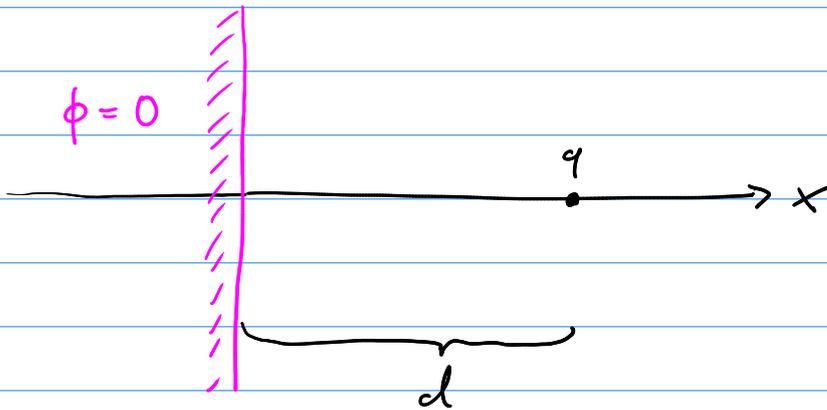
$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}')$$

$$\text{mit } \Delta_r F(\vec{r}, \vec{r}') = 0$$

Idee: Erfüllung der Randbedingung durch geschickte Wahl von  $F(\vec{r}, \vec{r}')$

### 1.6.3 Spiegelladung

Betrachte unendliche leitende Platte in  $y$ - $z$ -Ebene und Punktladung  $q$  bei  $\vec{r}_0 = (d, 0, 0)$



Was ist  $\phi(x, y, z)$  für  $x > 0$  mit  $\phi(0, y, z) = 0$ ?

Allgemeine Lösung:

$$\phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}')$$
$$\uparrow = q \cdot \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0)$$

$$= -\frac{q}{\epsilon_0} G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{q}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_0|} - F(\vec{r}, \vec{r}_0) \right)$$

Für  $F(\vec{r}, \vec{r}_0) = 0$  wird die Randbedingung nicht erfüllt!

Bräuchen  $F(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_0|}$  für  $x = 0$

1. Versuch: Setze  $F(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_0|}$  für  $x \geq 0$

$$\Rightarrow \Delta F(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \stackrel{!}{=} 0$$

↳ Laplace-Gleichung nicht erfüllt

2. Versuch: Für  $\vec{r} = (0, y, z)$  ist

$$|\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{d^2 + y^2 + z^2} = |\vec{r} + \vec{r}_0|$$

$$\Rightarrow \text{Setze } F(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi |\vec{r} + \vec{r}_0|}$$

$$\Rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}_0) = 0 \quad \text{für } \vec{r} = (0, y, z)$$

↳ Randbedingung erfüllt

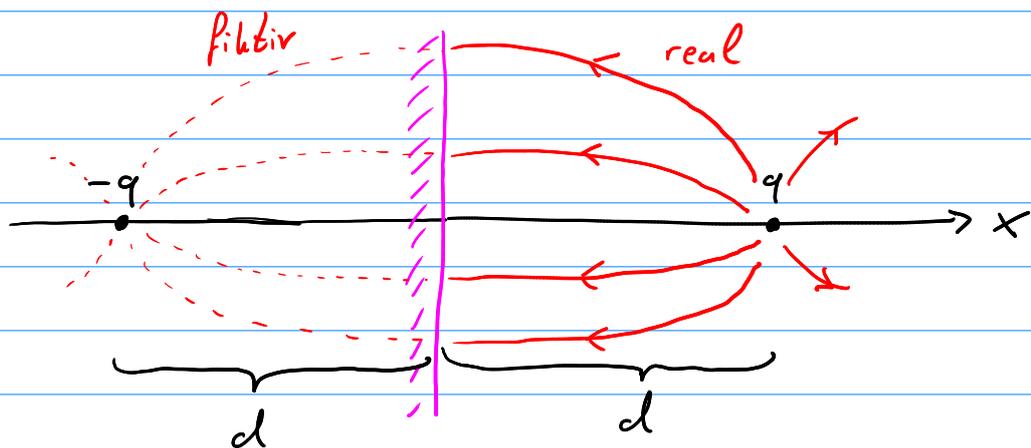
$$\Delta F(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\delta(\vec{r} + \vec{r}_0) = 0 \quad \text{für } x > 0$$

↳ Laplace-Gleichung erfüllt

Die Greens-Funktion für das Randwert-Problem mit einer unendlichen leitenden Platte ist

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \frac{1}{4\pi \sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

=> Für jede Ladung an Position  $(x', y', z')$  wird eine fiktive entgegengesetzte Ladung bei  $(-x', y', z')$  eingeführt



→ Spiegelladung

=>  $\phi(\vec{r})$  entspricht el. Dipol:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

Induzierte Oberflächenladung:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(y,z)}{\epsilon_0} &= \hat{n} \vec{E} = -\hat{n} \vec{\nabla} \phi = \frac{\partial}{\partial x} \phi \Big|_{x=0} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{x-d}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{x+d}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)\end{aligned}$$

Polarhoordinaten  
in  $y$ - $z$ -Ebene  $= -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{(d^2+r^2)^{3/2}}$

Gesamtladung der Oberfläche

$$\begin{aligned}Q &= \int dy dz \sigma(y,z) = \int dq r dr \sigma(r) \\ &= -q \int_0^\infty \frac{d \cdot r}{(d^2+r^2)^{3/2}} dr \\ &= q \left[ \frac{d}{\sqrt{d^2+r^2}} \right]_0^\infty = -q\end{aligned}$$

"Influenzladung"

Induzierte Oberflächenladung erzeugt  $E$ -Feld

$$\vec{E}_{\text{spiegel}} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} + \vec{r}_0}{|\vec{r} + \vec{r}_0|^3}$$

$\Rightarrow$  Kraft auf Punktladung

$$\vec{F}_{\text{spiegel}} = q \cdot \vec{E}_{\text{spiegel}}(\vec{r} = \vec{r}_0) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{e}_x}{4d^2}$$

Kraft von Punktladung auf Oberflächenelement  $dS$ :

$$d\vec{F} = \vec{f} dS$$

$\hat{\uparrow}$  Kraftdichte:  $\vec{f} = \sigma \cdot \vec{E}_{\text{Punktladung}}$

$$= \frac{q}{2\pi} \frac{d}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\hat{e}_x}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{F}_{\text{Punktladung}} = \int d\vec{F} = \int \vec{f} dS$$

$$= \frac{q^2 d^2 \hat{e}_x}{8\pi^2 \epsilon_0} \int \frac{dy ds ds}{(d^2 + s^2)^3}$$

$$= \frac{q^2 d^2 \hat{e}_x}{4\pi \epsilon_0} \left[ -\frac{1}{4} \frac{1}{(d^2 + s^2)^2} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{q^2 d^2 \hat{e}_x}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{4d^4} = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{\hat{e}_x}{4d^2}$$

Wie erwartet:  $\vec{F}_{\text{Punktladung}} = -\vec{F}_{\text{spiegel}}$

## 1.6.4 Separationsmethode

Letzte Vorlesung: Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

für gegebene Randbedingungen  
mit Hilfe einer Greens-Funktion

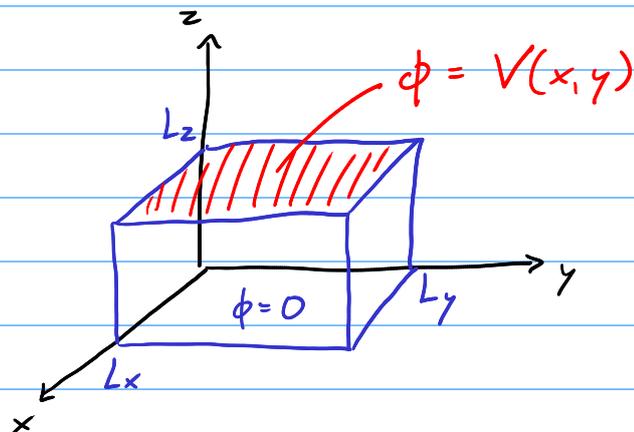
$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}')$$

$$\text{mit } \Delta_r F(\vec{r}, \vec{r}') = 0$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}')$$

Wie geht man vor, wenn  $\rho(\vec{r}')$  unbekannt ist?

Beispiel 1: Quaderförmiges Volumen



Alle Seitenwände bis auf eine haben  $\phi = 0$

Keine Ladungen im Inneren

Innerhalb des Quaders gilt  $\Delta\phi = 0$   
(Laplace-Gleichung)

Ansatz:  $\phi = \phi_x(x) \cdot \phi_y(y) \cdot \phi_z(z)$

(Separationsansatz)

$$\Rightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_x(x) \right) \phi_y(y) \phi_z(z) + \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi_y(y) \right) \phi_x(x) \phi_z(z) + \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi_z(z) \right) \phi_x(x) \phi_y(y) = 0$$

Geteilt durch  $\phi$ :

$$\frac{\phi_x''(x)}{\phi_x(x)} + \frac{\phi_y''(y)}{\phi_y(y)} + \frac{\phi_z''(z)}{\phi_z(z)} = 0$$

↑ unabhängig von  $y, z$

Nur erfüllbar falls  $\frac{\phi_x''(x)}{\phi_x(x)} = \text{const} = C_x^2$  etc.

mit  $C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 = 0$

↑ komplex

Allgemeine Lösung:  $\phi_x(x) = \phi^+ e^{C_x x} + \phi^- e^{-C_x x}$

(analog für  $y$  und  $z$ )

$$\phi_x(0) = 0 \Rightarrow \phi^+ = -\phi^-$$

$$\phi_x(L_x) = 0 \Rightarrow e^{C_x L_x} - e^{-C_x L_x} = 0$$

$$\Rightarrow C_x = i \frac{n\pi}{L_x} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \phi_x(x) \sim \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right)$$

Analog:  $\phi_y(y) \sim \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right)$  mit  $m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \left(i \frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(i \frac{m\pi}{L_y}\right)^2 + C_z^2 = 0$$

$$\Rightarrow C_z = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \phi_z(z) = \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2} z\right)$$

Allgemeine Lösung durch Linearcombination

$$\phi(x, y, z) = \sum_{n, m=1}^{\infty} d_{n, m} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2} z\right)$$

Bestimmung der Koeffizienten  $d_{n, m}$  durch Randbedingung:

$$\phi(x, y, L_z) = V(x, y)$$

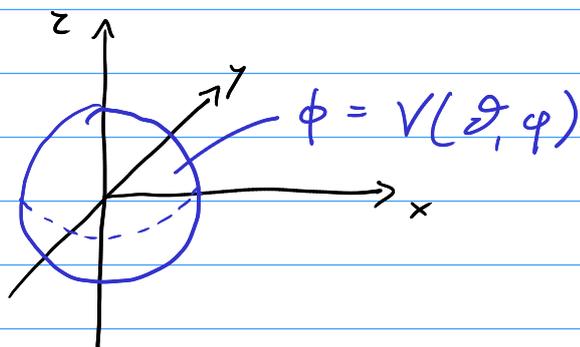
$$\Rightarrow \int \phi(x, y, L_z) \sin\left(\frac{n'\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m'\pi y}{L_y}\right) dx dy = \int V(x, y) \sin\left(\frac{n'\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m'\pi y}{L_y}\right) dx dy$$

Nutze Orthogonalitätsrelation:

$$\int_0^{L_x} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n'\pi x}{L_x}\right) dx = \begin{cases} L_x/2 & \text{für } n=n' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow d_{n, m} = \frac{4}{L_x L_y} \frac{1}{\sinh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2} L_z\right)} \int_0^{L_y} dy \int_0^{L_x} dx V(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right)$$

Beispiel 2: Hohlkugel mit Radius  $R$



Laplace-Operator in Kugelkoordinaten:

$$\Delta \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \phi) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

Separationsansatz:  $\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{U(r)}{r} P(\cos \vartheta) Q(\varphi)$   
Konvention!

$$\Rightarrow \frac{PQ}{r} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{UQ}{r^3 \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) + \frac{UP}{r^3 \sin^2 \vartheta} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0$$

Multiplikation mit  $\frac{r^3}{UPQ}$ :

$$\Rightarrow \frac{r^2}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{P \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) + \frac{1}{Q \sin^2 \vartheta} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0$$

Funktion von  $r$

Funktion von  $\vartheta, \varphi$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} = \text{const} = \lambda$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) + \frac{1}{Q \sin^2 \vartheta} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -\lambda$$

$$\begin{aligned} \cdot \sin^2 \vartheta \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{\sin \vartheta}{P} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) + \lambda \sin^2 \vartheta}_{\text{Funktion von } \vartheta} + \underbrace{\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2}}_{\text{Funktion von } \varphi} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = \text{const} = -m^2$$

$$\frac{\sin \vartheta}{P} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) + \lambda \sin^2 \vartheta = m^2$$

Für zylindersymmetrische Probleme:  $Q(\varphi) = \text{const}$   
 $\Rightarrow m = 0$

Variablentransformation:  $x = \cos \vartheta \Rightarrow \frac{dx}{d\vartheta} = -\sin \vartheta$   
 $\Rightarrow \frac{d}{d\vartheta} = -\sin \vartheta \frac{d}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{1-x^2}{P(x)} \frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dP(x)}{dx} \right) + \lambda (1-x^2) = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2) P'' - 2x P' + \lambda P = 0$$

↳ DGL für Legendre - Polynome

↳ Lösung auf  $x \in [-1, 1]$  existiert nur falls  $\lambda = \ell(\ell+1)$  mit  $\ell \in \mathbb{N}$

↳ Die zugehörige Lösung  $P_\ell(x)$  ist ein Polynom  $\ell$ -ter Ordnung

Beispiele:

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

Wichtige Eigenschaften:

$$\cdot P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x)$$

$$\cdot P_\ell(1) = 1$$

$$\cdot \int_{-1}^1 dx P_\ell(x) P_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}$$

Legendre-Polynome sind vollständig auf  $[-1, 1]$

⇒ Jede Funktion  $f(x)$  kann geschrieben werden als

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell P_\ell(x)$$

Zurück zu  $U(r)$ :

$$\frac{r^2}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} = \lambda = \ell(\ell+1) \quad \text{mit } \ell \in \mathbb{N}$$

Ansatz:  $U(r) = r^k$

$$\Rightarrow k(k-1)r^{k-2} = \ell(\ell+1)r^{k-2}$$

$$\Rightarrow k = \ell+1 \quad \text{oder} \quad k = -\ell$$

$$\Rightarrow U(r) = A_\ell r^{\ell+1} + B_\ell r^{-\ell}$$

Allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung für zylindrische Symmetrie ( $\Omega(\varphi) = \text{const}$ ):

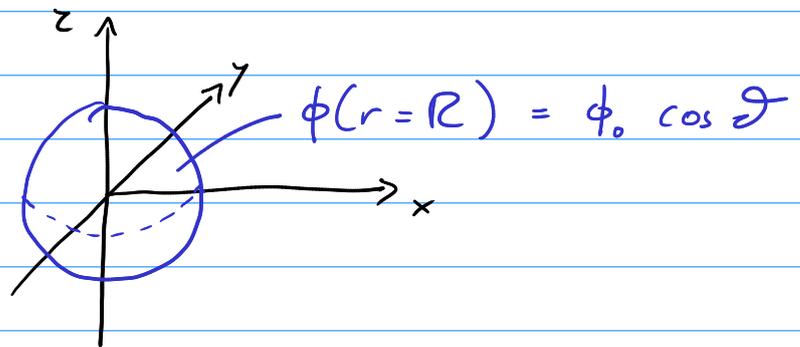
$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1}) P_\ell(\cos \vartheta)$$

# 1.7 Kugelflächenfunktionen

Allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung für zylindrische Symmetrie ( $\partial(\varphi) = \text{const}$ ):

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-\ell-1}) P_{\ell}(\cos \vartheta)$$

Beispiel: Hohlkugel mit Radius  $R$



Keine Ladung im Ursprung

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \phi(r, \vartheta) \text{ endlich}$$

$$\Rightarrow B_{\ell} = 0 \text{ für alle } \ell$$

$$\Rightarrow \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} R^{\ell} P_{\ell}(\cos \vartheta) = \phi_0 \cos \vartheta$$

Nutze Orthogonalität:  $A_{\ell} R^{\ell} = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 dx P_{\ell}(x) \phi_0 x$   
 $\uparrow$   
 $x = \cos \vartheta$

$$P_1(x) = x \quad \Rightarrow \quad A_1 \cdot R = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 dx x^2 \phi_0 = \phi_0$$

$$A_\ell = 0 \quad \text{für} \quad \ell \neq 1$$

$$\Rightarrow \quad \phi(r, \vartheta) = \frac{\phi_0}{R} \cdot r \cdot \cos \vartheta = \phi_0 \frac{z}{R}$$

Für Probleme ohne zylindrische Symmetrie gilt

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{U(r)}{r} P(\cos \vartheta) Q(\varphi)$$

$$\text{mit} \quad \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = \text{const} = -m^2$$

$$\frac{\sin \vartheta}{P} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) + \lambda \sin^2 \vartheta = m^2$$

$$\Rightarrow \quad Q(\varphi) \sim e^{im\varphi}$$

$$\text{Periodizität:} \quad Q(\varphi + 2\pi) = Q(\varphi)$$

$$\Rightarrow e^{2\pi im} = 1$$

$$\Rightarrow m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P(x) = 0$$

Lösung: Assoziierte Legendre - Polynome

$$\text{Für } m > 0: P_e^{(m)}(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_e(x)$$

$$\text{Für } m < 0: P_e^{(m)}(x) = (-1)^{-m} \frac{(e+m)!}{(e-m)!} P_e^{(m)}(x)$$

$\Rightarrow$  Lösung existiert nur für  $|m| \leq e$

Beispiele:  $\cdot P_1^{(0)}(x) = P_1(x) = x$

$$\cdot P_1^{(1)}(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

$$\cdot P_1^{(-1)}(x) = \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2}$$

$\Rightarrow$  Allgemeine Lösung der Laplace - Gleichung:

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1}) P_l^{(m)}(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

Definition:  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^{(m)}(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$

(Kugelflächenfunktionen)

$$\Rightarrow \phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (a_{lm} r^l + b_{lm} r^{-l-1}) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Eigenschaften der  $Y_{\ell m}$ :

- Erfüllen die DGL

$$\Delta_{\vartheta\varphi} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) + \ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = 0$$

$$\text{mit } \Delta_{\vartheta\varphi} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

- $Y_{\ell, -m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{\ell m}^*(\vartheta, \varphi)$

- Orthogonales Funktionensystem auf Einheitskugel:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta Y_{\ell' m'}^*(\vartheta, \varphi) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

- Vollständigkeit:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \delta(\cos \vartheta' - \cos \vartheta) \delta(\varphi' - \varphi)$$

$\Rightarrow$  Jede Funktion  $f(\vartheta, \varphi)$  auf Einheitskugel kann geschrieben werden als

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{\ell m} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$$

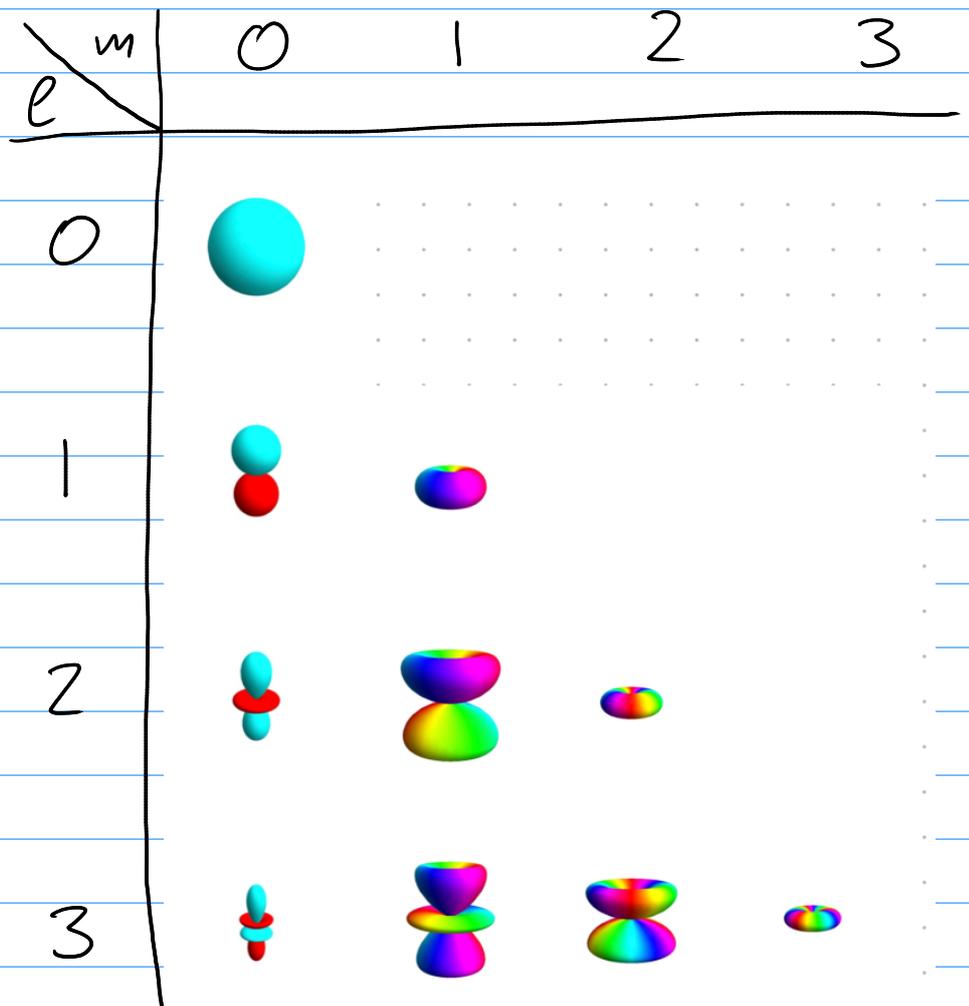
mit

$$C_{em} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta f(\vartheta, \varphi) Y_{em}^*(\vartheta, \varphi)$$

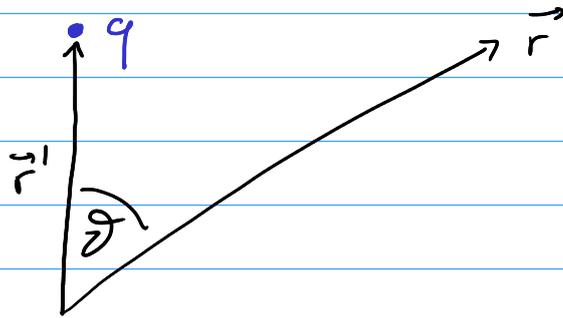
Beispiele:  $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta \quad Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta e^{\pm i\varphi}$$

Illustration: Abstand vom Ursprung = Betrag  
Farbe = Phase



Anwendung: Potential einer Punktladung



Vereinfachende Annahme:  $\vec{r}' \parallel \hat{e}_z$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \phi(r, \vartheta)$$

Für  $\vec{r} \neq \vec{r}'$ :  $\Delta\phi = 0$

$$\Rightarrow \phi(r, \vartheta) \Big|_{\vec{r} \neq \vec{r}'} = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) Y_{l0}(\vartheta, \varphi)$$

$\uparrow$   
 $= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\vartheta)$

Für  $\vartheta = 0$  gilt  $P_l(\cos\vartheta) = 1$  für alle  $l$

$$\Rightarrow \phi(r, 0) \Big|_{r \neq r'} = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$$

Vergleich mit bekannter Lösung:

$$\phi(r, \vartheta) \Big|_{r \neq r'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{r-r'} & \text{für } r > r' \\ \frac{1}{r'-r} & \text{für } r < r' \end{cases}$$

Trick:  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  (Geometrische Reihe)

$$\Rightarrow \phi(r, \vartheta) \Big|_{r \neq r'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} & \text{für } r > r' \\ \frac{1}{r'} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^{\ell} & \text{für } r' < r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Für } r > r': A_{\ell} = 0, \quad B_{\ell} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} r'^{\ell}$$

$$\text{Für } r < r': B_{\ell} = 0, \quad A_{\ell} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'^{\ell+1}}$$

$$\Rightarrow \phi(r, \vartheta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \vartheta) & \text{für } r > r' \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r^{\ell}}{r'^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \vartheta) & \text{für } r < r' \end{cases}$$

## 1.8 Multipolentwicklung

Wiederholung: Potential  $\phi(\vec{r})$  einer Punktladung  $q$  am Ort  $\vec{r}'$  entlang der  $z$ -Achse

$$\phi(r, \vartheta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\vartheta) & \text{für } r > r' \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r'^{l+1}} P_l(\cos\vartheta) & \text{für } r < r' \end{cases}$$

Verallgemeinerung für beliebiges  $\vec{r}'$  mit  $r > r'$

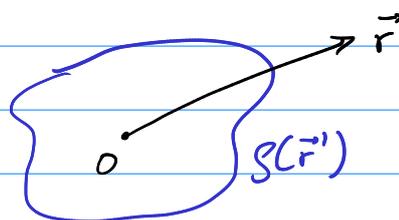
$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Potential kann nur vom Winkel  $\gamma$  zwischen  $\vec{r}$  und  $\vec{r}'$  abhängen!

$$\frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = P_l(\cos\gamma)$$

(Additionstheorem)

Superpositionsprinzip: Betrachte Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}')$  mit  $\rho(\vec{r}') = 0$  für  $r' > r$



$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{q_{\ell m}}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \end{aligned}$$

mit

$$q_{\ell m} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') r'^{\ell} Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi')$$

sphärische Multipolmomente

Für  $r \rightarrow \infty$  verschwindet der Beitrag von  $q_{\ell m}$  zum Potential proportional zu  $r^{-\ell-1}$

→ Beiträge mit kleinem  $\ell$  dominieren

$$\begin{aligned} q_{00} &= \int d^3r' \rho(\vec{r}') \underbrace{r'^0 Y_{00}^*(\vartheta', \varphi')}_{= 1/\sqrt{4\pi}} \\ &= \frac{q}{\sqrt{4\pi}} \end{aligned}$$

⇒  $q_{00}$  entspricht der Gesamtladung

↳ Aus großer Entfernung verhält sich  $\rho(\vec{r}')$  wie eine Punktladung

Betrachte zwei entgegengesetzte Punktladungen  $\pm q$  an den Orten  $(0, 0, \pm \frac{d}{2})$

$$\Rightarrow g(\vec{r}') = q \delta(x) \delta(y) \delta(z - \frac{d}{2}) - q \delta(x) \delta(y) \delta(z + \frac{d}{2})$$

$$\Rightarrow q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (q - q) = 0$$

Höhere Ordnung:

$$q_{10} = \int d^3 r' g(\vec{r}') \sqrt{\frac{3}{4\pi}} r' \cos \vartheta'$$

$$= \int d^3 r' g(\vec{r}') \sqrt{\frac{3}{4\pi}} z' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z$$

$$\uparrow \int d^3 r' g(\vec{r}') z'$$

Zwei Punktladungen:  $p_z = q \frac{d}{2} - q \cdot (-\frac{d}{2}) = q \cdot d$

↳ Dipolmoment

$$q_{11} = q_{1,-1}^* = \int d^3 r' g(\vec{r}') r' \left( -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta' e^{-i\varphi'} \right)$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - i p_y)$$

= 0 für Punktladungen auf z-Achse

$$\phi(\vec{r})_{\epsilon \leq 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( 0 + \frac{4\pi}{3} \frac{q_{10}}{r^2} Y_{10}(\vartheta, \varphi) \right)$$

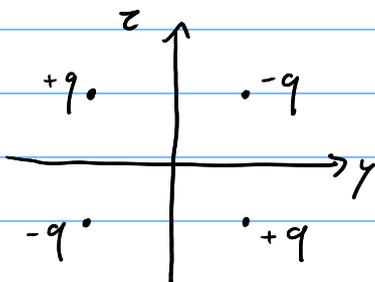
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{p_z}{r^2} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r})_{\epsilon \leq 1} = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r})_{\epsilon \leq 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3\vec{r}(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right)$$

↳ siehe Vorlesung 2

Betrachte vier Punktladungen:



$$\Rightarrow q_{00} = q_{10} = q_{11} = q_{1,-1} = 0$$

⇒ Führender Beitrag durch  $q_{2m}$

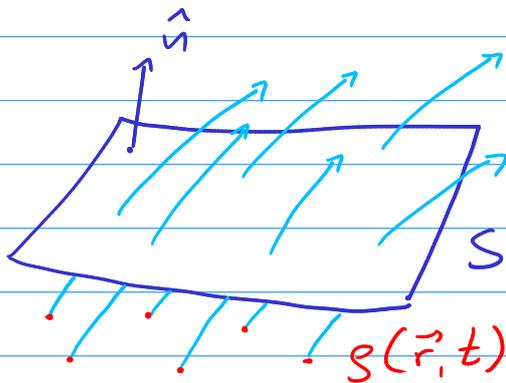
↳ Quadrupolmoment

## 2. Bewegte Ladungen

Bisher: Statische Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$

Jetzt: Zeitabhängigkeit  $\rho(\vec{r}, t)$

Ladungserhaltung  $\Rightarrow$  Zeitabhängigkeit durch bewegte Ladungen mit Geschwindigkeit  $\vec{v}(\vec{r}, t)$



Verschiebung einer Ladung relativ zur Oberfläche in Zeit  $dt$ :

$$dx = \hat{n} \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) dt$$

Ladungsfluss durch Fläche  $S$  in Zeit  $dt$ :

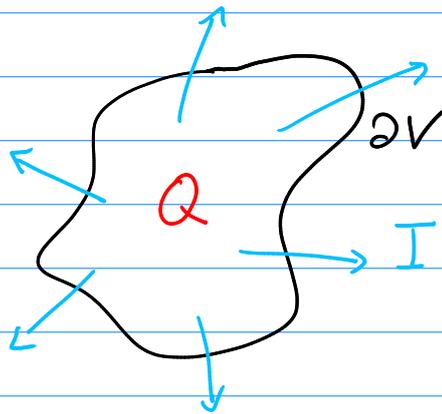
$$\begin{aligned} dQ &= \int_S d\vec{f} \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) \rho(\vec{r}, t) dt \\ &= \int_S d\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) dt \end{aligned}$$

mit  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t) \rho(\vec{r}, t)$  (Stromdichte)

=> Strom durch Fläche

$$\bar{I} = \frac{dQ}{dt} = \int_S d\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)$$

Betrachte geschlossene Fläche  $S = \partial V$



Ladungserhaltung: Gesamtladung  $Q$  in  $V$   
kann sich nur durch  
Strom durch  $\partial V$  ändern

Änderung im Volumen:

$$dQ_V = \int_V dV (\rho(\vec{r}, t+dt) - \rho(\vec{r}, t))$$

$$= \int_V dV \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) dt$$

Fluss durch Oberfläche

$$dQ_S = I dt = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) dt$$

$$dQ_v = -dQ_s$$

$$\Rightarrow \int_V dV \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) = - \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)$$

Satz von Gauß:

$$\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) dV$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$$

(Kontinuitätsgleichung)

Magnetostatik:  $\rho(\vec{r})$  und  $v(\vec{r})$  zeitunabhängig

$$\Rightarrow j(\vec{r}) \text{ zeitunabhängig und } \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0$$

Beispiel: Dünner Draht entlang z-Achse  
mit Linienladungsdichte  $\lambda$  und  
 $\vec{v}(\vec{r}) = v \hat{e}_z$

$$\rho(\vec{r}) = \lambda \delta(x) \delta(y)$$

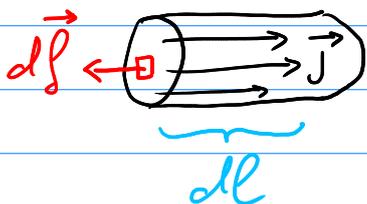
$$\vec{j}(\vec{r}) = I \hat{e}_z \delta(x) \delta(y) \quad \text{mit} \quad I = \lambda \cdot v$$

## 2.1 Magnetostatik

Elektrostatik: Ladungsdichte  $\rightarrow$  E-Feld  $\rightarrow$  Coulomb-Kraft

Magnetostatik: Stromdichte  $\rightarrow$  B-Feld  $\rightarrow$  Lorentz-Kraft

Betrachte dünnen Draht in Richtung  $\hat{e}$  mit Strom  $I$



$$\begin{aligned} \int dV \vec{j} &= \int d\vec{l} d\vec{j} \\ &= \int (d\vec{l} \cdot \vec{j}) d\vec{l} \\ &= \int I d\vec{l} \end{aligned}$$

↖ Linienintegral

Kraft auf Drahtelement  $d\vec{l}$

$$d\vec{F} \sim I, \quad dF \sim dl, \quad d\vec{F} \perp \hat{e}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\vec{F} &= I \hat{e} \times \vec{B} dl = I d\vec{l} \times \vec{B} \\ &= dV \vec{j} \times \vec{B} = dq \vec{v} \times \vec{B} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{Lorentz}} = q (\underbrace{\vec{E}}_{\text{Coulomb-Kraft}} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Die Lorentz-Kraft dient zur Definition von  $\vec{B}$  (Magnetfeld od. magnetische Induktion)

$$[B] = \left[ \frac{E}{v} \right] = \left[ \frac{F}{q \cdot v} \right] = \frac{N \cdot s}{C \cdot m} \quad (\text{SI-Einheiten})$$

Für Punktladung im Magnetfeld gilt

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_{\text{Lorentz}} = q \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{v}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{v}^2 = 2 \vec{v} \cdot \vec{a} = 0$$

↳ B-Feld ändert Richtung von  $\vec{v}$   
aber nicht  $|\vec{v}|$

$$\Rightarrow W = \int \vec{F}_{\text{Lorentz}} \cdot d\vec{l} = \int m \vec{a} \cdot \vec{v} dt = 0$$

↳ B-Feld verrichtet keine Arbeit

## 2.2 Vektorpotential

$$\text{Es gilt } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

↳ B-Feld ist divergenzfrei

↳ Feldlinien sind geschlossene Kurven

↳ Es gibt keine magn. Quellen oder Senken  
(keine magnetischen Monopole)

↳ Der magn. Fluss  $\Phi_m$  durch eine geschlossene Oberfläche  $\partial V$  verschwindet:

$$\int_{\partial V} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$\Leftrightarrow$  Es existiert ein Vektorpotential  $\vec{A}$  mit

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$\vec{A}$  ist nicht eindeutig bestimmt. Betrachte

$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$  für beliebige Funktion  $\chi(\vec{r})$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \chi}_{=0} = \vec{B}$$

Die Freiheit der Wahl von  $\chi(\vec{r})$  heißt Eichfreiheit.

Die physikalische Größe  $\vec{B}$  ist eichinvariant.

Man kann  $\chi(\vec{r})$  so wählen, dass  $\vec{A}(\vec{r})$  besonders einfach wird ("Eichung")

Beispiel: Angenommen  $\Psi(\vec{r}) := \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \neq 0$

Dann existiert  $\chi(\vec{r})$  so dass  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$

Beweis:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla} \chi) = \Psi + \Delta \chi$

Wähle  $\chi$  als Lösung der

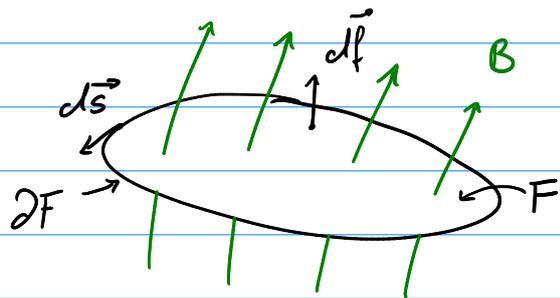
Poisson-Gleichung  $\Delta \chi = -\psi$

$$\text{i.e. } \chi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\psi(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$$

Diese Wahl von  $\chi$  heißt Coulomb-Eichung

Betrachte magnetischen Fluss  $\phi_m$  durch offene Oberfläche:



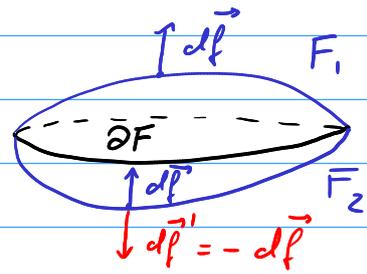
$$\phi_m = \int_F d\vec{l} \cdot \vec{B} = \int_F d\vec{l} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \oint_{\partial F} d\vec{s} \cdot \vec{A}$$

$\phi_m$  ist eichinvariant, da für  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$

$$\oint_{\partial F} d\vec{s} \cdot \vec{A}' = \int_{\partial F} d\vec{s} \cdot \vec{A} + \underbrace{\int_{\partial F} d\vec{s} \cdot \vec{\nabla} \chi}_{=0} = \phi_m$$

Bemerkung:  $\phi_m$  hängt nur von  $\partial F$  ab,  
nicht von  $F$

Beweis: Betrachte zwei  
Flächen  $F_1$  und  $F_2$   
mit gleichem  
Rand  $\partial F$



$$\begin{aligned} \phi_{m1} - \phi_{m2} &= \int_{F_1} d\vec{f} \cdot \vec{B} - \int_{F_2} d\vec{f} \cdot \vec{B} \\ &= \oint_{F_1 + F_2} d\vec{f} \cdot \vec{B} = - \int_{F_2} d\vec{f}' \cdot \vec{B} \\ &= \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{aligned}$$

↑  
eingeschl. Volumen zw.  $F_1$  und  $F_2$

## Ampère - Gesetz

Eine Stromdichte  $\vec{j}$  erzeugt ein  $B$ -Feld mit

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

↑  
Permeabilität des Vakuums

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$$

Betrachte Fläche  $F$  mit Rand  $\partial F$

$$\oint_{\partial F} d\vec{s} \cdot \vec{B} = \int_F d\vec{f} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \underbrace{\int_F d\vec{f} \cdot \vec{j}}_{=I}$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial F} d\vec{s} \cdot \vec{B} = \mu_0 I$$

Ampère - Gesetz in Integralform

Verwende  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\Rightarrow \mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

In Coulomb - Eichung:  $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$

↳ Poisson - Gleichung für Vektorfelder

Lösung:  $\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$

Konsistenztest:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \int d^3\vec{r}' \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$

Nutze  $\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\begin{aligned} \text{partielle} \\ \text{Integration} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \vec{r}' \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{j}(\vec{r}')}_{=0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \vec{r}' \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \varepsilon_{ijk} \partial_i \frac{j_j(\vec{r}')}{\sqrt{(x_e - x'_e)(x_e - x'_e)}} \hat{e}_k$$

$$= \varepsilon_{ijk} j_j(\vec{r}') \hat{e}_k \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \underbrace{\partial_i (x_e - x'_e)(x_e - x'_e)}_{= 2(x_e - x'_e) \delta_{ie}}$$

$$= - \varepsilon_{ijk} (x_i - x'_i) j_j(\vec{r}') \hat{e}_k \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$= - \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

(Biot-Savart Gesetz)

## 2.3 Beispiele

Beispiel 1: Unendlicher Draht entlang z-Achse

$$\vec{j}(\vec{r}) = I \delta(x) \delta(y) \hat{e}_z$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz' I \frac{\hat{e}_z \times (\vec{r} - z' \hat{e}_z)}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad \hat{e}_z \times \hat{e}_z = 0$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I \hat{e}_z \times \vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

Substitution:  $t = \frac{z' - z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow dt = \frac{dz'}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

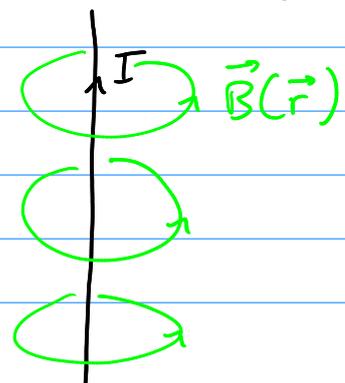
$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\hat{e}_z \times \vec{r}}{x^2 + y^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{(1 + t^2)^{3/2}}}_{= \left[ \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = 2}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

In Zylinderkoordinaten:  $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\hat{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{\hat{e}_\varphi}{s}$$

↳ Rechte-Hand-Regel

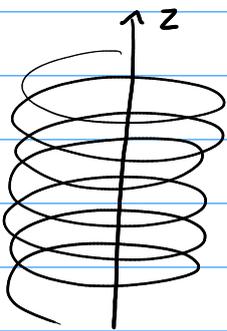


Betrachte zweiten Draht mit Abstand  $d$   
und Strom  $I_2$

$$\begin{aligned}d\vec{F}_{12} &= I_2 d\vec{\ell} \times \vec{B}(x=d, y=0, z) \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 \cdot I_2 \cdot \frac{dz \vec{e}_z \times \vec{e}_y}{d} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \hat{e}_x dz\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Drähte ziehen sich an für  $I_1 \cdot I_2 > 0$

Beispiel 2: Unendlich lange Spule



$N_w$  Windungen pro Länge  $ds$   
mit Strom  $I$

Näherung:  $N_w$  geschlossene Kreise  
mit  $s=R, z = \text{const}$

$$\Rightarrow \vec{j}(\vec{r}) = \frac{N_w I}{ds} \delta(s-R) \hat{e}_\varphi$$

Zylindersymmetrie:  $\vec{A} \perp \hat{e}_z, \vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(s)$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = f_s(s) \hat{e}_s + f_\varphi(s) \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s f_s(s)) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_s = \frac{c}{s}$$

Keine Singularität bei  $s=0 \Rightarrow c=0$

$$\Delta \vec{A} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s f_\varphi(s)) \right) \hat{e}_\varphi = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s f_\varphi) \right) = - \frac{\mu_0 N_w I}{ds} \delta(s-R)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s f_\varphi) = - \frac{\mu_0 N_w I}{ds} [\theta(s-R) + c_1]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} (s f_\varphi) = - \frac{\mu_0 N_w I}{ds} [s \theta(s-R) + s c_1]$$

$$\Rightarrow s f_\varphi = - \frac{\mu_0 N_w I}{ds} \left[ \frac{1}{2} (s^2 - R^2) \theta(s-R) + \frac{1}{2} c_1 s^2 + c_2 \right]$$

Keine Singularität bei  $s=0 \Rightarrow c_2=0$

$f_\varphi \rightarrow 0$  für  $s \rightarrow \infty \Rightarrow c_1 = -1$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 N_w I}{ds} \hat{e}_\varphi \cdot \begin{cases} s/2 & s \leq R \\ R^2/2s & s > R \end{cases}$$

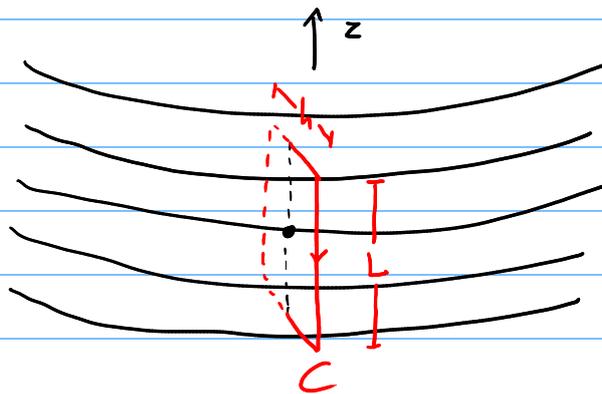
$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s f_{\varphi}(s)) \hat{e}_s \times \hat{e}_{\varphi}$$

$$= \hat{e}_z \times \begin{cases} \frac{\mu_0 N_w I}{ds} & s \leq R \\ 0 & s > R \end{cases}$$

⇒ Konst. B-Feld innerhalb der Spule  
Kein B-Feld außerhalb der Spule

Kommentar: Tangentialkomponente von B-Feld  
unstetig an Grenzfläche

Betrachte Schleife C um Punkt  $\vec{r}$  auf  
der Spule



$$\oint_C d\vec{s} \cdot \vec{B} = \int d\vec{f} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \int d\vec{f} \cdot \vec{j}$$

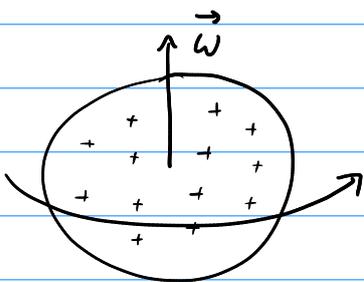
$$\Rightarrow (B_{z,\text{innen}} - B_{z,\text{außen}}) L = \mu_0 I N_w \frac{L}{ds}$$

$$\Rightarrow B_{z,\text{innen}} - B_{z,\text{außen}} = \frac{\mu_0 N_w I}{ds}$$

Aus  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  folgt, dass die Normalkomponente an der Grenzfläche stetig ist:

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_{\text{innen}} - \vec{B}_{\text{außen}}) = 0$$

Beispiel 3: Rotierende Kugel



Homogen geladene Kugel mit Radius  $R$ :

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 \Theta(R - r)$$

$$\text{mit } \rho_0 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\text{Winkelgeschw. } \vec{\omega} \Rightarrow \vec{j}(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}) \rho(\vec{r})$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{r} \rho(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{K}(\vec{r})$$

$$\text{mit } \vec{K}(\vec{r}) = \int_{r' \leq R} d^3 r' \frac{\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Aus Symmetriegründen ist  $\vec{K}(\vec{r}) \parallel \vec{r}$

$$\Rightarrow \vec{K}(\vec{r}) = K_r(\vec{r}) \hat{e}_r \quad \text{mit}$$

$$K_r(\vec{r}) = \int_{r' \leq R} d^3 r' \frac{\vec{r}' \cdot \hat{e}_r}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Wähle Koordinatensystem für  $\vec{r}'$  so dass  $\hat{e}_r \parallel \hat{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{r}' \cdot \hat{e}_r = r' \cos \vartheta' = \underline{r' P_1(\cos \vartheta')} \quad \leftarrow \text{Legendre-Polynom}$$

Außerdem gilt für  $r > R$  (Außenraum):

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{e=0}^{\infty} \frac{r'^e}{r^{e+1}} P_e(\cos \vartheta')$$

$$\Rightarrow K_r(\vec{r}) = \int_0^R r'^2 dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 d\cos \vartheta' \sum_{e=0}^{\infty} \frac{r'^{e+1}}{r^{e+1}} P_1(\cos \vartheta') P_e(\cos \vartheta')$$

$r' \cdot r'^e = r'^{e+1}$

$$= 2\pi \int r'^2 dr' \sum_{e=0}^{\infty} \frac{r'^{e+1}}{r^{e+1}} \frac{2\delta_{e1}}{2e+1}$$

$$= \frac{4\pi}{3r^2} \int r'^4 dr' = \frac{4\pi}{15r^2} R^5$$

$$\Rightarrow \vec{K}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{15} \frac{R^5}{r^3} \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \epsilon_0 R^5}{15} \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \left( \vec{\omega} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) &= \epsilon_{ijk} \partial_i \epsilon_{jlm} \omega_l \frac{x_m}{(x_n x_n)^{3/2}} \hat{e}_k \\ &= \left( \delta_{ke} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{ie} \right) \omega_l \underbrace{\partial_i \frac{x_m}{(x_n x_n)^{3/2}}}_{\substack{= \frac{\delta_{im}}{(x_n x_n)^{3/2}} - \frac{3 x_m x_i}{(x_n x_n)^{5/2}}} } \hat{e}_k \end{aligned}$$

$$= \vec{\omega} \left( \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right) - \omega_i \left( \frac{\delta_{ik}}{r^3} - \frac{3 x_k x_i}{r^5} \right) \hat{e}_k$$

$$= \frac{3(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\omega}}{r^3}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3} \quad \text{mit} \quad \vec{M} = \frac{\mu_0 \rho_0 R^5 \vec{\omega}}{15}$$

magn. Dipolmoment

Zum Vergleich: Rotierende Kugel mit Massendichte  $\rho_m$  hat Drehimpuls

$$\vec{L} = \frac{8\pi}{15} \rho_m R^5 \vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{\rho_0}{\rho_m} \vec{L} = \underbrace{\frac{\mu_0}{8\pi} \frac{Q}{M}}_{\text{gyromagn. Verhältnis}} \vec{L}$$

gyromagn. Verhältnis

## 2.4 Magnetischer Dipol

Wiederholung: Rotierende homogen geladene Kugel

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3} \quad \text{für } r > R$$

$$\text{mit } \vec{M} = \frac{\mu_0 \rho_0}{15} R^5 \vec{\omega}$$

Allgemeiner Fall: Betrachte räumlich begrenzte Stromverteilung:

$$\vec{j}(\vec{r}) = 0 \quad \text{für } r \geq R$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Taylor - Entwicklung:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + x'_i \underbrace{\partial'_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{\vec{r}'=0} + \dots$$

$$= -\partial'_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Big|_{\vec{r}'=0} = -\partial'_i \frac{1}{r} = \frac{x'_i}{r^3}$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{x'_i x'_i}{r^3} + \dots$$

Erster Term:  $\vec{A}^{(0)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') = 0$

Beweis: Seien  $f(\vec{r})$  und  $g(\vec{r})$  zwei beliebige Funktionen

$$\vec{\nabla}(f g \vec{j}) = f \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g + g \vec{j} \cdot \vec{\nabla} f + f g \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}}_{=0}$$

$$\int_V d^3 r \vec{\nabla}(f g \vec{j}) = \oint_{\partial V} d\vec{l} \cdot (f g \vec{j}) = 0$$

↑ Kugel mit Radius R ↑  $\vec{j} = 0$  für  $r = R$

$$\Rightarrow \int d^3 r (g \vec{j} \cdot \vec{\nabla} f + f \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g) = 0 \quad (*)$$

Für  $f = 1$  und  $g = x_i$  folgt

$$\partial_j f = 0 \quad \text{und} \quad \partial_j g = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \int d^3 r j_i = 0 \quad \Rightarrow \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') = 0$$

$\Rightarrow$  Es gibt keinen magn. Monopol-Beitrag

Zweiter Term:  $A_j^{(1)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x_i}{r^3} \int d^3r' j_j(\vec{r}') x_i'$

Aus (\*) mit  $f = x_j$  und  $g = x_i$  folgt

$$\int d^3r (x_i j_j + x_j j_i) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A_j^{(1)}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x_i}{r^3} \int d^3r' \frac{1}{2} (j_j(\vec{r}') x_i' - j_i(\vec{r}') x_j') \\ &= -\frac{\mu_0}{8\pi r^3} \left( \vec{r} \times \left( \int d^3r' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') \right) \right)_j \end{aligned}$$

Beweis:  $\vec{r} \times (\vec{r}' \times \vec{j})_j = x_i \epsilon_{ikj} \epsilon_{k\ell m} x_\ell' j_m$

$$= x_i x_\ell' j_m (\delta_{j\ell} \delta_{im} - \delta_{jm} \delta_{i\ell})$$

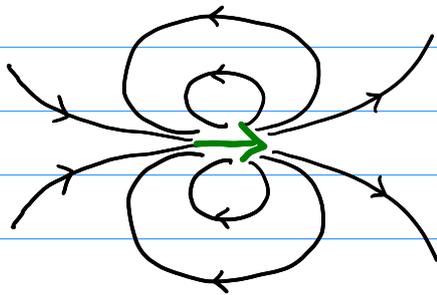
$$= x_i (x_j' j_i - x_i' j_j)$$

$$\Rightarrow \vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

mit  $\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3r' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')$

(magn. Dipolmoment)

$$\Rightarrow \vec{B}^{(1)}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - \frac{m^2}{r^3}}{r^5} \quad (r > R)$$

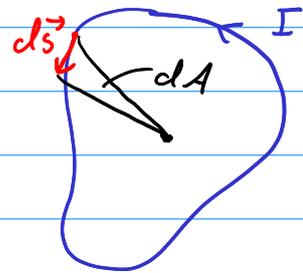


Dipolmoment

Beispiel: Leiterschleife

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3r \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})$$

$$d^3r \vec{j} = d\vec{s} I \quad \rightarrow \quad = \frac{I}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{s}$$



Für eine ebene Schleife ist  $\frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{s} = dA \hat{n}$

$$\Rightarrow \vec{m} = I A \hat{n}$$

## Energie von Stromdichteverteilungen

Lorentz-Kraft:  $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$

Betrachte räumlich begrenzte Stromdichte  
 ( $\vec{j}(\vec{r}) = 0$  für  $r \geq R$ ) in externem  $B$ -Feld

Gesamtkraft auf Stromlichte

$$\vec{F} = \int d^3r \vec{F}(\vec{r})$$

$$= \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \times \left( \vec{B}(0) + x_i \partial_i \vec{B} \Big|_{\vec{r}=0} + \dots \right)$$

$$= \underbrace{\left( \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \right)}_{=0} \times \vec{B}(0) + \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \times \left( x_i \partial_i \vec{B} \Big|_{\vec{r}=0} \right) + \dots$$

$$\Rightarrow F_e^{(1)} = \int d^3r \varepsilon_{jke} j_j(\vec{r}) x_i \partial_i B_k(0)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \int d^3r \varepsilon_{jke} \frac{1}{2} (j_j(\vec{r}) x_i - j_i(\vec{r}) x_j) \partial_i B_k(0)$$

$$= \int d^3r \varepsilon_{jke} \frac{1}{2} \varepsilon_{ijn} (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}))_n \partial_i B_k(0)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r (\delta_{kn} \delta_{ei} - \delta_{ki} \delta_{en}) (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}))_n \partial_i B_k(0)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r \left[ (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}))_k \partial_e B_k(0) - (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}))_e \cancel{\partial_k B_k(0)} \right]$$

$$= m_k \partial_e B_k(0) = \partial_e (\vec{m} \cdot \vec{B}(0))$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} U \quad \text{mit} \quad U = -\vec{m} \cdot \vec{B}(0)$$

(potentielle Energie)

$\Rightarrow$  Niedrigste Energie für  $\vec{m} \parallel \vec{B}$

$\Rightarrow$  Magn. Dipol im B-Feld erfährt Drehmoment

$$\vec{M} = \int d^3r \quad \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r})$$

$$= \int d^3r \quad \vec{r} \times (\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(0)) + \dots$$

$$\vec{r} \times (\vec{j} \times \vec{B}) = \vec{j} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{r} \cdot \vec{j})$$

Nutze (\*) mit  $f = g = x_i$

$$\Rightarrow \int d^3r \quad x_i j_i(\vec{r}) = 0 \quad \Rightarrow \int d^3r \quad \vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0$$

$\uparrow$  keine Summe

$$\Rightarrow M_i = \int d^3r \quad j_i(\vec{r}) x_j B_j(0)$$

$$= \int d^3 r \quad \frac{1}{2} (j_i(\vec{r}) x_j - j_j(\vec{r}) x_i) B_j(0)$$

$$= \int d^3 r \quad \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{j})_k \varepsilon_{kji} B_j(0)$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}(0)$$

↳ Drehmoment proportional zu Winkel zwischen  $\vec{m}$  und  $\vec{B}$

⇒ Kompass

## 2.5 Zusammenfassung Elektrostatik + Magnetostatik

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\Rightarrow \Delta \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

### 3. Elektrodynamik

Die Maxwell-Gleichungen der Elektro- und Magnetostatik sind inkonsistent!

Kontinuitätsgleichung:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

3. Maxwell-Gleichung:  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$$

Mögliche Modifikation (Maxwell, 1861):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

↑ Verschiebungsstrom

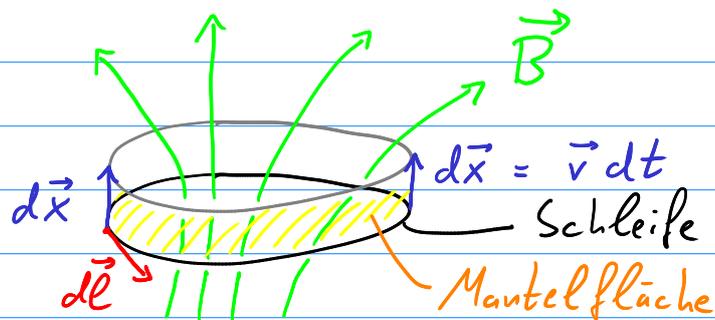
Aus  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ &= \mu_0 \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{E}}{\partial t} \right) \\ &= \mu_0 \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Integralform ( $\vec{j} = 0$ ):  $\int_S d\vec{f} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \underbrace{\int d\vec{f} \cdot \vec{E}}_{= \Phi_E}$

### 3.1 Elektromagnetische Induktion

Betrachte Leiterschleife  $S$  mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v}$  in inhomogenem Magnetfeld:



Fluss durch Leiterschleife:

$$\phi_{\text{m}}^{\text{Schleife}} = \int_S d\vec{f} \cdot \vec{B}$$

Fluss durch überstrichene Mantelfläche

$$\begin{aligned} \phi_{\text{m}}^{\text{Mantel}} &= \int_M d\vec{f} \cdot \vec{B} = \oint_{\partial S} (d\vec{\ell} \times d\vec{x}) \cdot \vec{B} \\ &= \oint_{\partial S} (d\vec{\ell} \times \vec{v}) \cdot \vec{B} dt \end{aligned}$$

Aus  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  folgt  $\oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{B} = 0$   
↑ geschlossene Fläche

$$\Rightarrow \phi_{\text{m}}^{\text{Schleife}}(t + dt) - \phi_{\text{m}}^{\text{Schleife}}(t) + \phi_{\text{m}}^{\text{Mantel}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\phi_{\text{m}}^{\text{Schleife}}(t + dt) - \phi_{\text{m}}^{\text{Schleife}}(t)}{dt} = - \oint_{\partial S} (d\vec{\ell} \times \vec{v}) \cdot \vec{B}$$

$$\begin{aligned}
 dt \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \phi_{\text{m}}^{\text{schleife}} &= - \oint_{\partial S} (d\vec{\ell} \times \vec{v}) \cdot \vec{B} \\
 &= - \oint_{\partial S} \underbrace{(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}}_{\text{Lorentz-Kraft}}
 \end{aligned}$$

Auf Ladungen in der Leiterschleife wirkt Kraft entlang  $\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow$  elektromotorische Kraft

Hypothese: Kraft unabhängig vom Bezugssystem

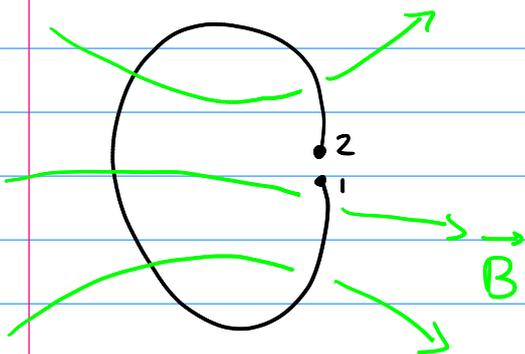
Im Ruhesystem der Leiterschleife ist  $\vec{v} = 0$ , aber

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \neq 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \phi_{\text{m}}^{\text{schleife}} = \int_S d\vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$$

Es muss also ein elektrisches Feld erzeugt werden mit

$$\oint_{\partial S} \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \phi_{\text{m}}^{\text{schleife}}$$

Diese Hypothese muss experimentell überprüft werden



Spannung (= Potentialdifferenz) zwischen 1 und 2:

$$U = \int_1^2 d\vec{\ell} \cdot \vec{E}_{\text{ind}} \approx \oint_{\partial S} d\vec{\ell} \cdot \vec{E}_{\text{ind}}$$

Für zeitabhängiges B-Feld gilt:

$$U = - \frac{d}{dt} \Phi_{\text{m}}^{\text{schleife}} = - \int_S d\vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Faraday'sches Induktionsgesetz

$$\Rightarrow \int_S d\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}_{\text{ind}}) = - \int_S d\vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E}_{\text{ind}} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

↳ Modifikation der 2. Maxwell-Gleichung für zeitabhängige B-Felder

Kommentar: Verbindet man die Punkte 1 und 2 fließt in der Leiterschleife der Strom

$$I = \frac{U}{R} \leftarrow \text{Widerstand}$$

Dieser Strom erzeugt ein B-Feld, das der Änderung  $\frac{\partial B}{\partial t}$  entgegenwirkt

⇒ Lenz'sche Regel

## 3.2 Vollständige Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho && 1. \text{ MG} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} &= 0 && 2. \text{ MG} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 && 3. \text{ MG} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} &= \mu_0 \vec{j} && 4. \text{ MG}\end{aligned}$$

Kommentar:  $[\mu_0 \epsilon_0] = \frac{\text{Zeit}^2}{\text{Länge}^2} = \text{Geschwindigkeit}^{-2}$

$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  entspricht Ausbreitungsgeschwindigkeit von elektromagn. Wellen im Vakuum

↳ Lichtgeschwindigkeit

## 3.3 Energieerhaltung des elektromagn. Feldes

Recap: Energiedichte der Elektrostatik

$$U = \int d^3r u_e(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad u_e(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2(\vec{r})$$

Was passiert mit der Energie für  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq 0$ ?

↳ Übertragung auf B-Felder

↳ Übertragung auf Ladungsträger

Arbeit durch Verschiebung einer Ladung  $q$  um  $d\vec{r}$ :

$$dW = \vec{F}_{\text{Lorentz}} \cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow \text{Leistung: } \dot{W} = \frac{dW}{dt} = \vec{F}_{\text{Lorentz}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{v} \\ = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \text{Leistungsdichte: } \dot{w} = \rho \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

↳ Pro Zeit und Volumen vom E-Feld auf Ladung übertragene Energie

$$\dot{w} = \vec{j} \cdot \vec{E} \stackrel{3. \text{MG}}{=} \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \dot{\vec{E}} \right) \cdot \vec{E}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \dot{\vec{E}} \cdot \vec{E}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \epsilon_0 \dot{\vec{E}} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \stackrel{2. \text{MG}}{=} \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\ = -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \dot{\vec{B}} - \epsilon_0 \dot{\vec{E}} \cdot \vec{E}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 + \epsilon_0 \vec{E}^2 \right)$$

Definition:  $u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right)$

Energiedichte des elektromagn. Feldes



### 3.3 Energie- und Impulserhaltung

Wiederholung: Energieerhaltung

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{em} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\text{mit } u_{em} = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

Analog: Impulserhaltung

Gesamtimpuls  $\vec{P}_{mech}$  aller Ladungen und Ströme im Volumen  $V$  ändert sich durch Lorentzkraft

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{P}_{mech} &= \vec{F}_{mech} = \int_V dV (\underbrace{\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}}_{\vec{f}_L}) \\ &= \int_V \vec{f}_L \quad (\text{Kraftdichte}) \end{aligned}$$

Wird Impuls auf Ladungen und Ströme übertragen, ändert sich die Impulsdichte  $\vec{\pi}_{em}$  des elektromagn. Feldes

$$\frac{d}{dt} \vec{P}_{mech} = - \frac{d}{dt} \int_V dV \vec{\pi}_{em} + \text{Impulsstrom durch Oberfläche von } V$$

Berechnung von  $\vec{\pi}_{em}$ :

$$\vec{f}_L = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \stackrel{\substack{1. \text{MG} \\ 4. \text{MG}}}{=} \epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \dot{\vec{E}} \right) \times \vec{B}$$

Mit 
$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) = \dot{\vec{E}} \times \vec{B} + \vec{E} \times \dot{\vec{B}}$$

$$\stackrel{2.MG}{=} \dot{\vec{E}} \times \vec{B} - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

folgt 
$$\rho_{L,i} = \epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) E_i - \epsilon_0 \partial_t (\vec{E} \times \vec{B})_i$$

$$- \epsilon_0 \underbrace{(\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}))}_i + \frac{1}{\mu_0} \underbrace{((\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B})}_i$$

$$= E_j \partial_i E_j - E_j \partial_j E_i = -B_j \partial_i B_j + B_j \partial_j B_i$$

$$= \frac{1}{2} \partial_i \vec{E}^2 - E_j \partial_j E_i = -\frac{1}{2} \partial_i \vec{B}^2 + B_j \partial_j B_i$$

Zur Vereinfachung addieren wir  $0 \stackrel{3.MG}{=} \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) B_i$

$$\Rightarrow \rho_{L,i} = -\epsilon_0 \partial_t (\vec{E} \times \vec{B})_i + \partial_j \left[ \epsilon_0 (E_i E_j - \frac{1}{2} \vec{E}^2 \delta_{ij}) + \frac{1}{\mu_0} (B_i B_j - \frac{1}{2} \vec{B}^2 \delta_{ij}) \right]$$

und definieren die Impulsdichte

$$\vec{\Pi}_{em} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{S}$$

und den Maxwell'schen Spannungstensor

$$T_{ij} = \epsilon_0 (E_i E_j - \frac{1}{2} \vec{E}^2 \delta_{ij}) + \frac{1}{\mu_0} (B_i B_j - \frac{1}{2} \vec{B}^2 \delta_{ij})$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{2\mu_0} (B_x^2 - B_y^2 - B_z^2) & \epsilon_0 E_x E_y + \frac{1}{\mu_0} B_x B_y & \dots \\ \epsilon_0 E_y E_x + \frac{1}{\mu_0} B_y B_x & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial V} \vec{L}_i = - \frac{\partial}{\partial t} \Pi_{em,i} + \oint_{\partial V} j_j T_{ij} \quad \text{Impulssatz}$$

$$\frac{d}{dt} \int_V dV \vec{\Pi}_{em} - \underbrace{\int_V dV \oint_{\partial V} j_j T_{ij}}_{(2)} = - \int_V dV \vec{f}_L = - \frac{d}{dt} P_{mech} \quad (3)$$

(1): Zeitl. Änderung des Gesamtimpulses des EM-Feldes

(2): Impulsstrom durch die Oberfläche

(3): Impulsübertrag an/von Ladungen und Strömen

## 3.4 Potentiale der Elektrodynamik

3. MG:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

$\Rightarrow$  Es gibt ein Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r}, t)$   
mit  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

2. MG:  $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) = 0$$

$\Rightarrow$  Es gibt ein Skalarpotential  $\phi(\vec{r}, t)$   
mit

$$\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = -\vec{\nabla} \phi$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}$$

Die Wahl von  $\vec{A}$  und  $\phi$  ist nicht eindeutig. Für ein Skalarfeld  $\chi$  gilt

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$\Rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$  ergibt das gleiche B-Feld wie  $\vec{A}$

Damit auch  $\vec{E}$  unverändert bleibt, muss gelten

$$\phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t} \chi$$

Beweis:

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla} \phi' - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}'$$

$$= -\vec{\nabla} \left( \phi - \frac{\partial}{\partial t} \chi \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \vec{\nabla} \chi)$$

$$= -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} + \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} \chi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \chi = \vec{E}$$

Das EM-Feld ist invariant unter der Eichtransformation

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$$

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial}{\partial t} \chi$$

Mit Einführung der Potentiale sind die 2. und 3. MG automatisch erfüllt.

$$1. \text{ MG: } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\Delta \phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\begin{aligned} 4. \text{ MG: } \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \\ = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \mu_0 \epsilon_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} \right) \\ = \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Durch geschickte Wahl der Eichung sind weitere Vereinfachungen möglich

### 3.4.1 Coulomb-Eichung

Bestimme  $\chi$  aus Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta \chi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla} \chi) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \Delta \chi = 0$$

Coulomb-Eichung:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$

$$\Rightarrow \text{1. MG: } \Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\text{Lösung bekannt: } \phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A}$$

$$\Rightarrow \text{4. MG: } -\Delta \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} \right) = \mu_0 \vec{j}$$

↳ Allgemeine Lösung kompliziert

$$\text{Im Vakuum } (\rho = 0): \phi(\vec{r}, t) = 0$$

$$\Rightarrow \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A} = 0$$

(Homogene Wellengleichung)

## 3.4.2 Lorenz-Eichung

Bestimme  $\chi$  aus Lösung der Gleichung

$$\left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \chi = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi$$

Wir werden zeigen, dass eine Lösung dieser Gleichung immer existiert

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla} \chi) \\ &= \cancel{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \cancel{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi'}{\partial t}\end{aligned}$$

Lorenz-Eichung:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \text{1. MG: } (\Delta - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi - \Delta \vec{A}$$

$$\Rightarrow \text{4. MG: } (\Delta - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Die Maxwell-Gleichungen entkoppeln in zwei inhomogene Wellengleichungen für  $\phi$  und  $\vec{A}$

## 3.5 Wellengleichung

Wiederholung:  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}$$

Im Vakuum:  $(\Delta - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{A} = 0$

und  $\phi = 0$  (Coulomb-Eichung) bzw.  
 $(\Delta - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \phi = 0$  (Lorenz-Eichung)

$$\Rightarrow (\Delta - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{E} = 0$$

$$(\Delta - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{B} = 0$$

Alternative Herleitung:

Im Vakuum ist  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \vec{\nabla} \times \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right)$$

$$= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$= 0 - \Delta \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right)$$

(und analog für  $\vec{B}$ )

Wir definieren  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  und  $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$

(d'Alembert-Operator)

### 3.5.1 Lösung der Wellengleichung

Betrachte Skalarfeld  $f(\vec{r}, t)$  mit  $\square f(\vec{r}, t) = 0$

Fourier-Transformation:

$$\tilde{f}(\vec{k}, t) = \int d^3r f(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$f(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

Für  $f(\vec{r}, t) \in \mathbb{R}$  gilt  $\tilde{f}^*(\vec{k}, t) = \tilde{f}(-\vec{k}, t)$

Nutze  $\vec{\nabla} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = (i\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ :

$$\begin{aligned} \square f(\vec{r}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tilde{f}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left( (i\vec{k})^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tilde{f}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \end{aligned}$$

Da  $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$  ein orthogonales Funktionensystem, kann  $\square f(\vec{r}, t) = 0$  nur erfüllt sein, wenn

$$\begin{aligned} (i\vec{k})^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{f}(\vec{k}, t) &= 0 \quad \text{für alle } k \\ &= -k^2 \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$\tilde{f}(\vec{k}, t) = \tilde{f}_+(\vec{k}) e^{-i\omega t} + \tilde{f}_-(\vec{k}) e^{i\omega t}$$

↑ Integrationskonstanten ↑

Dabei gilt die Dispersionsrelation

$$\omega = c |\vec{k}|$$

zwischen der Frequenz  $\omega$  und dem Wellenvektor  $\vec{k}$

Aus  $\tilde{f}^*(\vec{k}, t) = \tilde{f}(-\vec{k}, t)$  folgt  $\tilde{f}_\pm^*(\vec{k}) = \tilde{f}_\mp(-\vec{k})$

$$\Rightarrow \tilde{f}(\vec{k}, t) = \tilde{f}(\vec{k}) e^{-i\omega t} + \tilde{f}^*(-\vec{k}) e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow f(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} + \underbrace{\tilde{f}^*(-\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} + i\omega t}}_{\vec{k} \rightarrow -\vec{k}} \right]$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} + \tilde{f}^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} \right]$$

$$= 2 \operatorname{Re} \left( \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} \right)$$

mit  $\omega = c|\vec{k}|$

Oft ist es einfacher, zuerst die komplexe Lösung

$$f_c(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$$

zu berechnen und erst im Anschluss den Realteil zu nehmen.

### 3.5.2 Ebene Welle

Für  $\tilde{f}(\vec{k}) = A (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}_0)$  mit  $A \in \mathbb{C}$  erhält man eine monochromatische Welle mit

$$f_c(\vec{r}, t) = A e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - i\omega_0 t} \quad \text{mit } \omega_0 = c k_0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(f_c(\vec{r}, t)) = (\operatorname{Re} A) \cos(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - c k_0 t) - (\operatorname{Im} A) \sin(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - c k_0 t)$$

↳ Welle hat konstante Phase für

$$\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t = \text{const} \quad (\text{Phasenfläche})$$

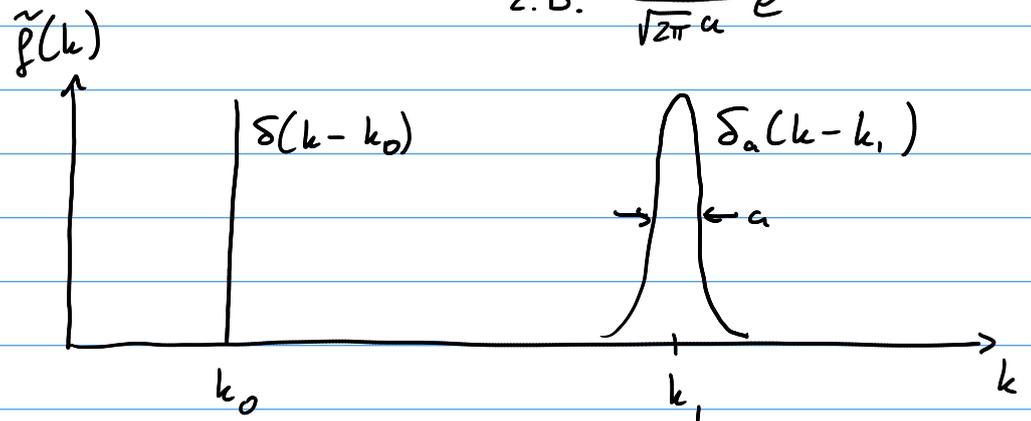
Für festes  $t$  ergibt diese Gleichung eine Ebene senkrecht zu  $\vec{k}_0$   
→ ebene Welle

Die Phasenfläche verschiebt sich mit der Phasengeschwindigkeit  $v_p = \frac{\omega}{k} = c$  in Richtung von  $\vec{k}_0$ .  
↑ Lichtgeschwindigkeit

Realistischer: Ausgedehntes Frequenzband mit Breite  $a$

$$\tilde{f}(\vec{k}) = A (2\pi)^3 \delta_a^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}_1)$$

z.B.  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}a} e^{-x^2/2a^2}$



→ Wellenpaket

Da  $v_p = c$  unabhängig von  $k$ , behält das Wellenpaket seine Form

### 3.5.3 Elektromagn. ebene Wellen

Komplexe Lösung für Vektorpotential:

$$\vec{A}_c(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} \quad \text{mit } \omega = c|\vec{k}|$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\vec{A}_c(\vec{r}, t))$$

Analog für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$

Coulomb-Eichung:  $\phi = 0$

$$\Rightarrow \vec{B}_c = \vec{\nabla} \times \vec{A}_c$$

$$= \partial_i (A_{0j} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_c - i\omega t}) \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$$

$$= A_{0j} (ik_i) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_c - i\omega t} \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$$

$$= i \vec{k} \times \vec{A}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_c - i\omega t} = i \vec{k} \times \vec{A}_c$$

$$\Rightarrow \vec{E}_c = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}_c = i\omega \vec{A}_c$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \text{Re } \vec{E}_c = -\omega \text{Im } \vec{A}_c \\ \vec{B} &= \text{Re } \vec{B}_c = -\vec{k} \times (\text{Im } \vec{A}_c) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \\ \hookrightarrow \vec{E} \perp \vec{B}$$

Außerdem gilt in Coulomb-Eichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\Rightarrow i \vec{k} \cdot \vec{A}_c = 0 \quad \Rightarrow \quad -\vec{k} \cdot (\text{Im } \vec{A}_c) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\hookrightarrow \vec{E} \perp \vec{k}$$

$\Rightarrow \vec{E}$  und  $\vec{B}$  senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $\vec{k}$

$\hookrightarrow$  Elektromagn. Wellen sind transversal

Betrachte Einheitsvektoren  $\hat{e}_i$  ( $i=1,2,3$ ) mit

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \quad \hat{e}_i \times \hat{e}_j = \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \quad \text{und} \quad \hat{e}_3 = \hat{k}$$

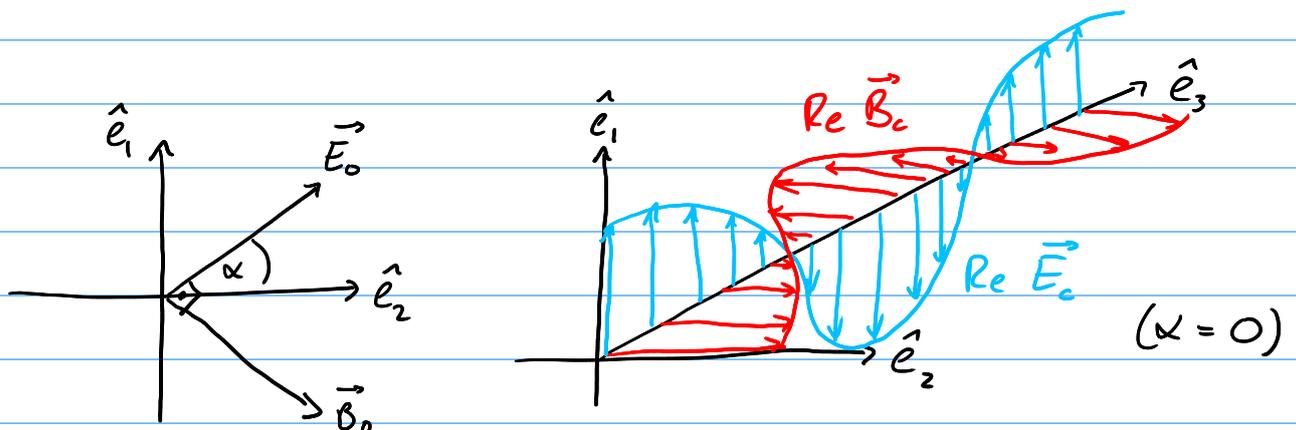
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\vec{E}_c(\vec{r}, t)) = \text{Re}(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)})$$

$$\vec{E}_0 = \underbrace{(\cos \alpha \hat{e}_1 + \sin \alpha \hat{e}_2)}_{\text{Richtung}} |E_0| e^{i\varphi} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Betrags} \\ \text{komplexe Phase} \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_0 = (-\sin \alpha \hat{e}_1 + \cos \alpha \hat{e}_2) |B_0| e^{i\varphi} \quad \leftarrow \text{gleiche Phase}$$

mit  $B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{1}{c} E_0$

Durch geeignete Wahl von  $t=0$  können wir die Phase  $\varphi$  eliminieren



$\rightarrow \vec{E}$  und  $\vec{B}$  in Phase  
 $\rightarrow$  Richtung von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  konstant
 } Lineare Polarisation

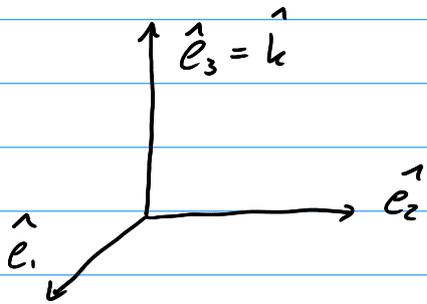
### 3.5.3 Ebene Wellen (Fortsetzung)

Wiederholung: Ebene Welle

$$\vec{E}_c(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}$$

$$\vec{B}_c(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}$$

mit  $\vec{E}_0 \perp \vec{k}$  und  $\vec{B}_0 = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}_0$



Lineare Polarisation:

$$\vec{E}_0 = (\cos \alpha \hat{e}_1 + \sin \alpha \hat{e}_2) |E_0|$$

$$\vec{B}_0 = (-\sin \alpha \hat{e}_1 + \cos \alpha \hat{e}_2) |B_0|$$

$$|B_0| = \frac{1}{c} |E_0|$$

Allgemein: Komplexe Phase zwischen  $\hat{e}_1$  und  $\hat{e}_2$

Definiere  $\hat{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_1 \pm i\hat{e}_2)$

$$\Rightarrow \hat{e}_+^2 = \hat{e}_-^2 = \hat{e}_{\pm} \cdot \hat{e}_3 = 0, \quad \hat{e}_+ \hat{e}_- = 1, \quad \hat{e}_3 \times \hat{e}_{\pm} = \mp i\hat{e}_{\pm}$$

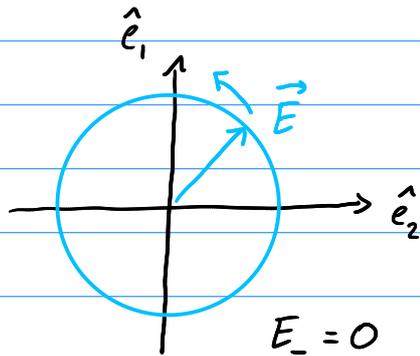
$$\Rightarrow \vec{E}_0 = E_+ \hat{e}_+ + E_- \hat{e}_- \quad \text{mit} \quad E_{\pm} = \vec{E}_0 \cdot \hat{e}_{\mp} \in \mathbb{C}$$

Betrachte  $E_- = 0$

$$\Rightarrow \vec{E}_c = E_+ \hat{e}_+ e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} = |E_+| e^{i\varphi} \hat{e}_+ e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \operatorname{Re} \vec{E}_c = |E_+| \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \hat{e}_1 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi) - \hat{e}_2 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi) \right)$$

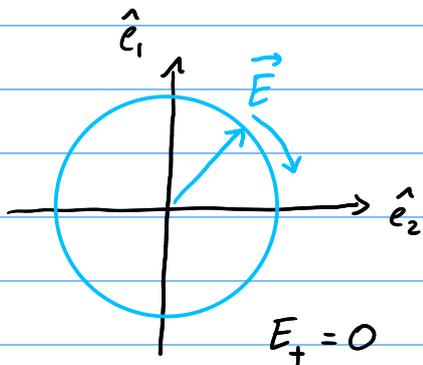
$\Rightarrow \vec{E}$  dreht sich gegen den Uhrzeigersinn



$\rightarrow$  linkshändige Polarisation  
(negative Helizität)

Für  $E_+ = 0$  erhält man

$$\vec{E} = |E_-| \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \hat{e}_1 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi) + \hat{e}_2 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi) \right)$$

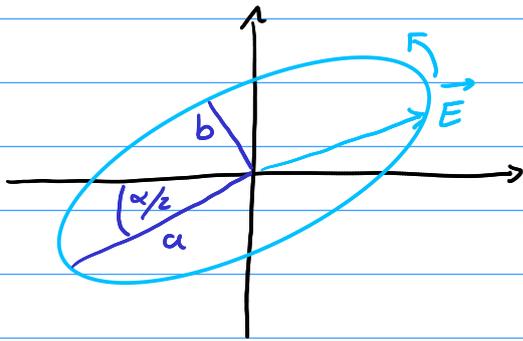


$\Rightarrow$  rechtshändige Polarisation  
(positive Helizität)

Für  $E_+, E_- \neq 0$  erhält man elliptische Polarisation

$$\vec{E}_c = E_+ (\hat{e}_+ + r e^{i\alpha} \hat{e}_-) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

mit  $E_-/E_+ = r e^{i\alpha}$



$$b/a = \frac{|1-r|}{1+r}$$

$$(r=0 \Rightarrow b=a)$$

$\Rightarrow$  zirkuläre Polarisation)

### 3.5.4 Energie und Impuls von em. Wellen

Erinnerung:  $w_{em} = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2)$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (\text{Energiedichte})$$

(Energiestromdichte)

Für  $\vec{E}_c = E_0 e^{-i\phi}$  und  $\vec{B}_c = B_0 e^{-i\phi}$  mit  $\phi = -\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t$  folgt:

$$\begin{aligned} \vec{E}^2 &= (\text{Re } \vec{E}_c)^2 = \left( \frac{1}{2} (\vec{E}_c + \vec{E}_c^*) \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \underbrace{2 \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0}_{\text{zeitunabhängig}} + \underbrace{\vec{E}_0^2 e^{-i2\phi} + \vec{E}_0^{*2} e^{i2\phi}}_{\text{oszillierend}} \right) \end{aligned}$$

Betrachte zeitliche Mittelung:  $\langle e^{\pm i2\phi} \rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*$$

$$\text{Analog: } \langle \vec{B}^2 \rangle = \frac{1}{2} \vec{B}_0 \cdot \vec{B}_0^*$$

$$\Rightarrow \langle W_{em} \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* + \frac{1}{4} \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_0 \cdot \vec{B}_0^*$$

$$\text{Mit } \vec{B}_0 \cdot \vec{B}_0^* = |\vec{B}_0|^2 = \frac{1}{c^2} |\vec{E}_0|^2 = \frac{1}{c^2} \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* \quad \text{folgt}$$

$$\langle W_{em} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*$$

$$\vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{4} (\vec{E}_c + \vec{E}_c^*) \times (\vec{B}_c + \vec{B}_c^*)$$

$$= \frac{1}{4} (\vec{E}_0 \times \vec{B}_0^* + \vec{E}_0^* \times \vec{B}_0 + \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 e^{-i2\phi} + \vec{E}_0^* \times \vec{B}_0^* e^{i2\phi})$$

$$\Rightarrow \langle \vec{S} \rangle = \langle \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \rangle = \frac{1}{4\mu_0} (\vec{E}_0 \times \vec{B}_0^* + \vec{E}_0^* \times \vec{B}_0)$$

$$\text{Mit } \vec{B}_0 = \frac{\hat{k} \times \vec{E}_0}{c} \quad \text{folgt}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 \times \vec{B}_0^* &= \frac{1}{c} \vec{E}_0 \times (\hat{k} \times \vec{E}_0^*) = \frac{1}{c} (\hat{k} (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*) - \underbrace{\vec{E}_0^* (\hat{k} \cdot \vec{E}_0)}_{=0}) \\ &= \frac{1}{c} \hat{k} (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\hat{k}}{c} (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*)$$

$$\Rightarrow \langle \vec{S} \rangle = c \hat{k} \langle W_{em} \rangle$$

Die Welle transportiert ihre Energie mit Geschwindigkeit  $c$  in Richtung  $\hat{k}$

## 3.6 Hohlraumwellen

Idee: Elektrodynamik mit Randbedingungen

↳ Hohlräume mit leitenden Wänden

Im Inneren:  $(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{E} = 0$

$$(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{B} = 0$$

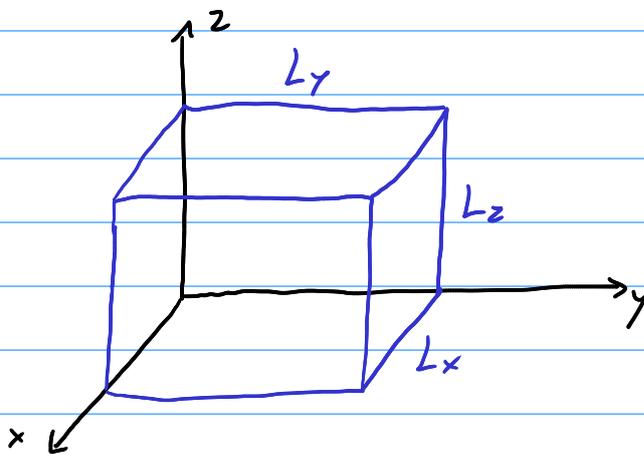
Am Rand: Idealer Leiter  
→ em. Wellen können nicht eindringen

$$\Rightarrow \hat{n} \times \vec{E}(r, t) = 0$$

$$\hat{n} \cdot \vec{B}(r, t) = 0$$

(gute Näherung für niedrige Frequenzen)

Beispiel:



→ Hohlraumresonator

Separationsansatz für jede Komponente:

$$\vec{E}_x(\vec{r}, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \cdot T(t)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{=-k_x^2} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{=-k_y^2} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{=-k_z^2} - \underbrace{\frac{1}{c^2} \frac{T''}{T}}_{=-\omega^2} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = c^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

Für  $X(x=0)$  und  $X(x=L_x)$  gibt es keine Randbedingung, da  $E_x$  senkrecht auf der Oberfläche steht

$$\Rightarrow X(x) = C \sin(k_x x + \alpha)$$

Für  $Y$  gilt:  $Y(y=0) = Y(y=L_y) = 0$

$$\Rightarrow Y(y) = C \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right)$$

mit  $m \in \mathbb{N}$

Analog:  $Z(z) = C \sin\left(\frac{n\pi z}{L_z}\right)$  mit  $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow E_x = \operatorname{Re} \left( \underbrace{C}_{\uparrow \text{komplex}} \sin(k_x x + \alpha) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L_z}\right) e^{-i\omega t} \right)$$

Analog folgt

$$E_y = \operatorname{Re} \left( C' \sin\left(\frac{e'\pi x}{L_x}\right) \sin(k_y y + \alpha') \sin\left(\frac{n'\pi z}{L_z}\right) e^{-i\omega't} \right)$$

$$E_z = \operatorname{Re} \left( C'' \sin\left(\frac{e'\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m'\pi y}{L_y}\right) \sin(k_2 z + \alpha'') e^{-i\omega''t} \right)$$

Im Hohlraum muss gelten:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \left\{ C k_x \cos(k_x x + \alpha) \sin\left(\frac{m'\pi y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{n'\pi z}{L_z}\right) e^{-i\omega t} \right. \\ \left. + C' k_y \sin\left(\frac{e'\pi x}{L_x}\right) \cos(k_y y + \alpha') \sin\left(\frac{n'\pi z}{L_z}\right) e^{-i\omega't} \right. \\ \left. + C'' k_2 \sin\left(\frac{e'\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m'\pi y}{L_y}\right) \cos(k_2 z + \alpha'') e^{-i\omega''t} \right\}$$

Lösung erfordert:  $C k_x + C' k_y + C'' k_2 = 0$

$$\cdot \cos(k_x x + \alpha) = \sin\left(\frac{e'\pi x}{L_x}\right) = \sin\left(\frac{e'\pi x}{L_x}\right)$$

$$\Rightarrow e = e', \quad \alpha = -\frac{\pi}{2}, \quad k_x = \frac{e'\pi}{L_x}$$

$\cdot$  Analog:  $m = m', \quad n = n'$

$$\alpha' = \alpha'' = -\frac{\pi}{2}$$

$$k_y = \frac{m'\pi}{L_y}, \quad k_2 = \frac{n'\pi}{L_z}$$

$$\cdot e^{-i\omega t} = e^{-i\omega't} = e^{-i\omega''t}$$

$$\Rightarrow \omega = \omega' = \omega''$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \operatorname{Re} \left\{ \begin{pmatrix} C_x \cos\left(\frac{\ell\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L_z}\right) \\ C_y \sin\left(\frac{\ell\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L_z}\right) \\ C_z \sin\left(\frac{\ell\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{L_z}\right) \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \right\}$$

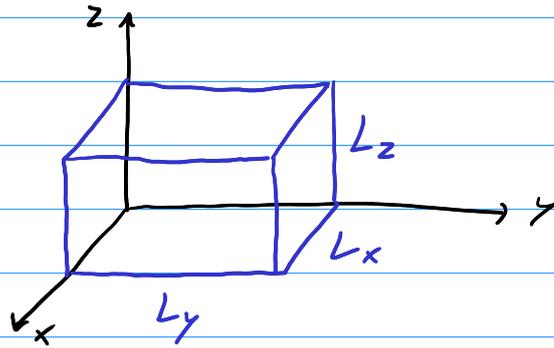
mit  $\ell, m, n \in \mathbb{N}$

$$C_x \frac{\ell\pi}{L_x} + C_y \frac{m\pi}{L_y} + C_z \frac{n\pi}{L_z} = 0$$

und  $\omega^2 = c^2 \pi^2 \left( \frac{\ell^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2} + \frac{n^2}{L_z^2} \right)$

## 3.6 Hohlraumresonatoren

Wiederholung:



$$\vec{E} = \operatorname{Re} \left\{ \begin{pmatrix} -C_1 \cos\left(\frac{l\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L_z}\right) \\ -C_2 \sin\left(\frac{l\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L_z}\right) \\ -C_3 \sin\left(\frac{l\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{L_z}\right) \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \right\}$$

mit  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C}$  und  $l, m, n \in \mathbb{N}$  so dass

$$C_1 \frac{l\pi}{L_x} + C_2 \frac{m\pi}{L_y} + C_3 \frac{n\pi}{L_z} = 0$$

Außerdem muss gelten:

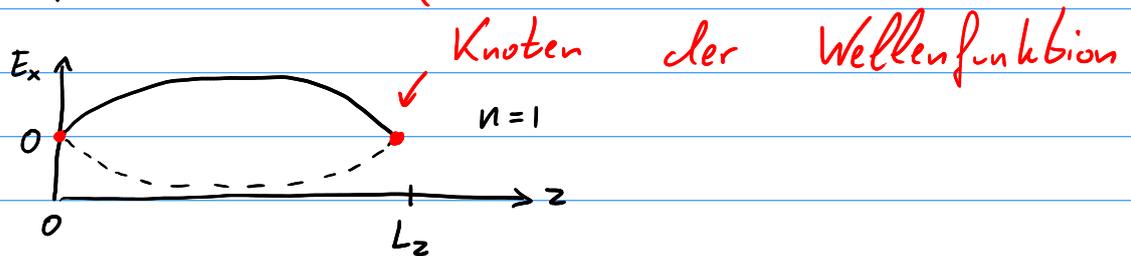
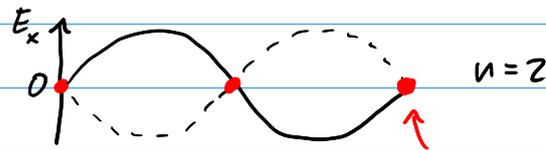
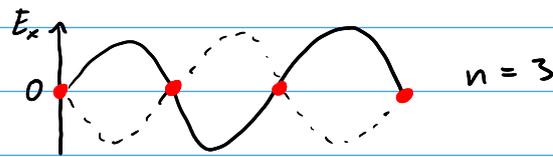
$$\omega = \omega_{l,m,n} = c\pi \sqrt{\frac{l^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2} + \frac{n^2}{L_z^2}} \quad (\text{Eigenfrequenzen})$$

$$\vec{B} = \operatorname{Re} \{ \vec{B}_c \} \quad \text{mit} \quad \vec{B}_c = -\frac{c}{\omega} \vec{\nabla} \times \vec{E}_c$$

Man bezeichnet diese Lösungen als Eigenmoden, d.h. Eigenschwingungen des Hohlraumresonators

Es handelt sich um stehende Wellen mit raumfesten Knoten, an denen die Felder verschwinden.

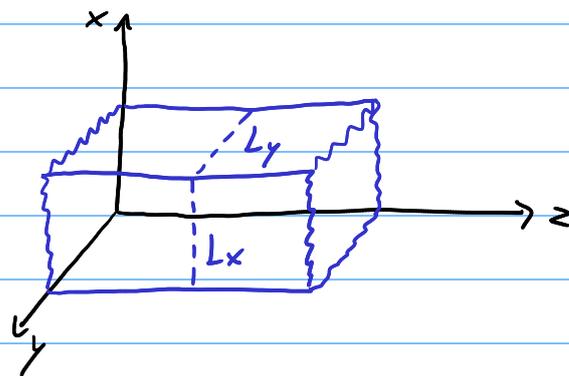
Beispiel:  $E_x$  entlang  $z$ :



## 3.7 Wellenleiter

Idee: Unbegrenzte Länge in eine Richtung:

Beispiel: Rechteckiger Querschnitt



unbegrenzt in  
 $z$ -Richtung

Lösung durch Separationsansatz wie zuvor.

Aber: Keine Randbedingung für  $Z(z)$

$$\Rightarrow Z(z) = e^{\pm ikz} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \text{Re} \left\{ \begin{pmatrix} C_1 \cos \frac{\ell\pi x}{L_x} \sin \frac{m\pi y}{L_y} \\ C_2 \sin \frac{\ell\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y} \\ C_3 \sin \frac{\ell\pi x}{L_x} \sin \frac{m\pi y}{L_y} \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \right.$$

$$\text{mit } \omega_{\text{em}} = c \sqrt{\frac{\pi^2 \ell^2}{L_x^2} + \frac{\pi^2 m^2}{L_y^2} + k^2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow C_1 \frac{\ell\pi}{L_x} + C_2 \frac{m\pi}{L_y} - i C_3 k = 0$$

$$\vec{B}_c = -\frac{i}{\omega} \vec{\nabla} \times \vec{E}_c$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \text{Re} \left\{ -i\omega \begin{pmatrix} \left( \frac{C_3 m\pi}{L_y} - C_2 ik \right) \sin \frac{\ell\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y} \\ \left( C_1 ik - \frac{C_3 \ell\pi}{L_x} \right) \cos \frac{\ell\pi x}{L_x} \sin \frac{m\pi y}{L_y} \\ \left( \frac{C_2 \ell\pi}{L_x} - \frac{C_1 m\pi}{L_y} \right) \cos \frac{\ell\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y} \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \right.$$

Randbedingungen für  $\vec{B}$ :  $\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$  auf Oberfläche  
 $\rightarrow$  automatisch erfüllt

Beispiel: •  $x = 0$ ,  $\vec{n} = \vec{e}_x$

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = \dots \sin \left( \frac{\ell\pi x}{L_x} \right) \dots = 0$$

- $y = L_y, \quad \vec{n} = \vec{e}_y$

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = \dots \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) \dots = 0$$

Die Lösungen sind immer noch stehende Wellen in x- und y-Richtung.

In z-Richtung entspricht die Lösung einer sich ausbreitenden elektromagn. Welle

$k > 0$ : Ausbreitung in pos. z-Richtung

$k < 0$ : Ausbreitung in neg. z-Richtung

Erinnerung: Für freie EM-Wellen gilt  $\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k}$

↳ transversale EM-Wellen (TEM-Wellen)

In unserem Fall gilt  $\vec{k} = k \vec{e}_z$

$$E_z = C_3 \sin \frac{\ell\pi x}{L_x} \sin \frac{m\pi y}{L_y} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$\Rightarrow C_1 \frac{\ell\pi}{L_x} + C_2 \frac{m\pi}{L_y} = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1 \frac{L_y}{L_x} \frac{\ell}{m}$$

$$B_z = -i\omega \left( \frac{C_2 \ell\pi}{L_x} - \frac{C_1 m\pi}{L_y} \right) \cos \frac{\ell\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{E} &= 0 \\ &= -i\omega \left( -C_1 \frac{\ell^2 L_y \pi}{m L_x^2} - \frac{C_1 m\pi}{L_y} \right) \dots \end{aligned}$$

$$= i\omega \frac{L_y \pi}{m} C_1 \left( \frac{e^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2} \right) \dots$$

$\vec{B} \cdot \vec{k} = 0$  nur erfüllbar für  $l=m=0$ , d.h.  $\vec{E} = \vec{B} = 0$

Umgekehrt gilt:  $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$

$$\Rightarrow \frac{C_2 l \pi}{L_x} = \frac{C_1 m \pi}{L_y}$$

$$\Rightarrow \frac{L_x \pi}{l} C_1 \left( \frac{e^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2} \right) - i C_3 k = 0$$

$$\Rightarrow C_3 \neq 0 \Rightarrow E_z \neq 0$$

$\Rightarrow$  In einem rechteckigen Wellenleiter kann nur entweder  $\vec{E} \cdot \vec{k} = 0$  (TE-Eigenmode) oder  $\vec{B} \cdot \vec{k} = 0$  (TM-Eigenmode) erfüllt werden

$\hookrightarrow$  TE- und TM-Eigenmoden bilden vollständiges Funktionensystem

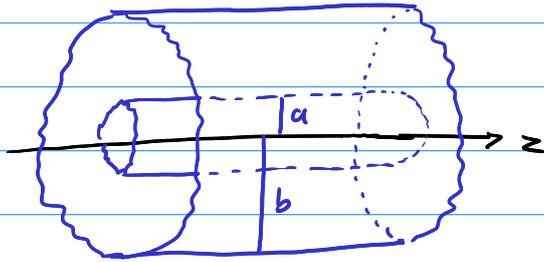
Dabei gilt: - TE-Moden existieren für alle  $l, m$  außer  $l=m=0$   
- TM-Moden existieren nur für  $l \neq 0$  und  $m \neq 0$

$\Rightarrow$  Es gibt eine minimale erlaubte Frequenz:

$$\omega = c \sqrt{\frac{\pi^2 l^2}{L_x^2} + \frac{\pi^2 m^2}{L_y^2} + k^2} > \omega_{cr} = \min \left( \frac{c\pi}{L_x}, \frac{c\pi}{L_y} \right)$$

→ Keine Ausbreitung von Wellen mit  $\omega < \omega_{cr}$

### 3.7.1 Koaxial-Kabel



Unendlicher Zylinder  
mit Radius  $a$  in  
einem Hohlzylinder  
mit Radius  $b$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{ikz - i\omega t} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{ikz - i\omega t}$$

$$\text{mit } \vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad \text{für } s = a, b$$
$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{für } s = a, b$$

Behauptung: Es existieren TEM-Wellen mit  
 $E_z = B_z = 0$

Beweis: Aufgrund der Zylindersymmetrie können  
die Felder nur von  $s$  abhängen:

$$\vec{E}_0 = f_s(s) \hat{e}_s + f_\varphi(s) \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{B}_0 = g_s(s) \hat{e}_s + g_\varphi(s) \hat{e}_\varphi$$

$$1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s f_s) = 0$$

$$\Rightarrow f_s = \frac{C_1}{s}$$

$$2) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow g_s = \frac{c_2}{s}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \text{ für } s = a, b \Rightarrow c_2 = 0$$

$$3) (\vec{\nabla} \times \vec{B})_z = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r s_\varphi) \right)$$

$$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} E_z = 0 \Rightarrow g_\varphi = \frac{c_3}{s}$$

$$4) (\vec{\nabla} \times \vec{E})_z = 0 \Rightarrow f_\varphi = \frac{c_4}{s}$$

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 \text{ für } s = a, b \Rightarrow c_4 = 0$$

$$5) (\vec{\nabla} \times \vec{E})_\varphi = \frac{\partial}{\partial z} E_r = ik \frac{c_1}{s} e^{ikz - i\omega t}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} B_\varphi = i\omega \frac{c_3}{s} e^{ikz - i\omega t}$$

$$\Rightarrow c_3 = \frac{k}{\omega} c_1$$

$$6) (\vec{\nabla} \times \vec{B})_s = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_s \Rightarrow c_1 = \frac{1}{c^2} \frac{k}{\omega} c_3$$

$$\Rightarrow k = \frac{\omega}{c}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{c_1}{s} \hat{e}_s e^{ikz - i\omega t}$$

$$\vec{B} = \frac{c_1}{cs} \hat{e}_\varphi e^{ikz - i\omega t}$$

$\Rightarrow$  TEM-Welle mit  $k = \frac{\omega}{c}$

# 4. Elektromagnetische Strahlung

Bisher: • **Elektrostatik** und **Magnetostatik**

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad \Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

• **Elektrodynamik im Vakuum**

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = 0 \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = 0$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Jetzt: Lösung der Maxwell-Gleichungen für beliebige Ladungs- und Stromdichten

Lorentz-Eichung:  $\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}, t)$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\mu_0\vec{j}(\vec{r}, t)$$

## 4.1 Greens-Funktion der Wellengleichung

Angenommen wir finden  $G(\vec{r}, t, \vec{r}', t')$  mit

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\vec{r}, t, \vec{r}', t') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t')$$

Dann gilt

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r' dt' G(\vec{r}, t, \vec{r}', t') \rho(\vec{r}', t')$$

und analog für  $\vec{A}(\vec{r}, t)$

Die Funktion  $G(\vec{r}, t, \vec{r}', t')$  hängt nur von  $\vec{r} - \vec{r}'$  und  $t - t'$  ab. Es reicht also eine Lösung für

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\vec{r}, t) = -\delta(\vec{r}) \delta(t)$$

Ansatz: Fourier-Transformation in der Zeit

$$G(\vec{r}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{G}(\vec{r}, \omega)$$

$$\text{mit } \tilde{G}(\vec{r}, \omega) = \int dt e^{i\omega t} G(\vec{r}, t)$$

Ab jetzt: Gleiches Symbol für Funktion und Fourier-Transformierte.  
Unterscheidung durch Argumente

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\vec{r}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \underbrace{\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) e^{-i\omega t}}_{=(-i\omega)^2} G(\vec{r}, \omega)$$

$$-\delta(\vec{r})\delta(t) = -\int \frac{d\omega}{2\pi} \delta(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \left( \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G(\vec{r}, \omega) = -\delta(\vec{r})$$

Helmholtz-Gleichung

Ansatz: Fourier-Transformation nach dem Ort

$$G(\vec{r}, \omega) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{r}} G(\vec{k}, \omega)$$

$$G(\vec{k}, \omega) = \int d^3r e^{-i\vec{k}\vec{r}} G(\vec{r}, \omega)$$

gleiches Symbol  
unterschiedliche  
Funktionen

$$\Rightarrow \left( \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G(\vec{r}, \omega) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \underbrace{\left( \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right)}_{=(i\vec{k})^2} e^{i\vec{k}\vec{r}} G(\vec{k}, \omega)$$

$$-\delta(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \left( -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G(\vec{k}, \omega) = -1$$

$$G(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Rücktransformation:

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \omega) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{1}{k^2 - \omega^2/c^2} \\ &= \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \underbrace{\int_{-1}^1 d\cos\vartheta}_{=\frac{1}{ikr}(e^{ikr} - e^{-ikr})} e^{ikr\cos\vartheta} \frac{1}{k^2 - \omega^2/c^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 ir} \int_0^\infty dk \underbrace{(k e^{ikr} - k e^{-ikr})}_{k \rightarrow -k} \frac{1}{k^2 - \omega^2/c^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 ir} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{k e^{ikr}}{k^2 - \omega^2/c^2} \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung

$$= \frac{1}{(2\pi)^2 ir} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k - \omega/c} + \frac{1}{k + \omega/c} \right) e^{ikr}$$

Integrand nicht definiert für  $k = \pm \frac{\omega}{c}$

Berechnung mit Funktionentheorie.

Residuensatz:

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z)$$

$$\Rightarrow G(\vec{r}, \omega) = \underbrace{\frac{1}{4\pi r} e^{i\frac{\omega}{c}r}}_{=G^+(\vec{r}, \omega)} + \underbrace{\frac{1}{4\pi r} e^{-i\frac{\omega}{c}r}}_{=G^-(\vec{r}, \omega)}$$

$G_{\pm}(\vec{r}, \omega)$  erfüllen die Helmholtz-Gleichung:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) G_{\pm}(\vec{r}, \omega) = \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \frac{e^{\pm i\frac{\omega}{c}r}}{4\pi r}$$

= Summe aus vier Termen

$$\text{Term 1} = e^{\pm i\frac{\omega}{c}r} \Delta \frac{1}{4\pi r} = -e^{\pm i\frac{\omega}{c}r} \delta(\vec{r})$$

Beitrag nur  
für  $\vec{r}=0 \Rightarrow -\delta(\vec{r})$

$$\text{Term 2} = \frac{1}{4\pi r} \Delta e^{\pm i\frac{\omega}{c}r} = \frac{1}{4\pi r} \vec{\nabla} \left( \pm i\frac{\omega}{c} \frac{\vec{r}}{r} e^{\pm i\frac{\omega}{c}r} \right)$$

$$\vec{\nabla} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{4\pi r} \left( \pm i\frac{\omega}{c} \frac{2}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) e^{\pm i\frac{\omega}{c}r}$$

$$\text{Term 3} = 2 \left( \vec{\nabla} \frac{1}{4\pi r} \right) \cdot \left( \vec{\nabla} e^{\pm i\frac{\omega}{c}r} \right)$$

$$= -2 \frac{\vec{r}}{4\pi r^3} \left( \pm i\frac{\omega}{c} \frac{\vec{r}}{r} \right) e^{\pm i\frac{\omega}{c}r}$$

$$\text{Term 4} = \frac{\omega^2}{c^2} e^{\pm i\frac{\omega}{c}r}$$

$$\text{Term 2} + \text{Term 3} + \text{Term 4} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) G_{\pm}(\vec{r}, \omega) = -\delta(\vec{r})$$

Zweite Rücktransformation

$$\begin{aligned}G^{\pm}(\vec{r}, t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{e^{\pm i\frac{\omega}{c}r}}{4\pi r} \\&= \frac{1}{4\pi r} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t \mp \frac{r}{c})} \\&= \frac{1}{4\pi r} \delta(t \mp \frac{r}{c})\end{aligned}$$

Damit haben wir die finale Antwort:

$$G^{\pm}(\vec{r}, t, \vec{r}', t') = \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t - t' \mp \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}'|)$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}\phi^{\pm}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r' dt' G^{\pm}(\vec{r}, t, \vec{r}', t') \rho(\vec{r}', t') \\&= \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t \mp \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}'|)}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}\end{aligned}$$

Für zeitunabhängiges  $\rho(\vec{r}')$  ergibt sich die bekannte Lösung der Elektrostatische

Für zeitabhängiges  $\rho(\vec{r}', t')$  gibt es zwei Lösungen  $\phi^{\pm}(\vec{r}, t)$

$\phi^+(\vec{r}, t)$  hängt von der Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})$  zum früheren Zeitpunkt  $t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$  ab.

- Dabei entspricht  $\Delta t = \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$  der Zeit, die eine elektromagn. Welle braucht, um von  $\vec{r}'$  nach  $\vec{r}$  zu gelangen.
- Die Lösung beschreibt kausales Verhalten: Verändert man eine Ladung am Ort  $\vec{r}'$ , ändert sich das Potential am Ort  $\vec{r}$  nach der Zeit  $\Delta t = |\vec{r} - \vec{r}'|/c$
- Aufgrund der Verzögerung bezeichnet man  $\phi^+$  als retardierte Lösung und  $G^+$  als retardierte Greens-Funktion

$\phi^-(\vec{r}, t)$  bezeichnet man als avancierte Lösung.

Das Potential hängt von der Ladungsdichte  $\rho(\vec{r}', t + \frac{|\vec{r}' - \vec{r}|}{c})$  in der Zukunft ab.

Diese Lösung wird benötigt zur Erfüllung gewisser Randwertprobleme und spielt für uns keine weitere Rolle.

Analog: 
$$\vec{A}^+(\vec{r}, t) = \mu_0 \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t \mp |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Kommentare: - Retardierte Potentiale erfüllen die Lorenz-Eichbedingung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^+(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi^+(\vec{r}, t) = 0$$

- Allgemeinste Lösung der Maxwell-Gleichungen durch Addition der homogenen Lösung:

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi^+(\vec{r}, t) + \phi_h(\vec{r}, t)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}^+(\vec{r}, t) + \vec{A}_h(\vec{r}, t)$$

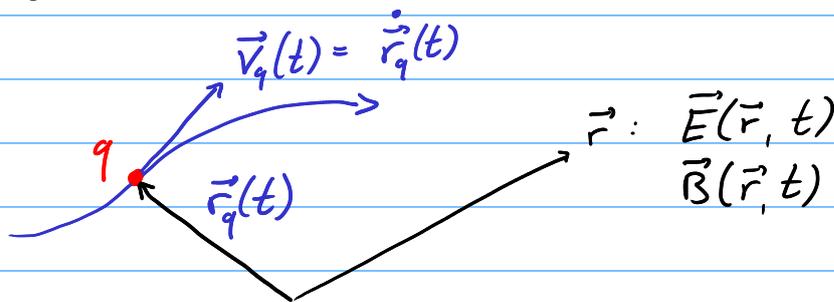
mit  $\square \phi_h = 0, \quad \square \vec{A}_h = 0$

Wiederholung: Retardierte Potentiale

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \int dt' \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \int dt' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\end{aligned}$$

## 4.2 Bewegte Punktladung



$$\rho(\vec{r}', t') = q \delta(\vec{r}' - \vec{r}_q(t'))$$

$$\vec{j}(\vec{r}', t') = q \vec{v}_q(t') \delta(\vec{r}' - \vec{r}_q(t'))$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \int dt' \frac{\delta(\vec{r}' - \vec{r}_q(t'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q(t')|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t')|}$$

Suche Nullstellen der  $\delta$ -Funktion:

$$\tau = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)|}{c} \quad (\text{retardierte Zeit})$$

Gleichung im Allgemeinen nur numerisch lösbar

Aber: Für  $|\vec{v}_q| < c$  gibt es maximal eine Lösung

Beweis: Angenommen es gibt zwei Lösungen  $\tau_1 \neq \tau_2$ . Dann gilt

$$c\tau_1 + |\vec{r} - \vec{r}_q(\tau_1)| = c\tau_2 + |\vec{r} - \vec{r}_q(\tau_2)|$$

$$\Rightarrow c(\tau_2 - \tau_1) = |\vec{r} - \vec{r}_q(\tau_1)| - |\vec{r} - \vec{r}_q(\tau_2)|$$

$$= \Delta\tau \leq \underbrace{|\vec{r}_q(\tau_2) - \vec{r}_q(\tau_1)|}_{= \Delta r}$$

Dreiecksungleichung

$$\Rightarrow \frac{\Delta r}{\Delta\tau} \geq c \quad \text{im Widerspruch zur Annahme } |\vec{v}_q| < c$$

Angenommen es gibt eine Lösung  $z$

$$\Rightarrow \delta(f(t')) = \frac{1}{|f'(z)|} \delta(t' - z)$$

$$\text{mit } f(t') = t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q(t')|}{c}$$

$$f'(t') = 1 + \vec{\nabla}_{\vec{r}_q} \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q|}{c} \cdot \dot{\vec{r}}_q(t')$$

$$= 1 - \frac{1}{c} \hat{e}_q(t') \cdot \dot{\vec{r}}_q(t') \quad \text{mit } \hat{e}_q(t') = \frac{\vec{r} - \vec{r}_q(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t')|}$$

(Einheitsvektor in Richtung der Punktladung)

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\delta(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q(t')|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t')|}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t')|} \frac{\delta(t' - z)}{1 - \frac{1}{c} \hat{e}_q(z) \cdot \dot{\vec{r}}_q(z)}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q(z)|} \frac{1}{1 - \frac{1}{c} \hat{e}_q(z) \cdot \dot{\vec{r}}_q(z)}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q \frac{\dot{\vec{r}}_q(z)}{c^2}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_q(z)|} \frac{1}{1 - \frac{1}{c} \hat{e}_q(z) \cdot \dot{\vec{r}}_q(z)}$$

(Liénard-Wiechert Potentiale)

$$\text{Jetzt: } \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}, t) - \dot{\vec{A}}(\vec{r}, t)$$

Problem:  $\tau$  hängt von  $\vec{r}$  und  $t$  ab!

$$\text{Schritt 1: } \frac{\partial}{\partial \tau} (\vec{r} - \vec{r}_q(\tau))^2 = -2(\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)) \cdot \vec{v}_q(\tau)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau} |\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)| = \frac{\partial}{\partial \tau} \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_q(\tau))^2}$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial \tau} (\vec{r} - \vec{r}_q(\tau))^2}{2|\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)|}$$

$$= -\hat{e}_q(\tau) \cdot \vec{v}_q(\tau)$$

$$\text{Schritt 2: } \frac{\partial}{\partial t} |\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)| = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} |\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)| \quad (\text{I})$$

$$\text{Aber } \tau = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)|}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{d\tau}{dt} = 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)| \quad (\text{II})$$

$$\frac{1}{c} (\text{I}) + (\text{II}) \quad 1 = \frac{\partial \tau}{\partial t} \left( 1 - \hat{e}_q(\tau) \cdot \frac{\vec{v}_q(\tau)}{c} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= \beta_q(\tau)}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{1 - \hat{e}_q(\tau) \cdot \vec{\beta}_q(\tau)}$$

$$\dot{\vec{A}} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 c} \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\vec{\beta}_q(\tau)}{|\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)| - (\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)) \cdot \vec{\beta}_q(\tau)}$$

$$= \frac{q}{4\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{1 - \hat{e}_q \cdot \vec{\beta}_q} \left( \frac{\dot{\vec{\beta}}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)| (1 - \hat{e}_q \cdot \vec{\beta}_q)} \right.$$

$$\left. - \frac{\vec{\beta}_q(\tau) [(-\hat{e}_q \cdot \vec{v}_q) + \vec{v}_q \cdot \vec{\beta}_q - (\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \dot{\vec{\beta}}_q]}{|\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)|^2 (1 - \hat{e}_q \cdot \vec{\beta}_q)^2} \right)$$

$$= \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{(1 - \hat{e}_q \cdot \vec{\beta}_q)^3} \left( \frac{\vec{\beta}_q(\tau) (\hat{e}_q \cdot \vec{\beta}_q - \beta_q^2)}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^2} \right.$$

$$\left. + \frac{\dot{\vec{\beta}}_q (1 - \hat{e}_q \cdot \vec{\beta}_q) + \vec{\beta}_q (\hat{e}_q \cdot \dot{\vec{\beta}}_q)}{c |\vec{r} - \vec{r}_q|} \right)$$

Zwei Beiträge: 1. Geschwindigkeitsfeld

↳ existiert für gleichförmige Bewegung ( $\dot{\beta}_q = 0$ )

↳ Fällt proportional zu

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^2}$$

## 2. Beschleunigungsfeld

↳ Existiert nur für  $\beta \neq 0$

↳ Fällt wie  $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|}$

Analoge Rechnung für  $\vec{\nabla}\phi$  und  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(\hat{e}_q - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^2 (1 - \hat{e}_q \cdot \vec{\beta})^3} + \frac{\hat{e}_q \times [(\hat{e}_q - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{c |\vec{r} - \vec{r}_q| (1 - \hat{e}_q \cdot \vec{\beta})^3} \right]$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{e}_q \times \vec{E}/c$$

Beispiel 1: Ruhende Ladung ( $\beta = 0$ )

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{e}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|}, \quad \vec{B} = 0$$

Beispiel 2: Gleichförmige Bewegung ( $\beta = \text{const}$ )

$$\hat{e}_q(\tau) - \vec{\beta} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)}{|\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)|} - \frac{1}{c} \dot{\vec{r}}_q$$

$$\text{Nutze } \tau = t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)|$$

$$\Rightarrow t - \tau = \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)|$$

$$\begin{aligned} \text{und } \dot{\vec{r}}_q &= \frac{1}{t - \tau} (\vec{r}_q(t) - \vec{r}_q(\tau)) \\ &= c \frac{\vec{r}_q(t) - \vec{r}_q(\tau)}{|\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)|} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{e}_q(\tau) - \vec{\beta}_q = \frac{\vec{r} - \vec{r}_q(t)}{|\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)|}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_q(t))(1 - \beta^2)}{(|\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)| - (\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)) \cdot \vec{\beta})^3}$$

Eine langwierige Rechnung ergibt (siehe weiter unten)

$$\left( |\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)| - (\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)) \cdot \vec{\beta} \right)^2$$

$$= |\vec{r} - \vec{r}_q(t)|^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta(t))$$

$$\text{mit } \vec{\beta} \cdot \hat{e}_q(t) = \beta \cos \vartheta(t)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta(t))^{3/2}} \frac{\hat{e}_q(t)}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t)|^2}$$

↳ Hängt nur von  $t$  (nicht von  $x$ ) ab!

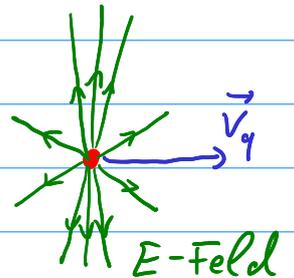
↳ Nicht mehr rotationssymmetrisch:

•  $\hat{e}_q(t) \parallel \vec{\beta}$  ( $\vartheta = 0$ ):

$$\vec{E} = \frac{q(1 - \beta^2)}{4\pi \epsilon_0} \frac{\hat{e}_q(t)}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t)|} = \frac{1}{\gamma^2} \vec{E}(\beta = 0)$$

•  $\hat{e}_q(t) \perp \vec{\beta}$  ( $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ )

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 (1 - \beta^2)^{1/2}} \frac{\hat{e}_q(t)}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t)|} = \gamma \vec{E}(\beta = 0)$$





$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(\hat{e}_q - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^2 (1 - \hat{e}_q \cdot \vec{\beta})^3} + \frac{\hat{e}_q \times [(\hat{e}_q - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{c |\vec{r} - \vec{r}_q| (1 - \hat{e}_q \cdot \vec{\beta})^3} \right]$$

Geschwindigkeitsfeld  
 $\sim |\vec{r} - \vec{r}_q|^{-2}$   
 Beschleunigungsfeld  
 $\sim |\vec{r} - \vec{r}_q|^{-1}$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{e}_q \times \vec{E}/c$$

Transportieren diese Felder Energie?

Poynting - Theorem:  $\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{S}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} U_{\text{em}} = - \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{S}$$

↑  
Gesamtenergie in V

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E} \times (\hat{e}_q \times \vec{E}) = \frac{1}{\mu_0 c} (E^2 \hat{e}_q - (\hat{e}_q \cdot \vec{E}) \vec{E})$$

Betrachte kugelförmiges Volumen mit Radius R

$$\oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{S} = \oint_{\partial V} R^2 d\Omega \hat{e}_r \cdot \vec{S}$$

Für  $R \gg |\vec{r}_q|$  ist  $\hat{e}_r \approx \hat{e}_q$  und  $|\vec{r} - \vec{r}_q| \approx R$

$$\Rightarrow \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{S} \approx \oint_{\partial V} d\Omega \frac{R^2}{\mu_0 c} (E^2 - (\hat{e}_r \cdot \vec{E})^2)$$

Für  $R \rightarrow \infty$  verschwinden die Beiträge vom Geschwindigkeitsfeld und nur das Beschleunigungsfeld trägt bei

$\Rightarrow$  Abstrahlung

$\hookrightarrow$  Erzeugung von em. Wellen durch beschleunigte Ladungen

Abgestrahlte Energie pro Raumwinkel

$$\frac{dP}{d\Omega} = R^2 \vec{S}_{\text{str}} \cdot \hat{e}_r = \frac{R^2}{\mu_0 c} E_{\text{str}}^2 \quad (\text{da } \vec{E}_{\text{str}} \cdot \hat{e}_r = 0)$$

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 = \frac{q^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c} \frac{|\hat{e}_r \times [(\hat{e}_r - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{e}_r)^6}$$

Energieverlust des Teilchens

$$\frac{dP'}{d\Omega} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c} \frac{|\hat{e}_r \times [(\hat{e}_r - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{e}_r)^5}$$

Für  $\beta \ll 1$  (nicht-relativistisch):

$$1 - \vec{\beta} \cdot \hat{e}_r \approx 1$$

$$\hat{e}_r - \vec{\beta} \approx \hat{e}_r \Rightarrow |\hat{e}_r \times [(\hat{e}_r - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]|^2$$

$$= |\hat{e}_r (\vec{\beta} \cdot \hat{e}_r) - \dot{\vec{\beta}}|^2 = \dot{\vec{\beta}}^2 \sin^2 \vartheta$$

Winkel zw.  $\dot{\vec{\beta}}$  und  $\hat{e}_r$

$$\Rightarrow \frac{dP'}{d\Omega} = \frac{q^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c} \beta^2 \sin^2 \vartheta$$

$$\Rightarrow P' = \int d\Omega \frac{dP'}{d\Omega} = \frac{q^2}{6\pi \epsilon_0 c} \beta^2 \quad \text{Larmor-Formel}$$

### 4.3 Strahlung einer Ladungsverteilung

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Näherung 1: • Ladungsverteilung räuml. begrenzt

• Messung in großem Abstand  $r \gg r'$

$$\Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| \approx r \left( 1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)$$

$$\rho(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|)$$

$$\approx \rho(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{e}_r \cdot \vec{r}'}{c})$$

$$\approx \rho(\vec{r}', t_0) + \dot{\rho}(\vec{r}', t_0) \left( \frac{\hat{e}_r \cdot \vec{r}'}{c} \right)$$

$$\text{mit } t_0 = t - \frac{r}{c}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & \frac{\varrho(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\
& = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\hat{e}_r \cdot \vec{r}'}{r} + \dots \right) \left( \varrho(\vec{r}', t_0) + \dot{\varrho}(\vec{r}', t_0) \left( \frac{\hat{e}_r \cdot \vec{r}'}{c} \right) + \dots \right) \\
& = \frac{\varrho(\vec{r}', t_0)}{r} + \frac{\varrho(\vec{r}', t_0)}{r^2} \hat{e}_r \cdot \vec{r}' + \underbrace{\frac{\dot{\varrho}(\vec{r}', t_0)}{r} \left( \frac{\hat{e}_r \cdot \vec{r}'}{c} \right) + \dots}_{= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\varrho(\vec{r}', t_0)}{r} \left( \frac{\hat{e}_r \cdot \vec{r}'}{c} \right)}
\end{aligned}$$

Näherung 2: • Höhere Terme vernachlässigbar:

$$\ddot{\varrho}(\vec{r}', t_0) \left( \frac{\hat{e}_r \cdot \vec{r}'}{c} \right)^2 \ll \dot{\varrho}(\vec{r}', t_0) \left( \frac{\hat{e}_r \cdot \vec{r}'}{c} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ddot{\varrho}(\vec{r}', t_0)}{\dot{\varrho}(\vec{r}', t_0)} \left( \frac{\hat{e}_r \cdot \vec{r}'}{c} \right) \ll 1$$

$\uparrow$  Relative Änderung von  $\dot{\varrho}(\vec{r}', t_0)$  pro Zeit  
 $\uparrow$  Zeit, die eine EM-Welle braucht, um die Ladungsverteilung zu durchlaufen

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi(\vec{r}, t) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left[ \int d^3r' \rho(\vec{r}', t_0) \right. \\ &\quad + \frac{\hat{e}_r}{r} \cdot \int d^3r' \vec{r}' \rho(\vec{r}', t_0) \\ &\quad \left. + \frac{\hat{e}_r}{r} \frac{d}{dt} \int d^3r' \vec{r}' \rho(\vec{r}', t_0) + \dots \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \underbrace{\frac{Q}{r} + \frac{\hat{e}_r \cdot \vec{p}(t_0)}{r^2}}_{\text{statische Multipolmomente}} + \frac{\hat{e}_r \cdot \dot{\vec{p}}(t_0)}{rc} + \dots \right] \end{aligned}$$

↑ neu!

Analog: 
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}', t_0) + \dots$$

Vorlesung 11: 
$$\int_V \partial_j (x_i j_j) d^3r = 0 \quad (i \text{ fest})$$

$$\Rightarrow \int_V (j_i + x_i \underbrace{\partial_j j_j}_{= \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\dot{\rho}}) d^3r = 0$$

$$\Rightarrow \int_V j_i d^3r = \int_V x_i \dot{\rho} d^3r = \dot{p}_i$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t_0)}{r} + \dots$$

# Fortsetzung: Strahlung

Wiederholung: Zeitabhängige Ladungsverteilung

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{r} + \frac{\hat{e}_r \cdot \vec{p}(t_0)}{r^2} + \frac{\hat{e}_r \cdot \dot{\vec{p}}(t_0)}{rc} \right]$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t_0)}{r} \quad t_0 = t - \frac{r}{c}$$

Zur Berechnung von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  benötigen wir

$$\vec{\nabla} t_0 = \vec{\nabla} \left( t - \frac{1}{c} r \right) = -\frac{1}{c} \hat{e}_r$$

Im Folgenden interessiert uns nur das Strahlungsfeld  $\sim \frac{1}{r}$

$\Rightarrow$  Statische Multipolmomente irrelevant

$$\vec{\nabla} \phi \approx \vec{\nabla} \frac{\hat{e}_r \cdot \dot{\vec{p}}(t_0)}{4\pi\epsilon_0 rc} \approx \frac{\hat{e}_r \cdot \ddot{\vec{p}}(t_0) \vec{\nabla} t_0}{4\pi\epsilon_0 rc} = -\frac{\hat{e}_r \cdot \ddot{\vec{p}}(t_0)}{4\pi\epsilon_0 rc^2} \hat{e}_r$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{\vec{p}}(t_0)}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\ddot{\vec{p}}(t_0)}{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 rc^2} \left( (\hat{e}_r \cdot \ddot{\vec{p}}) \hat{e}_r - \ddot{\vec{p}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 rc^2} \left( \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \ddot{\vec{p}}) \right)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{\nabla} \times \dot{\vec{p}}(t_0)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r c^2} (\vec{\nabla} t_0) \times \ddot{\vec{p}}(t_0)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r c^3} \hat{e}_r \times \ddot{\vec{p}}$$

$$= \frac{1}{c} \hat{e}_r \times \vec{E}$$

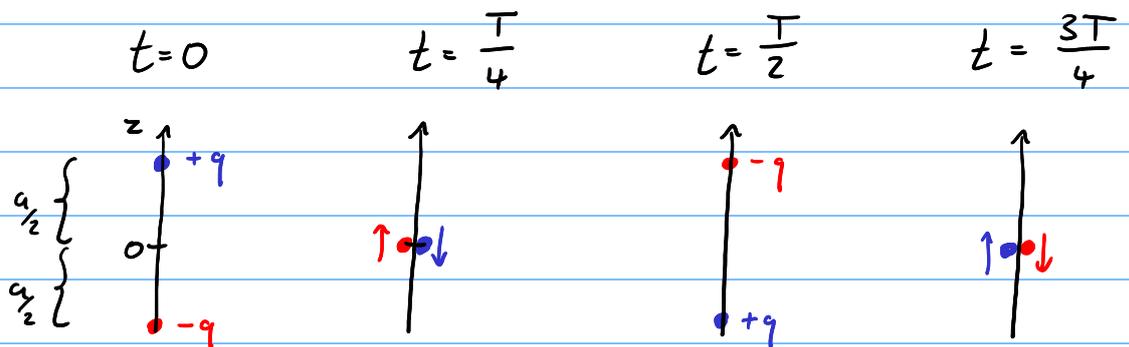
→ Abstrahlung erfordert zeitabh. Dipolmoment

$$\rightarrow \vec{E} \perp \vec{B} \perp \hat{e}_r$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 r^2 c^3} \hat{e}_r |\ddot{\vec{p}}|^2 \sin^2 \vartheta$$

↑  
 Winkel zwischen  $\ddot{\vec{p}}$   
 und  $\hat{e}_r$

Beispiel: Oszillierende Punktladungen



$$\vec{p} = a \hat{e}_z q \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = a \hat{e}_z q \cos(\omega t)$$

↑  
 $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\ddot{\vec{p}}(t) = -a \hat{e}_z q \omega^2 \cos(\omega t)$$

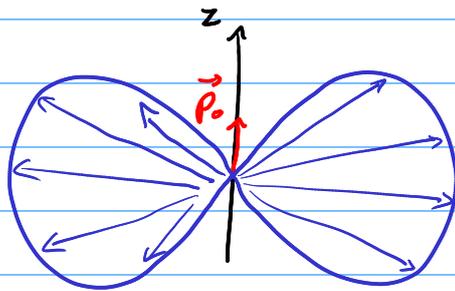
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r c^2} (\hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \ddot{\vec{p}}(t_0))) =$$

$$\hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \hat{e}_z) = \sin\vartheta \hat{e}_\vartheta \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\cos(\omega t - \frac{r}{c})}{r} \sin^2\vartheta \hat{e}_\vartheta$$

↑ Kugelwelle: Kugelförmige Phasenfläche, die sich mit Lichtgeschw. nach außen bewegt

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{\overbrace{a^2 q^2 \omega^4}^{= P_0^2}}{16\pi^2 \epsilon_0 r^2 c^3} \underbrace{\cos^2(\omega t - \frac{r}{c})}_{= \frac{1}{2} \text{ im zeitl. Mittel}} \sin^2\vartheta \hat{e}_r$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = r^2 \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{e}_r = \frac{P_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2\vartheta$$



Strahlungscharakteristik

Allgemein: Oszillierende Ladungsverteilung

$$s_c(\vec{r}, t) = s_0(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (s = \text{Re } s_c)$$

$$\vec{j}_c(\vec{r}, t) = \vec{j}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (\vec{j} = \text{Re } \vec{j}_c)$$

Annahmen: • Ladungsverteilung räumlich beschränkt:

$$\rho_0(\vec{r}') = 0 \quad \text{für} \quad r' > R$$

• Messung in großem Abstand:  $r \gg R$

• Gesamtladung  $Q(t) = \int d^3r' \rho_0(\vec{r}', t) = 0$

↳ Notwendig für Ladungserhaltung

• Langsame Oszillation

$$\frac{\ddot{g}(\vec{r}', t_0)}{\dot{g}(\vec{r}', t_0)} \left( \frac{\hat{e}_r \cdot \vec{r}'}{c} \right) < \omega \frac{R}{c} \ll 1$$

$$\Leftrightarrow R \ll \lambda \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

↳ Ausdehnung klein gegenüber der Wellenlänge der emittierten Strahlung

$$\Rightarrow \phi_c(\vec{r}, t) \approx \left[ \frac{\hat{e}_r \cdot \vec{p}_c(t_0)}{r^2} + \frac{\hat{e}_r \cdot \dot{\vec{p}}_c(t_0)}{rc} + \dots \right]$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \vec{p}_c(t_0) &= \int d^3r' \rho_0(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' = e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})} \int d^3r' \rho_0(\vec{r}') \vec{r}' \\ &= e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})} \vec{p}_0 \end{aligned}$$

$$\dot{\vec{p}}_c(t_0) = \frac{d}{dt} \vec{p}_c(t_0) = (-i\omega) e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})} \vec{p}_0 = (-i\omega) \vec{p}_c(t_0)$$



Nahfeld:  $R \ll r \ll \lambda$

Fernfeld:  $R \ll \lambda \ll r$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{c} \ll \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\hat{e}_r \cdot \ddot{\vec{p}}_c(t_0)}{r^2} \right| \ll \left| \frac{\hat{e}_r \cdot \dot{\vec{p}}_c(t_0)}{rc} \right|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\hat{e}_r \cdot \ddot{\vec{p}}_c(t_0)}{r^2} \right| \gg \left| \frac{\hat{e}_r \cdot \dot{\vec{p}}_c(t_0)}{rc} \right|$$

Im Fernfeld dominiert die Zeitableitung

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{E}_c &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r c^2} (\hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \ddot{\vec{p}}_c(t_0))) \\ &= \underbrace{\frac{-\omega^2}{4\pi\epsilon_0 r c^2} (\hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \vec{p}_0))}_{= \vec{E}_0} e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_c &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r c^3} (\hat{e}_r \times \ddot{\vec{p}}_c(t_0)) \\ &= \underbrace{\frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0 r c^3} (\hat{e}_r \times \vec{p}_0)}_{= \vec{B}_0} e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})} \end{aligned}$$

→ Kugelwelle

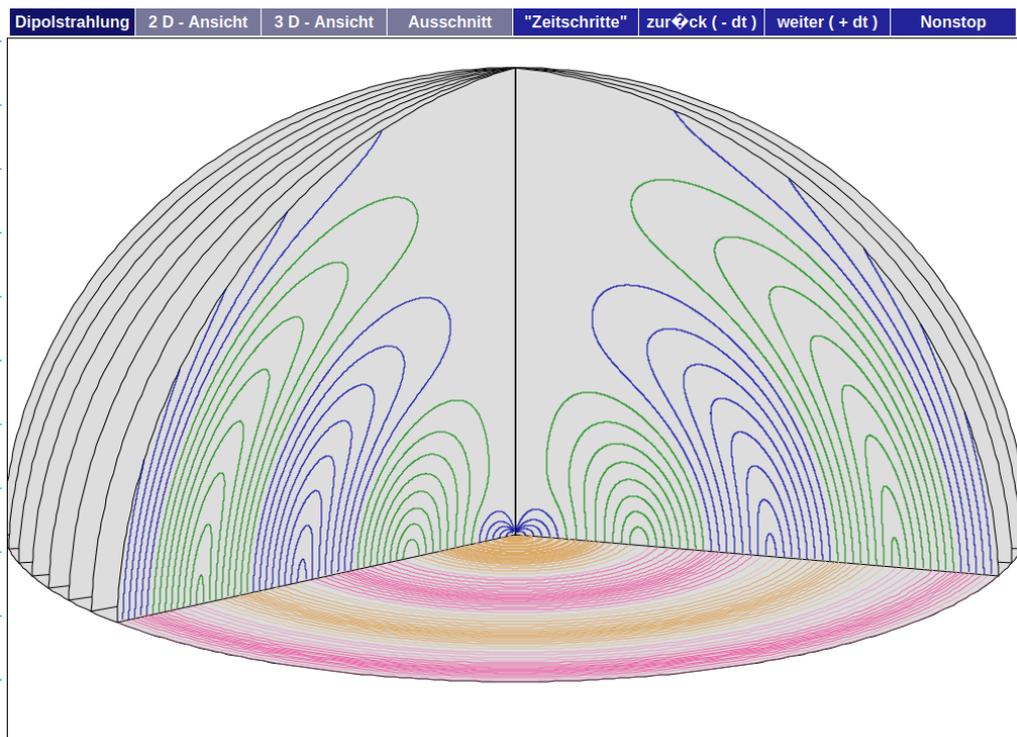
$$\rightarrow \vec{E}_0, \vec{B}_0 \perp \hat{e}_r, \quad \vec{E}_0 \perp \vec{B}_0$$

$$\begin{aligned}
\langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{4\mu_0} (\vec{E}_0 \times \vec{B}_0^* + \vec{E}_0^* \times \vec{B}_0) \\
&= -\frac{c}{2\mu_0} \operatorname{Re} \{ (\hat{e}_r \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_0^* \} \\
&= \frac{c}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left\{ \hat{e}_r (\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_0^*) - \underbrace{\vec{B}_0 (\hat{e}_r \cdot \vec{B}_0^*)}_{=0} \right\} \\
&= \frac{c \hat{e}_r}{2\mu_0} |\vec{B}_0|^2 = \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^2 \vartheta}{32\pi^2 \epsilon_0 r^2 c^3} \hat{e}_r
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = r^2 \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{e}_r = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \vartheta$$

↳ Genau wie für oszillierende Punktladungen

↳ Hertz'scher Dipol



## 4.4 Zusammenfassung Elektrodynamik

- Allgemeine Maxwell-Gleichungen

$$\square \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}$$

- Im Vakuum: EM-Wellen

$$A_c(\vec{r}, t) = A_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} \quad \text{mit } \omega = c|\vec{k}|$$

$$A(\vec{r}, t) = \text{Re } A_c(\vec{r}, t)$$

- Zeitabhängige Ladungsverteilung:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \mu_0 \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- Strahlung:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\dot{\vec{p}}(t_0)}{rc} \quad \text{mit } t_0 = t - \frac{r}{c}$$

$$\uparrow \text{Strahlungsfeld: } |\vec{A}| \sim \frac{1}{r}$$

$$|\vec{S}| \sim \frac{1}{r^2}$$

⇒ Energie wird ins Unendliche abgestrahlt

Zentrale Vorhersage: EM-Wellen breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  aus

Aber in welchem Bezugssystem?

Galilei-Transformation: Für zwei Inertialsysteme  $I, I'$  mit Relativgeschwindigkeit  $\vec{v}$  gilt:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \quad \text{und} \quad t' = t$$

Bewegt sich ein Objekt mit Geschwindigkeit  $\vec{w}$ , so gilt  $\vec{r} = \vec{w} \cdot (t - t_0) + \vec{r}_0$

$$\Rightarrow \vec{r}' = \vec{w}' (t' - t_0) + \vec{r}'_0$$

$\uparrow \vec{w}' = \vec{w} - \vec{v}$                        $\uparrow \vec{r}'_0 = \vec{r}_0 - \vec{v}t_0$

↳ Im Bezugssystem  $I'$  hat das Objekt Geschwindigkeit  $\vec{w}'$

⇒ Lichtgeschwindigkeit abhängig vom Bezugssystem

⇒ Maxwell-Gleichungen nicht Galilei-invariant

# 5. Spezielle Relativitätstheorie

Wiederholung: Galilei-Transformation für Inertialsysteme mit Relativgeschwindigkeit  $\vec{v}$ :

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \quad \text{und} \quad t' = t$$

$$\Rightarrow \vec{w}' = \vec{w} - \vec{v}$$

Vorhersage: Lichtgeschwindigkeit abhängig vom Inertialsystem?

↳ Maxwell-Gleichungen gelten nur in speziellem Inertialsystem (Äther)?

Experiment: Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich (Michelson-Morley)

⇒ Einstein'sches Relativitätsprinzip

1. Äquivalenzprinzip: Die physikalischen Gesetze gelten in allen Inertialsystemen
2. Lichtgeschwindigkeit:  $c$  ist in allen Inertialsystemen gleich und unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle

⇒ Neues Transformationsgesetz benötigt

## 5.1 Lorentz-Transformation

Betrachte zwei Inertialsysteme  $I, I'$  mit Relativgeschwindigkeit  $\vec{v}$

Ein Ereignis ist ein Punkt in der vierdimensionalen Raumzeit, d.h. ein bestimmter Ort  $\vec{r}$  und Zeitpunkt  $t$ .

Beispiel: • Bei  $\vec{r} = \vec{r}_0$  und  $t = t_0$  wird ein Lichtpuls ausgesandt.

• Bei  $\vec{r} = \vec{r}_1$  und  $t = t_1$  wird der Lichtpuls detektiert

Der Abstand  $s$  zweier Ereignisse ist gegeben durch

$$s^2 = c^2(t_1 - t_0)^2 - (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)^2$$

Für den Lichtpuls gilt:  $|\vec{r}_1 - \vec{r}_0| = c(t_1 - t_0)$

$$\Rightarrow s^2 = 0$$

Nach dem Relativitätsprinzip muss dies auch in  $I'$  gelten:

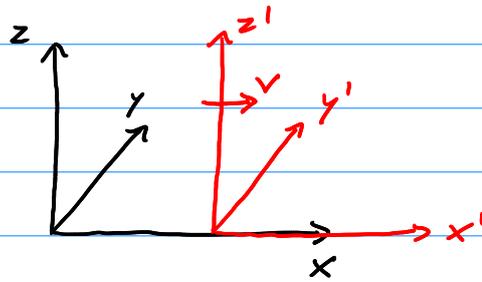
$$(s')^2 = c^2(t'_1 - t'_0)^2 - (r'_1 - r'_0)^2 = 0$$

Zur Vereinfachung wählen wir den Ursprung beider Koordinatensysteme so, dass

$$t_0 = t_0' = 0, \quad \vec{r}_0 = \vec{r}_0' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Außerdem drehen wir die Koordinatensysteme so dass  $\vec{v} = v \hat{e}_x$  und betrachten

$$r_i = \begin{pmatrix} x_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x_i = ct_i$$



Gesucht:  $x_i'$  und  $t_i'$  so dass  $(s')^2 = 0$

Annahme: Die Transformation ist linear

$$\begin{pmatrix} ct_i' \\ x_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_i \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Act_i + Bx_i \\ Cct_i + Dx_i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (s')^2 = (Act_i + Bx_i)^2 - (Cct_i + Dx_i)^2$$

$$= c^2(A^2 - C^2)t_i^2 + 2(AB - CD)ct_ix_i$$

$$- (D^2 - B^2)x_i^2$$

$$\Rightarrow (s')^2 = 0 \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} \text{I) } A^2 - C^2 = 1 \\ \text{II) } D^2 - B^2 = 1 \\ \text{III) } AB - CD = 0 \end{array}$$

$$\text{I) } \Rightarrow A = \cosh \chi, \quad C = -\sinh \chi$$

$$\text{II) } \Rightarrow D = \cosh \psi, \quad B = -\sinh \psi$$

$$\text{III) } \Rightarrow \chi = \psi$$

Außerdem wissen wir, dass sich der Ursprung von  $I'$  in  $I$  mit Geschwindigkeit  $v \hat{e}_x$  bewegt:

$$0 = x' = \cosh \chi x - \sinh \chi ct$$

$\uparrow$   
 $x = vt$

$$\Rightarrow \cosh \chi vt = \sinh \chi ct \Rightarrow \tanh \chi = \frac{v}{c} \equiv \beta$$

$$\Rightarrow \cosh \chi = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \chi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \gamma$$

$$\Rightarrow \sinh \chi = \tanh \chi \cosh \chi = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \beta \gamma$$

$$\Rightarrow ct' = \gamma ct - \beta \gamma x$$

$$x' = \gamma x - \beta \gamma ct$$

Lorentz-Transformation

Betrachte Inertialsystem  $I''$  mit Geschwindigkeit  $-v\hat{e}_x$  relativ zu  $I'$

Erwartung:  $I'' = I$

$$\begin{aligned}\text{Probe: } ct'' &= \gamma' ct' - \beta' \gamma' x' \\ &= \gamma' (\gamma ct - \beta \gamma x) - \beta' \gamma' (\gamma x - \beta \gamma ct) \\ \beta' &= -\beta, \gamma' = \gamma \\ &= \gamma^2 ct - \beta \gamma^2 x + \beta \gamma^2 x - \beta^2 \gamma^2 ct \\ &= \gamma^2 (1 - \beta^2) ct = \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} ct = ct\end{aligned}$$

und analog für  $x''$

## 5.2 Anwendungen

### 5.2.1 Zeitdilatation

Betrachte Uhr, die in  $I$  ruht, d.h.  $x_1 = x_0$

$$\Rightarrow \Delta t' = t_1' - t_0' = \gamma (t_1 - t_0) - \beta \gamma \underbrace{(x_1 - x_0)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \Delta t' = \gamma \Delta t > \Delta t$$

$\Rightarrow$  In  $I'$  wird eine größere Zeitspanne gemessen als in  $I$

⇒ Bewegte Uhren gehen langsamer

Bemerkung: Für die beiden Messereignisse gilt

$$s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 > 0$$

⇒ zeitartiger Abstand

## 5.2.2 Längenkontraktion

Betrachte einen Maßstab entlang der  $x$ -Achse, der in  $I'$  ruht und eine Länge  $\Delta x' = x'_1 - x'_0$  hat. In  $I'$  werden beide Enden gleichzeitig gemessen:  $t_1 = t_0$ .  
Es gilt

$$\Delta x' = \gamma \Delta x - \beta \gamma c \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} < \Delta x' \quad \overset{=0}{\text{}}$$

⇒ Bewegte Maßstäbe erscheinen verkürzt

Bemerkungen: - Für die beiden Messereignisse gilt

$$s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 < 0$$

⇒ raumartiger Abstand

- In  $I'$  gilt

$$\begin{aligned}c \Delta t' &= \gamma c \Delta t - \beta \gamma \Delta x \\ &= 0 - \beta \Delta x' \neq 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Die beiden Messereignisse finden nicht zeitgleich statt!

### 5.2.3 Geschwindigkeitsaddition

Betrachte ein Teilchen mit Geschwindigkeit  $\vec{u}' = u' \hat{e}_x$  in  $I'$

$$u' = \frac{dx'}{dt'} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{dx}{dt}$$

$$\begin{aligned}\text{mit } c dt &= \gamma c dt' + \beta \gamma dx' \\ &= (\gamma c + \beta \gamma u') dt'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dx &= \gamma dx' + \beta \gamma c dt' \\ &= (\gamma u' + \beta \gamma c) dt'\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{u' + \beta c}{1 + \beta u'/c}$$

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}}$$

Bemerkungen: - Für  $c \rightarrow \infty$  folgt  $u = u' + v$   
wie in der Galilei - Transformation

- Für  $u' < c$  und  $v < c$  folgt  $u < c$

- Für  $u' = c$  folgt  $u = \frac{c+v}{1+\frac{v}{c}} = c$

$\Rightarrow$  Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

## 5.3 Vierervektoren

Erinnerung: Skalarprodukt von 3d-Vektoren:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$$

↙ 3x3-Matrix  
aus SO(3)

Unter einer Rotation  $M$  gilt

$$\vec{a}' = M \cdot \vec{a} \quad \text{bzw.} \quad a_i' = M_{ij} b_j$$

$$\Rightarrow \vec{a}' \cdot \vec{b}' = (M_{ij} a_j) (M_{ik} b_k)$$

$$= a_j b_k \underbrace{M_{ij} M_{ik}} = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= (M^T M)_{jk} = \delta_{jk}$$

$\Rightarrow$  Skalarprodukt invariant unter Rotation

Jetzt: Analoge Konstruktion für 4d Raumzeit

Ziel: Abstand  $s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$   
invariant unter Lorentztransform.

Definitionen: • 4-Vektor:  $a = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vec{a} \end{pmatrix}$  mit Komponenten  $a^\mu$   
( $\mu=0,1,2,3$ )

• Minkowski-Metrik:  $\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

- 4- Skalarprodukt:  $a \cdot b = a^\mu \eta_{\mu\nu} b^\nu$   
 $= a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$

Beispiel:  $x = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} \Rightarrow s^2 = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu$

- Kovarianter 4- Vektor:  $a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu$

$\Rightarrow x_\mu = \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{r} \end{pmatrix} \Rightarrow s^2 = x^\mu x_\mu$

Unter einer Lorentz Transformation wird

$a' = \Lambda a$  bzw.

$a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu$

$\uparrow$   
 $4 \times 4$  Matrix

Die Invarianz des 4- Skalarproduktes bedeutet

$$a' \cdot b' = a'^\mu \eta_{\mu\nu} b'^\nu = \Lambda^\mu_\sigma a^\sigma \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho b^\rho$$

$$= a^\sigma b^\rho \Lambda^\mu_\sigma \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho \stackrel{!}{=} a \cdot b$$

$\Rightarrow \Lambda^\mu_\sigma \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho = \eta_{\sigma\rho}$  bzw.  $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$

Dies ist die mathematische Definition der Lorentztransformation. Wir kennen zwei Beispiele:

- Boost in x- Richtung:  $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

- Rotation:  $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \\ & M \end{pmatrix}$

↑ 3x3 Matrix  
mit  $M^T M = \mathbb{1}$

Lorentztransf. bilden eine Gruppe, genannt  $SO(3,1)$

$\Rightarrow \Lambda_1, \Lambda_2$  ist auch eine Lorentztransf.

↳ Boosts in beliebige Richtung durch Kombination von Boost und Rotation

$\Rightarrow \Lambda^{-1}$  ist auch eine Lorentztransf.

↳  $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Rightarrow \Lambda^T \eta \Lambda \eta^{-1} = \mathbb{1} \Rightarrow \eta \Lambda \eta^{-1} = (\Lambda^T)^{-1}$

$\Rightarrow \Lambda^{-1} = (\eta \Lambda \eta^{-1})^T$

Beispiel:  $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & & \\ \gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

Notation in Komponenten:  $\Lambda^{-1} = (\Lambda_{\mu}{}^{\nu})$ ,  $\eta^{-1} = (\eta^{\mu\nu})$

$\Rightarrow \Lambda_{\mu}{}^{\nu} = \eta_{\mu\sigma} \Lambda^{\sigma}{}_{\rho} \eta^{\rho\nu}$

$\Rightarrow \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \Lambda^{\sigma}{}_{\nu} = \delta_{\mu}^{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

Es folgt die Transformationsregel für kovariante 4-Vektoren:

$$a'_\mu = \Lambda_{\mu}^{\nu} a_{\nu}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a'^{\mu} b'_\mu &= \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu} \Lambda_{\mu}^{\sigma} b_{\sigma} \\ &= \delta_{\nu}^{\sigma} a^{\nu} b_{\sigma} = a^{\nu} b_{\nu} \end{aligned}$$

Merkmale:  
- Ein Index, über den summiert wird, muss immer einmal oben und einmal unten stehen.

- Die (inverse) Minkowski-Metrik verwandelt obere Indizes in untere (und umgekehrt):

$$x_{\mu} = \eta_{\mu\nu} x^{\nu}$$

$$\Rightarrow x^{\mu} x_{\mu} = x^{\mu} \eta_{\mu\nu} x^{\nu}$$

$$= x_{\nu} \eta^{\nu\mu} x_{\mu} = x_{\nu} x^{\nu}$$

- Indizes, über die nicht summiert wird, müssen auf beiden Seiten der Gleichung die gleiche Position haben:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

$$x_{\mu} = \eta_{\mu\nu} x^{\nu}$$

- Ein Objekt  $T^{\mu\nu}$  mit zwei Lorentz-Indizes heißt (Rang-2) Lorentz-Tensor

Unter einer Lorentz-Transformation gilt

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\rho T^{\sigma\rho}$$

Beispiel: Sind  $a^\mu$  und  $b^\nu$  4-Vektoren, dann ist  $T^{\mu\nu} = a^\mu b^\nu$  ein Lorentz-Tensor

$\Rightarrow$  Für einen Lorentz-Tensor  $T^{\mu\nu}$  und kovariante 4-Vektoren  $x_\mu, y_\nu$  ist  $T^{\mu\nu} y_\nu$  ein 4-Vektor und  $T^{\mu\nu} x_\mu y_\nu$  ist Lorentz-invariant

## 5.3.1 Beispiele

4-Gradient:  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}$

Betrachte Lorentztransf.:  $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$

$$\Rightarrow \partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu$$

$\hookrightarrow \partial_\mu$  ist ein kovarianter 4-Vektor

$$\Rightarrow \partial_\mu x^\nu = \delta_\mu^\nu \text{ ist Lorentz-invariant}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu = \partial_\mu \partial_\nu \eta^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \square$$

ist Lorentz-invariant

4 - Geschwindigkeit : Betrachte Objekt mit Geschwindigkeit  $\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{x}$  im Inertialsystem I

$v^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$  ist kein 4-Vektor, da

$$v'^\mu = \frac{dx'^\mu}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \frac{dt}{dt'} \Lambda^\mu{}_\nu v^\nu \neq \Lambda^\mu{}_\nu v^\nu$$

Alternative: Betrachte mitbewegtes Inertialsystem I'

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta t = \gamma \Delta t' \quad (\text{Zeitdilatation})$$

Die Zeit im Ruhesystem heißt Eigenzeit  $\tau$

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{r}^2} = \frac{1}{c} ds$$

$\Rightarrow d\tau$  ist Lorentz-invariant

$$\Rightarrow u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma v^\mu \text{ ist ein 4-Vektor}$$

Es gilt:  $u^\mu = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix} \Rightarrow u^\mu u_\mu = \gamma^2 (c^2 - \vec{v}^2) = c^2$

4-Impuls: Als Ruhemasse  $m$  bezeichnet man die Masse eines Teilchens im Ruhesystem

↳  $m$  ist Lorentz-invariant

$$\Rightarrow p^\mu = m u^\mu = \begin{pmatrix} \gamma m c \\ \gamma m \vec{v} \end{pmatrix} = \gamma m c \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\beta} \end{pmatrix}$$

ist ein 4-Vektor

Es gilt:  $p^\mu p_\mu = m^2 u^\mu u_\mu = m^2 c^2$

Mit  $p^\mu = \begin{pmatrix} p^0 \\ \vec{p} \end{pmatrix}$  folgt im nichtrel. Grenzfall:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \approx m \vec{v} = \text{nichtrel. Impuls}$$

$$c p^0 = \gamma m c^2 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m c^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

= Ruheenergie + kinetische Energie (nichtrel.)

$\Rightarrow c p^0$  entspricht der Gesamtenergie  $E$

Es gilt:  $(p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2$

$$\Rightarrow E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$$

Aus der Energie- und Impulserhaltung folgt:

$$\sum p^\mu = \text{const}$$

Bemerkung: Auch masselose Teilchen (wie z.B. Photonen) besitzen Energie und Impuls. In diesem Fall gilt

$$p^\mu p_\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad E = |\vec{p}|c$$

Nachtrag: Lorentz-Transformation als  
Matrixmultiplikation

$$\begin{aligned}F^{\mu\nu'} &= \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^{\nu'}_\sigma F^{\sigma\sigma} \\&= \Lambda^\mu_\sigma F^{\sigma\sigma} \Lambda^{\nu'}_\sigma \\&= (\Lambda F \Lambda^T)^{\mu\nu}\end{aligned}$$

Aber  $(\Lambda^T)^\mu_\nu \neq \Lambda_\nu^\mu$

$$\begin{aligned}\Lambda_\nu^\mu &= \gamma_{\nu\sigma} \Lambda^\sigma_\sigma \gamma^{\sigma\mu} \\&= (\gamma \Lambda \gamma^{-1})_\nu^\mu\end{aligned}$$

Es gilt  $\Lambda^T \gamma \Lambda \gamma^{-1} = \mathbb{1}$

$$\Rightarrow \gamma \Lambda \gamma^{-1} = (\Lambda^T)^{-1}$$

$$\Rightarrow \Lambda_\nu^\mu = \left( (\Lambda^T)^{-1} \right)_\nu^\mu = \left( (\Lambda^{-1})^T \right)_\nu^\mu$$

$$\Rightarrow a_\nu' = \Lambda_\nu^\mu a_\mu = \left( (\Lambda^{-1})^T \cdot a \right)_\nu = \left( (a^T \Lambda^{-1})^T \right)_\nu$$

Erinnerung: Skalarprodukt:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T \cdot \vec{b}$

$$\begin{aligned}\text{Rotation:} \quad \vec{b}' &= M \vec{b} \\ \vec{a}' &= M \vec{a}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{a}'^T = \vec{a}^T M^T = \vec{a}^T M^{-1} \Rightarrow \vec{a}' = \left( \vec{a}^T M^{-1} \right)^T$$

## 5.4 Elektrodynamik in SRT

Wiederholung: • 4-Vektoren  $a^\mu$ :  $a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu$

Beispiele:  $x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$   $u^\mu = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$

• Kovariante 4-Vektoren:  $a'_\mu = \Lambda_\mu^\nu a_\nu$

Beispiel:  $\partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}$   $(\Lambda_\mu^\nu) = \Lambda^{-1}$

• Lorentz-Tensor:  $T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\rho T^{\sigma\rho}$

Ziel: Gleichungen der Elektrodynamik durch Lorentz-Vektoren und -Tensoren ausdrücken  
↳ Gleiche Form in allen Inertialsystemen

### 5.4.1 Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

lässt sich schreiben als

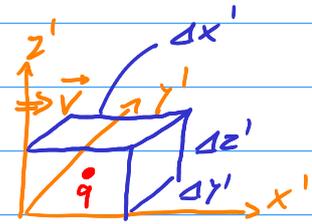
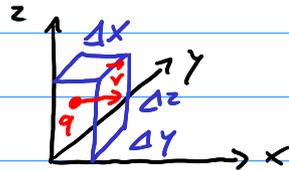
$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{mit} \quad j^\mu = (c\rho, \vec{j})$$

Damit diese Gleichung Lorentz-invariant ist, muss  $j^\mu$  ein 4-Vektor sein

Erinnerung:  $\vec{j} = \rho \vec{v} \Rightarrow j^\mu = \rho v^\mu = \frac{\rho}{\gamma} u^\mu$

$\Rightarrow j^\mu$  ist ein 4-Vektor, falls  $\frac{\rho}{\gamma}$  Lorentz-invariant ist

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$



Mitbewegtes Inertialsystem  
 $\Rightarrow$  Ladung ruht

$$\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma} \Delta x' \quad (\text{Längenkontraktion}), \quad \Delta y = \Delta y', \quad \Delta z = \Delta z'$$

$$\Rightarrow \Delta V' = \gamma \Delta V \Rightarrow \rho' = \frac{\rho}{\gamma}$$

$\frac{\rho}{\gamma}$  entspricht der Ladungsdichte im Ruhesystem der Ladung  $\Rightarrow$  Lorentz-invariant

## 5.4.2 4 - Potential

Erinnerung:  $-\Delta\phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho = \mu_0 c^2 \rho$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} \right) = \mu_0 \vec{j}$$

Behauptung: Mit  $A^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$  lassen sich diese Gleichungen schreiben als

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \mu_0 j^\mu$$

$$\partial^\mu = \gamma^{\mu\nu} \partial_\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

Beweis: • Betrachte  $\nu = 0$ :

$$\begin{aligned} & \partial_\mu (\partial^\mu A^0 - \partial^0 A^\mu) \\ &= \partial_0 (\partial^0 A^0 - \partial^0 A^0) + \partial_i (\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) \quad \leftarrow \text{Summe über } i=1,2,3 \\ &= \vec{\nabla} \left( -\vec{\nabla} \frac{1}{c} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) \\ &= \frac{1}{c} \left( -\Delta \phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \vec{A} \right) = \mu_0 c \mathcal{S} = \mu_0 j^0 \end{aligned}$$

• Betrachte  $\nu = i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} & \partial_\mu (\partial^\mu A^i - \partial^i A^\mu) \\ &= \partial_0 (\partial^0 A^i - \partial^i A^0) + \partial_j (\partial^j A^i - \partial^i A^j) \\ &= \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}_i + \vec{\nabla}_i \frac{\partial}{\partial t} \phi \right) + \underbrace{\vec{\nabla}_j (\vec{\nabla}_i \vec{A}_j - \vec{\nabla}_j \vec{A}_i)}_{= (\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}))_i} \\ &= \mu_0 \vec{j}_i = \mu_0 j^i \end{aligned}$$

$\Rightarrow A^\mu$  ist ein 4-Vektor!

Erinnerung: Eichtransformation

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t} \chi$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$$

Daraus ergibt sich die Eichtransformation für das 4-Potential:

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$$

Erinnerung: Lorenz-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0$$

↳ kann geschrieben werden als

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

⇒ Lorenz-Eichung ist  
Lorentz-invariant (gilt in  
allen Inertialsystemen)

In der Lorenz-Eichung gilt:

$$\begin{aligned} \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu \\ &= \square A^\nu = \mu_0 j^\nu \end{aligned}$$

(siehe 3.4.2, Vorlesung 13)

Achtung: Die Coulomb-Eichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  ist nicht Lorentz-invariant und gilt nur in bestimmten Inertialsystemen

### 5.4.3 Feldstärke tensor

Definition:  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

$\Rightarrow F^{\mu\nu}$  ist eichinvariant, da

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu$$

$$= \partial^\mu (A^\nu - \partial^\nu \chi) - \partial^\nu (A^\mu - \partial^\mu \chi)$$

$$= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \cancel{\partial^\mu \partial^\nu \chi} + \cancel{\partial^\nu \partial^\mu \chi}$$

$$= F^{\mu\nu}$$

$\hookrightarrow F^{\mu\nu}$  physikalisch messbar?

In Komponenten:  $F^{00} = \partial^0 A^0 - \partial^0 A^0 = 0$

$$F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i$$

$$= -\vec{\nabla}_i \frac{1}{c} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}_i$$

$$= \vec{E}_i / c = -F^{0i}$$

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i$$

$$= \vec{\nabla}_j \vec{A}_i - \vec{\nabla}_i \vec{A}_j$$

$$= -\epsilon_{ijk} \vec{B}_k$$

$$\Rightarrow (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen lassen sich schreiben als

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$

Es folgt die Kontinuitätsgleichung, da

$$\partial_\nu j^\nu = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\partial_\nu \partial_\mu}_{\text{symmetrisch}} F^{\mu\nu} = 0 \quad \uparrow \text{antisymmetrisch}$$

Wir können jetzt berechnen, wie sich E- und B-Felder unter Lorentz-Transformationen verhalten:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\rho F^{\sigma\rho}$$

Beispiel: Lorentz-Boost in x-Richtung

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{E}'_i/c = F'^{i0} = \Lambda^i_s \Lambda^0_\sigma F^{s\sigma}$$

Betrachte zuerst  $\vec{E}'_{||} = \vec{E}_{||}$

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{||}/c &= F'^{10} = \Lambda^1_s \Lambda^0_\sigma F^{s\sigma} \\ &= \Lambda^1_0 \Lambda^0_0 F^{00} + \Lambda^1_1 \Lambda^0_0 F^{10} \\ &\quad + \Lambda^1_0 \Lambda^0_1 F^{01} + \Lambda^1_1 \Lambda^0_1 F^{11} \\ &= \gamma^2 F^{10} + \beta^2 \gamma^2 F^{01} = \gamma^2 (1 - \beta^2) F^{10} \\ &= \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} \vec{E}_1/c = \vec{E}_{||}/c \end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{E}_{||}$  bleibt unverändert

Jetzt:  $\vec{E}'_{\perp} = \vec{E}_{\perp}$  mit  $i = 2, 3$

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\perp}/c &= \Lambda^i_s \Lambda^0_\sigma F^{s\sigma} \rightarrow \Lambda^i_s = \begin{cases} 1 & \text{für } s=i \\ 0 & \text{für } s \neq i \end{cases} \\ &= \Lambda^0_\sigma F^{i\sigma} = \Lambda^0_0 F^{i0} + \Lambda^0_j F^{ij} \\ &= \gamma F^{i0} - \beta \gamma F^{i1} \quad \uparrow \text{ nur Beitrag für } j=1 \\ &= \gamma \vec{E}_{\perp}/c - \beta \gamma \underbrace{\epsilon_{ijk} B_k}_{= (\vec{B} \times \hat{e}_x)_i} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{E}'_{\perp} = \gamma (\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Analoge Rechnung für  $\vec{B}$ :

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma (\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma \left( \vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2} \right)$$

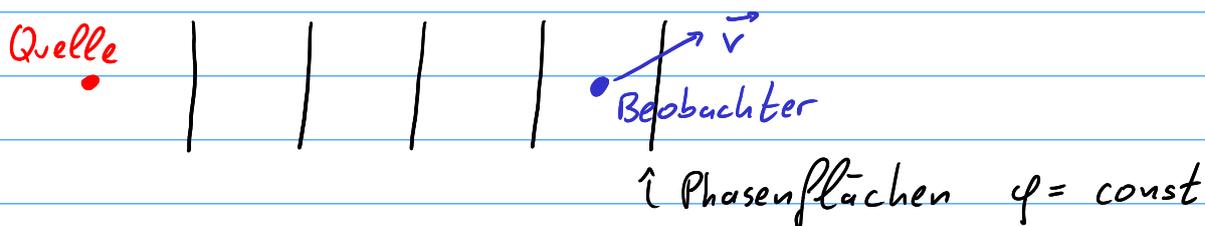
## 5.4 Elektrodynamik in SRT (Fortsetzung)

### 5.4.4 Doppler-Effekt

Betrachte EM-Welle im Bezugssystem I des Senders.

$$\text{Phase: } \varphi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \quad \text{mit} \quad \omega = c |\vec{k}|$$
$$\Leftrightarrow \omega^2 - c^2 k^2 = 0$$

Was sieht ein Beobachter mit Relativgeschw.  $\vec{v}$  im Bezugssystem I'?



Letzte Vorlesung:  $F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\rho F^{\sigma\rho}$

$$\vec{E} = \vec{B} = 0 \Rightarrow F^{\sigma\rho} = 0$$
$$\Rightarrow F'^{\mu\nu} = 0$$
$$\Rightarrow \vec{E}' = \vec{B}' = 0$$

$$\Rightarrow \text{Phase } \varphi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = k_\mu x^\mu \quad \text{mit } k_\mu = \begin{pmatrix} \omega/c \\ -\vec{k} \end{pmatrix}$$

ist Lorentz-invariant

$$\Rightarrow k_\mu \text{ ist ein kovarianter 4-Vektor}$$

$$\Rightarrow k_\mu k^\mu = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0 \quad \text{ist Lorentz-invariant}$$

In  $I'$  gilt:  $\omega' = c |\vec{k}'|$

↳ Lichtgeschw. ist Lorentz-invariant

Aber:  $\omega' \neq \omega$  und  $\vec{k}' \neq \vec{k}$ !

Wähle Koordinatensystem so dass

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{k} = \begin{pmatrix} k \cos \vartheta \\ k \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{k}'_m) = (L_m^{\nu}) (\vec{k}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & & \\ \beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ -k \cos \vartheta \\ -k \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{= \omega/c}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma k (1 - \beta \cos \vartheta) \\ \gamma k (\beta - \cos \vartheta) \\ -k \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega'/c \\ -\vec{k}' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega'}{c} = \gamma \frac{\omega}{c} (1 - \beta \cos \vartheta)$$

$$\left. \begin{aligned} k'_x &= \gamma k (\cos \vartheta - \beta) \\ k'_y &= k \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\vec{k}'| = \frac{\omega'}{c}$$

In  $I'$  ist der Winkel zwischen  $\vec{k}'$  und  $\hat{e}_x$

$$\cos \vartheta' = \frac{k'_x}{\omega'/c} = \frac{\cos \vartheta - \beta}{1 - \beta \cos \vartheta}$$

$$\Rightarrow \cos \vartheta = \frac{\beta + \cos \vartheta'}{1 + \beta \cos \vartheta'}$$

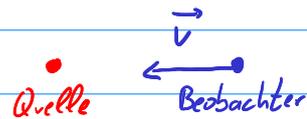
$$\Rightarrow 1 - \beta \cos \vartheta = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta \cos \vartheta'} = \frac{1}{\gamma^2 (1 + \beta \cos \vartheta')}$$

$$\Rightarrow \omega' = \frac{\omega}{\gamma (1 + \beta \cos \vartheta')}$$

↑ Geschwindigkeit der Quelle

Longitudinaler Doppler - Effekt

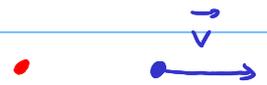
Bewegung auf Quelle zu ( $\vartheta' = \pi$ ):



$$\omega' = \frac{\omega}{\gamma (1 - \beta)} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \omega > \omega \rightarrow \text{Blauverschiebung}$$

Für  $\beta \rightarrow 1$ :  $\omega \rightarrow \infty$

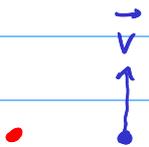
Bewegung von Quelle weg ( $\vartheta' = 0$ ):



$$\omega' = \frac{\omega}{\gamma (1 + \beta)} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \omega < \omega \rightarrow \text{Rotverschiebung}$$

Für  $\beta \rightarrow 1$ :  $\omega \rightarrow 0$

Longitudinaler Doppler - Effekt ( $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ )



$$\omega' = \frac{\omega}{\gamma} = \begin{cases} 0 & \beta \rightarrow 1 \\ 1 - \frac{1}{2}\beta^2 & \beta \ll 1 \end{cases}$$

## 5.4.5 Lorentz-Kraft

Erinnerung: Für ein Teilchen mit Masse  $m$

ist  $p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}$  ein 4-Vektor

$\Rightarrow$  Auch  $\frac{dp^\mu}{d\tau}$  ist ein 4-Vektor

$\hookrightarrow$  Interpretation: Änderung von Energie und Impuls

Erwartung:  $\frac{dp^\mu}{d\tau}$  proportional zu

- Ladung  $q$
- Feldstärke  $F^{\mu\nu}$
- Geschwindigkeit  $u^\mu$

Mögliche Gleichung:  $\frac{dp^\mu}{d\tau} = \kappa q F^{\mu\nu} u_\nu$

$\uparrow$  unbekannte Konstante

Betrachte räumliche Komponente  $\mu = i = 1, 2, 3$

$$\frac{dp^i}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

$$\kappa q F^{i\nu} u_\nu = \kappa q F^{i0} u_0 + \kappa q F^{ij} u_j \quad (j=1,2,3)$$

$\vec{E}_i/c$     $\uparrow$     $\gamma c$     $\uparrow$     $-\epsilon_{ijk} \vec{B}_k$     $\uparrow$     $-\gamma \vec{v}_j$

$$= \kappa q \gamma (\vec{E}_i + (\vec{v} \times \vec{B})_i)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \kappa q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \Rightarrow \kappa = 1$$

Betrachte zeitliche Komponente  $\mu = 0$

$$\frac{dp^0}{dz} = \gamma \frac{dE}{dt}$$

$$q F^{0\nu} u_\nu = q F^{00} u_0 + q F^{0j} u_j \quad \leftarrow = -\gamma \vec{v}_j$$

$\uparrow$   $= 0$                        $\uparrow$   $= -E_j/c$

$$= \gamma q \vec{E} \cdot \vec{v} / c$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{v} = \text{Leistung durch Lorentz-Kraft}$$

## 5.5 Elektrodynamik als Feldtheorie

Erinnerung: Lagrange-Mechanik

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) dt$$

$\uparrow$  Wirkung                       $\uparrow$  Lagrangefunktion:  $L = T - V$

Hamilton-Prinzip:

$$\delta S = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

Beispiel: Gel. Teilchen im Skalarpotential

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \quad V = q \phi(\vec{r}) \Rightarrow L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - q \phi(\vec{r})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m \ddot{\vec{r}} \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -q \vec{\nabla} \phi = + q \vec{E}$$

$$\Rightarrow m \ddot{\vec{r}} = q \vec{E}$$

Ziel: Lorentz-invariante Formulierung

Schritt 1: Integration über Eigenzeit

$$S = \int_{z_1}^{z_2} dz \tilde{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \quad \text{mit } \tilde{L} = \gamma L$$

→ Damit  $S$  Lorentz-invariant ist,  
muss  $\tilde{L}$  Lorentz-invariant sein

Schritt 2: Kinetische Energie proportional zu  
 $u^\mu u_\mu = c^2$ :  $T = \kappa c^2$

Im nicht-rel. Limes:

$$dz \kappa c^2 = \frac{dt}{\gamma} \kappa c^2 = dt \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}} \kappa c^2 \\ \approx dt \left( \kappa c^2 - \frac{\kappa}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right)$$

$$\Rightarrow \kappa = -m$$

Schritt 3: Potentielle Energie proportional  
zu  $A^\mu u_\mu$ :  $V = \lambda A^\mu u_\mu$

Im nicht-rel. Limes:

$$dz \lambda A^\mu u_\mu \stackrel{v \rightarrow 1}{\approx} dt \lambda \frac{\Phi}{c} c$$

$$\Rightarrow \lambda = q$$

$$\Rightarrow \tilde{L} = -mc^2 - q A^\mu u_\mu$$

Können wir auch die Maxwell-Gleichungen aus dem Hamilton-Prinzip herleiten?

Potentielle Energie: Ersetze  $q \rightarrow \rho d^3x$

$$\Rightarrow q A^\mu u_\mu dz \rightarrow A^\mu \underbrace{\rho u_\mu}_{=j_\mu} \underbrace{\frac{1}{\gamma} dt d^3x}_{=d^4x}$$

Kommentar: Unter Lorentztransformation

$$d^4x \rightarrow d^4x' = \underbrace{|\det \Lambda|}_{=1} d^4x$$

↳ Lorentz-invariant

Kinetische Energie:  $w_{\text{em}} = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2)$

Übung ↗  $\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$

$$\Rightarrow S = \int d^4x \underbrace{\left( \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A^\mu j_\mu \right)}_{= \mathcal{L} \text{ (Lagrangedichte)}}$$

Euler-Lagrange-Gleichung:

$$0 = \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\nu} = \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F^{\mu\nu} - j^\nu$$

$$\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$

# §6 Elektrodynamik in Materie

## 6.1 Makroskopische Maxwell-Gleichungen

Bisher: Mikroskopische E- und B-Felder als Funktion von mikroskopischen Ladungs- und Stromdichten

Jetzt: Separation von Längenskalen

$\lambda$	$\gg$	$a$
↑		↑
Längenskala des makroskopischen Problems (z.B. Wellenlänge)		Atomare Längenskala, auf der mikroskopische Felder variieren ( $\sim 10^{-10}$ m)

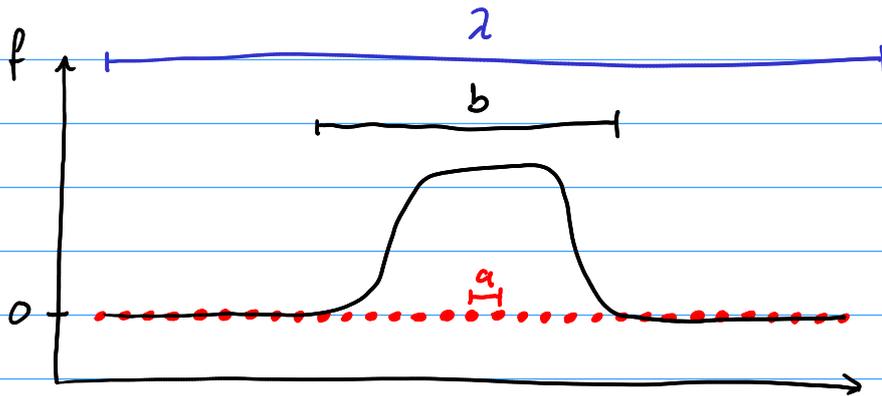
↳ Räumliche Mittelung

$$\langle \psi \rangle(\vec{r}, t) = \int d^3r' \psi(\vec{r}', t) f(\vec{r} - \vec{r}')$$

mit •  $f(\vec{r}) \geq 0$  für alle  $\vec{r}$

•  $\int d^3r f(\vec{r}) = 1$

•  $f(\vec{r}) = 0$  für  $|\vec{r}| > b$   
mit  $a \ll b \ll \lambda$



$$\begin{aligned}
 \text{Es gilt: } \quad \vec{\nabla} \langle \psi \rangle(\vec{r}, t) &= \int d^3 r' \psi(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}} f(\vec{r} - \vec{r}') \\
 &= - \int d^3 r' \psi(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} f(\vec{r} - \vec{r}') \\
 &\stackrel{\text{partielle Integration}}{=} \int d^3 r' \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \psi(\vec{r}') f(\vec{r} - \vec{r}') \\
 &= \langle \vec{\nabla} \psi \rangle(\vec{r}, t)
 \end{aligned}$$

⇒ Mittelung und Ableitung vertauschen

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \langle \vec{E} \rangle = \frac{1}{\epsilon_0} \langle \vec{S} \rangle \quad \vec{\nabla} \langle \vec{B} \rangle = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \langle \vec{E} \rangle = - \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{B} \rangle \quad \vec{\nabla} \times \langle \vec{B} \rangle = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{E} \rangle + \mu_0 \langle \vec{j} \rangle$$

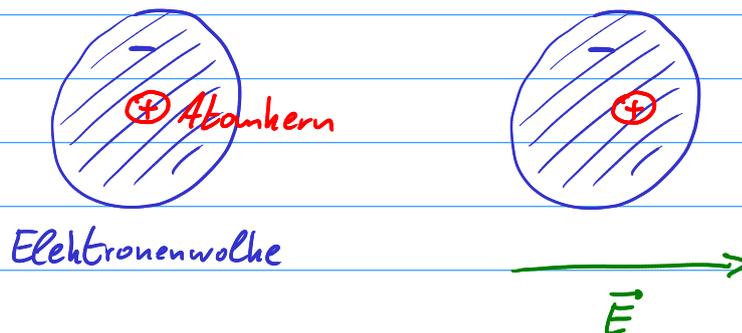
Ab jetzt:  $\langle \vec{E} \rangle \rightarrow \vec{E}$ ,  $\langle \vec{B} \rangle \rightarrow \vec{B}$

Wir müssen also nun  $\langle \vec{S} \rangle$  und  $\langle \vec{j} \rangle$  bestimmen

Unterscheidung zwischen freien und gebundenen Ladungen

$$\rho(\vec{r}) = \rho_{\text{frei}}(\vec{r}) + \rho_{\text{geb}}(\vec{r})$$

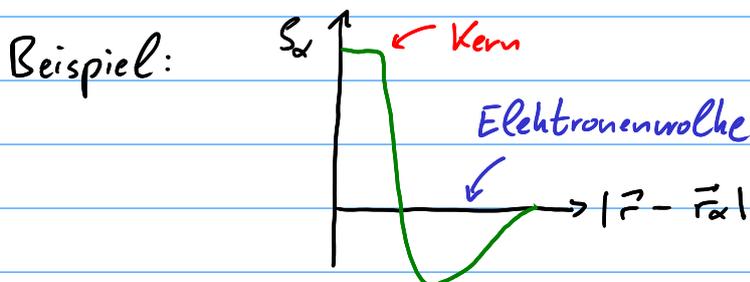
Gebundene Ladungen befinden sich an einem Atom oder Molekül, können aber polarisiert werden



Sei  $\rho_{\alpha}(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})$  die Dichte gebundener Ladungen einer Elementarereinheit (z. B. Atom) am Ort  $\vec{r}_{\alpha}$

Annahmen:

- $\int d^3r \rho_{\alpha}(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) = 0$  (Elementarereinheit neutral)
- $\rho_{\alpha}(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) = 0$  für  $|\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}| > a$



$$\Rightarrow \rho_{\text{geb}}(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})$$

$$\Rightarrow \langle S_{\text{geb}} \rangle(\vec{r}) = \int d^3r' \sum_{\alpha} S_{\alpha}(\vec{r}' - \vec{r}_{\alpha}) f(\vec{r} - \vec{r}') \\ = \sum_{\alpha} \int d^3r'' S_{\alpha}(\vec{r}'') f(\vec{r} - \vec{r}'' - \vec{r}_{\alpha})$$

Da  $a \ll b$  gilt  $|\vec{r}''| \ll |\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}|$

↳ Multipolentwicklung:

$$f(\vec{r} - \vec{r}'' - \vec{r}_{\alpha}) \approx f(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) - \vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) \cdot \vec{r}''$$

$$\Rightarrow \langle S_{\text{geb}} \rangle(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \underbrace{\int d^3r'' S_{\alpha}(\vec{r}'')}_{=0} f(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) \\ - \sum_{\alpha} \underbrace{\int d^3r'' S_{\alpha}(\vec{r}'') \vec{r}''}_{= \vec{p}_{\alpha}} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) \\ = \vec{p}_{\alpha} \quad (\text{Dipolmoment der Elementareinheit})$$

$$= - \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) = - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

mit  $\vec{P}(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha} f(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) = \langle \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) \rangle$

(dielektrische Polarisation)

Die gemittelte Dichte freier Ladungsträger bezeichnet man als makroskopische Ladungsdichte

$$\langle S_{\text{frei}} \rangle(\vec{r}, t) = S_{\text{mahr}}(\vec{r}, t)$$

$$\Rightarrow \langle S \rangle(\vec{r}, t) = S_{\text{mahr}}(\vec{r}, t) - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}, t)$$

Ab jetzt:  $S_{\text{mahr}} \rightarrow S$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (S - \vec{\nabla} \cdot \vec{P})$$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = S$$

mit  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  (dielektrische Verschiebung)

Analog:  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_{\text{frei}}(\vec{r}, t) + \vec{j}_{\text{geb}}(\vec{r}, t)$

$$\vec{j}_{\text{geb}} = \sum_{\alpha} \vec{j}_{\alpha}(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}, t)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{j}_{\text{geb}} \rangle(\vec{r}, t) &= \int d^3r' \sum_{\alpha} \vec{j}_{\alpha}(\vec{r}' - \vec{r}_{\alpha}, t) f(\vec{r} - \vec{r}') \\ &\approx \sum_{\alpha} \int d^3r'' \vec{j}_{\alpha}(\vec{r}'', t) (f(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) - \vec{r}'' \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})) \end{aligned}$$

Erinnerung:

$$\begin{aligned} \int d^3r \frac{\partial}{\partial x_i} (j_i(\vec{r}) x_j) &= \int d^3r \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{j})}_{= -\frac{\partial}{\partial t} S(\vec{r})} x_j + \int d^3r j_i(\vec{r}) \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_i}}_{= \delta_{ij}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} S(\vec{r}) + \int d^3r j_i(\vec{r}) \delta_{ij} \end{aligned}$$

$$\text{Aber } \int d^3r \frac{\partial}{\partial x_i} (j_i(\vec{r}) x_j) = \oint d\vec{f}_i j_i(\vec{r}) x_j \stackrel{j(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0}{=} 0$$

$$\Rightarrow \int d^3r j_i(\vec{r}) = \int d^3r \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}) x_j = \frac{d}{dt} P_j$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{\alpha} \int d^3r'' \vec{j}_{\alpha}(\vec{r}'', t) f(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) \\ = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha}(t) f(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Für den zweiten Term benötigen wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3r \frac{\partial}{\partial x_i} (j_i x_j x_k) \\ &= \int d^3r (\vec{\nabla}_j x_j x_k + j_j x_k + j_k x_j) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int d^3r j_j x_k = \int d^3r \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} x_j x_k - j_k x_j \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int d^3r j_j x_k &= \frac{1}{2} \int d^3r (j_j x_k + j_j x_k) \\ &\quad \frac{1}{2} \int d^3r (j_j x_k - j_k x_j + \frac{\partial \rho}{\partial t} x_j x_k) \\ &= \epsilon_{kji} m_i + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int d^3r \rho x_j x_k \\ &\quad \uparrow \vec{m} = \int d^3r \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{j} \end{aligned}$$

Der Quadrupol-Beitrag kann vernachlässigt werden

$$\Rightarrow - \sum_{\alpha} \int d^3 r'' j_{xj}(\vec{r}'', t) x''_k \frac{\partial}{\partial x_k} f(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})$$

$$= \sum_{\alpha} \epsilon_{jki} m_i \frac{\partial}{\partial x_k} f(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})$$

$$= \epsilon_{jki} \frac{\partial}{\partial x_k} M_i$$

$$\text{mit } \vec{M}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} \vec{m}_{\alpha}(t) f(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})$$

$$= \left\langle \sum_{\alpha} \vec{m}_{\alpha}(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) \right\rangle$$

(Magnetisierung)

$$\Rightarrow \left\langle \vec{j}_{\text{geb}}(\vec{r}, t) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}, t)$$

Wie zuvor identifizieren wir

$$\left\langle \vec{j}_{\text{frei}}(\vec{r}, t) \right\rangle = \vec{j}_{\text{mahr}}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{j}(\vec{r}, t)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \mu_0 \left( \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{M} \right)$$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = \vec{j}$$

$$\text{mit } \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (\text{magn. Feldstärke})$$

Wiederholung:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$  mit  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = \vec{j}$$

mit  $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$

↳ Gleichungssystem unterbestimmt!  
Lösung nur möglich, falls  
Zusammenhang  $\vec{E}, \vec{B} \leftrightarrow \vec{P}, \vec{M}$   
bekannt

## 6.2 Elektrische und magnetische Suszeptibilität

Annahme: Linearer Zusammenhang zw.  $\vec{E} \leftrightarrow \vec{P}$   
bzw.  $\vec{H} \leftrightarrow \vec{M}$

$$\Rightarrow \vec{P} = 0 \text{ für } \vec{E} = 0 \quad (\text{Paraelektrikum})$$

$$\vec{M} = 0 \text{ für } \vec{B} = 0 \quad (\text{Paramagnetikum})$$

Aber: Zusammenhang nicht-lokal in Raum und Zeit  
→ Faltung

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int d^3r' dt' \chi_e(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{E}(\vec{r}', t')$$

↑  
el. Suszeptibilität

$$\vec{M}(\vec{r}, t) = \int d^3r' dt' \chi_m(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{H}(\vec{r}', t')$$

↑  
magn. Suszeptibilität

Es gilt Kausalität:  $\chi_{e,m}(\vec{r}, t) = 0$  für  $t < 0$

$$\text{Mit } \chi_{e,m}(\vec{k}, \omega) = \int d^3r dt e^{i\omega t} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \chi_{e,m}(\vec{r}, t)$$

wird aus der Faltung eine Multiplikation:

$$\vec{P}(\vec{k}, \omega) = \epsilon_0 \chi_e(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega)$$

$$\vec{M}(\vec{k}, \omega) = \chi_m(\vec{k}, \omega) \vec{H}(\vec{k}, \omega)$$

$$\Rightarrow \vec{D}(\vec{k}, \omega) = \epsilon(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega)$$

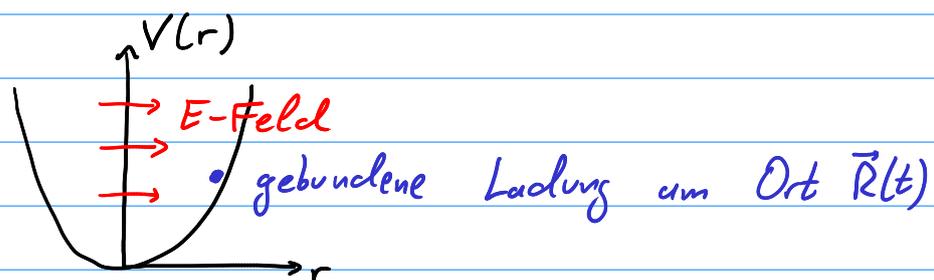
$$\vec{B}(\vec{k}, \omega) = \mu(\vec{k}, \omega) \vec{H}(\vec{k}, \omega)$$

$$\text{mit } \epsilon(\vec{k}, \omega) = \epsilon_0 (1 + \chi_e(\vec{k}, \omega)) \quad (\text{Permittivität})$$

$$\mu(\vec{k}, \omega) = \mu_0 (1 + \chi_m(\vec{k}, \omega)) \quad (\text{Permeabilität})$$

Beispiel: Lorentz-Modell

Gebundene Ladung wird durch harmonischen Oszillator genähert:



Bewegungsgleichung:

$$m \ddot{\vec{R}}(t) + \gamma \dot{\vec{R}}(t) + \omega_0^2 \vec{R}(t) = q \vec{E}(t)$$

Masse                      Dämpfung                      Eigenfrequenz                      Ladung

Fouriertransformation nach der Zeit:  $\frac{d}{dt} \rightarrow -i\omega$

$$\Rightarrow m [(-i\omega)^2 + \gamma(-i\omega) + \omega_0^2] \vec{R}(\omega) = q \vec{E}(\omega)$$

$$\Rightarrow \vec{R}(\omega) = \frac{q \vec{E}(\omega)}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}$$

$$\Rightarrow \text{Dipolmoment } \vec{p} = q \vec{R}$$

$\Rightarrow$  Polarisation aus räuml. Mittelung

$$\vec{P}(\vec{r}, \omega) = \left\langle \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}(\omega_{0\alpha}^2 - \omega^2 - i\gamma_{\alpha}\omega)} \delta(\vec{r} - \vec{R}_{\alpha}) \right\rangle \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

alle Oszillatoren  
identisch =  $\frac{q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} \underbrace{\left\langle \sum_{\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{R}_{\alpha}) \right\rangle}_{=n} \vec{E}(\vec{r}, \omega)$

(Dichte der Oszillatoren)

$$\Rightarrow P(\vec{k}, \omega) = \frac{q^2 n}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} \vec{E}(\vec{k}, \omega)$$

$$= \epsilon_0 \chi_e(\omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega)$$

$$\Rightarrow \chi_e(\omega) = \chi_e(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad \text{mit } \chi_e(0) = \frac{q^2 n}{\epsilon_0 m \omega_0^2}$$

Bemerkung: • Die Funktion

$$\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \xi^2 - i\gamma\xi} e^{-i\xi t} \quad \text{mit } \xi \in \mathbb{C}$$

hat keine Singularität für  $\text{Im } \xi > 0$

Funktionentheorie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} e^{-i\omega t} d\omega = 0 \quad \text{für } t < 0$$

$$\Rightarrow \chi_e(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{für } t < 0 \quad (\text{Kausalität})$$

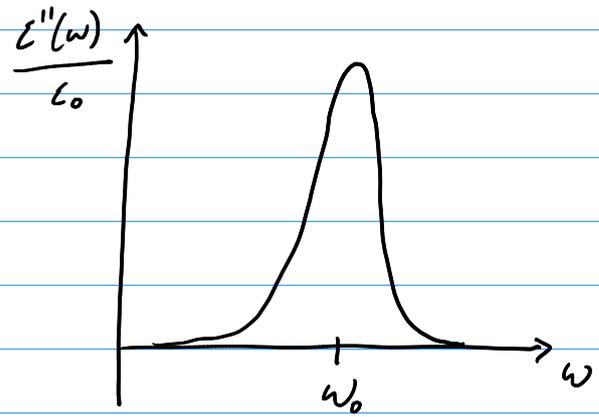
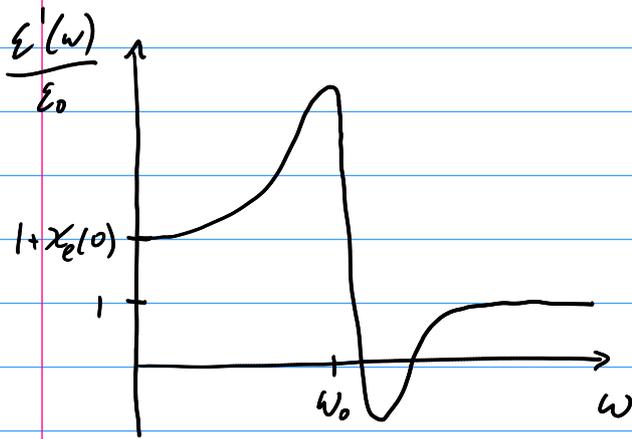
- Die Fouriertransformierte Permittivität ist komplex:

$$\epsilon(\vec{k}, \omega) = \epsilon'(\vec{k}, \omega) + i \epsilon''(\vec{k}, \omega)$$

mit

$$\epsilon'(\omega) = \epsilon_0 \left( 1 + \chi_e(0) \frac{\omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \right)$$

$$\epsilon''(\omega) = \epsilon_0 \chi_e(0) \frac{\omega_0^2 \gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$



Im Limes  $\omega \rightarrow 0$  (Elektrostatik):

$$\varepsilon'(\omega) \rightarrow 1 + \chi_e(0)$$

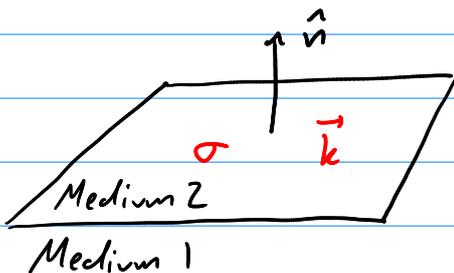
$$\varepsilon''(\omega) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon \vec{E}(\vec{r})$$

$$\text{Analog: } \vec{B}(\vec{r}) = \mu \vec{H}(\vec{r})$$

## 6.3 Grenzflächen

Betrachte Grenzfläche zwischen zwei Medien mit Flächenladungsdichte  $\sigma$  und -stromdichte  $\vec{k}$  von freien Ladungsträgern



$$\cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad \Rightarrow \quad (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n} = \sigma$$

$$\cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n} = 0$$

siehe  
Nachtrag  
am Ende

$$\cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

$$\cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = \vec{j} \quad \Rightarrow \quad (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{t} = \hat{t} (\vec{k} \times \hat{n})$$

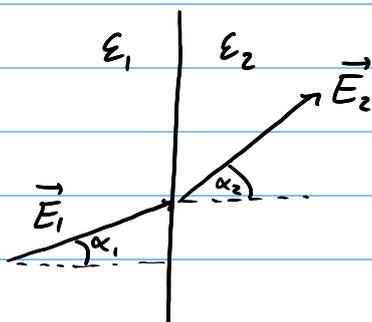
mit Tangentialvektor  $\hat{t}$

Falls es keine freien Ladungsträger gibt (Dielektrikum), dann gilt:

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{und} \quad (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \hat{n} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\parallel,1} = \vec{E}_{\parallel,2}, \quad \vec{D}_{\perp,1} = \vec{D}_{\perp,2}, \quad \vec{B}_{\perp,1} = \vec{B}_{\perp,2}, \quad \vec{H}_{\parallel,1} = \vec{H}_{\parallel,2}$$

Beispiel: Feldlinienverlauf



$$\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1$$

$$\vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E}_2$$

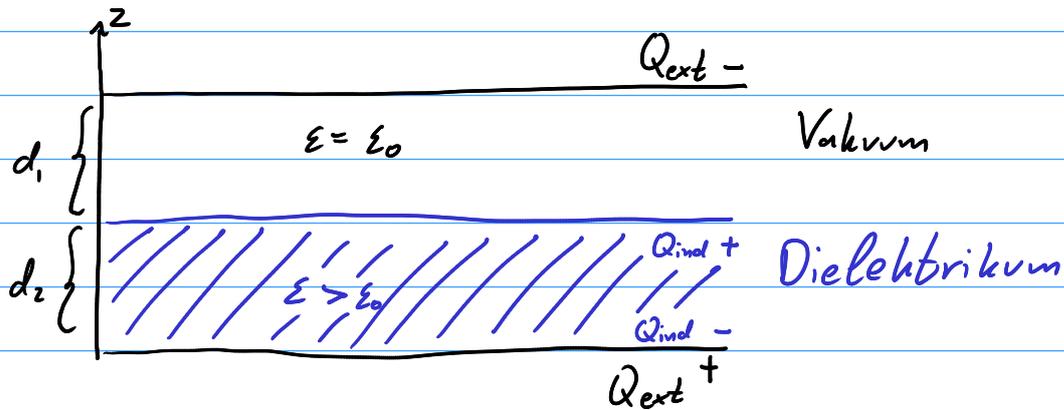
$$E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2$$

$$D_1 \cos \alpha_1 = D_2 \cos \alpha_2$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \alpha_1}{\epsilon_1} = \frac{\tan \alpha_2}{\epsilon_2}$$

$$\Rightarrow \text{Für } \epsilon_2 > \epsilon_1 \text{ ist } \alpha_2 > \alpha_1$$

Beispiel: Plattenkondensator



Symmetrie:  $\vec{E}(\vec{r}) = E(z) \hat{e}_z$        $\vec{D}(\vec{r}) = D(z) \hat{e}_z$

Stetigkeit:  $D(z) = \begin{cases} 0 & \text{außerhalb d. Kondensators} \\ D & \text{innerhalb d. Kondensators} \end{cases}$

mit  $D = \sigma_{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{ext}}}{A}$

$$E(z) = \begin{cases} 0 & \text{außerhalb} \\ D/\epsilon_0 & \text{Vakuum} \\ D/\epsilon & \text{Dielektrikum} \end{cases}$$

$$P(z) = \vec{D}(z) - \epsilon_0 \vec{E}(z) = \begin{cases} 0 & \text{Vakuum} \\ \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} D & \text{Dielektrikum} \end{cases}$$

Induzierte Oberflächenladungsdichte:

$$\sigma_{\text{ind}} = P_{\parallel,2} - P_{\parallel,1} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} D = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \sigma_{\text{ext}}$$

$$\Rightarrow Q_{\text{ind}} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} Q_{\text{ext}}$$

Potentialdifferenz:

$$\Delta V = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{D}{\epsilon_0} d_1 + \frac{D}{\epsilon} d_2 = \frac{Q_{\text{ext}}}{A} \left( \frac{d_1}{\epsilon_0} + \frac{d_2}{\epsilon} \right)$$

Kapazität:

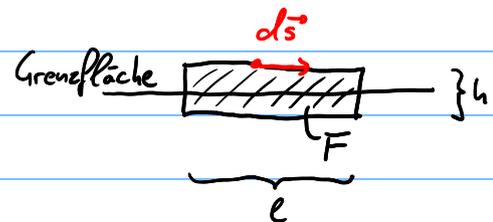
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{A}{d_1/\epsilon_0 + d_2/\epsilon}$$

Für  $d_1 \rightarrow 0$ ,  $d_2 \rightarrow d$ :  $C = \frac{\epsilon A}{d} = \epsilon C_{\text{Vakuum}}$

Nachtrag

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow \int_F d\vec{l} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}) = 0$$



$$\Rightarrow \oint_{\partial F} d\vec{s} \cdot \vec{E} + \frac{d}{dt} \int_F d\vec{l} \cdot \vec{B} = 0$$

$l \gg h$

$$\Rightarrow (E_{\parallel,2} - E_{\parallel,1}) \cdot l + \frac{d}{dt} \Phi_B = 0$$

↑  
Magn. Fluss durch F

Im Limes  $h \rightarrow 0$  geht  $\Phi_B \rightarrow 0 \Rightarrow E_{\parallel,2} = E_{\parallel,1}$

## 6.4 Energieerhaltung in Materie

Wiederholung: 
$$\vec{D}(\vec{k}, \omega) = \epsilon(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega)$$
$$= (\epsilon'(\vec{k}, \omega) + i\epsilon''(\vec{k}, \omega)) \vec{E}(\vec{k}, \omega)$$

$$\vec{B}(\vec{k}, \omega) = \mu(\vec{k}, \omega) \vec{H}(\vec{k}, \omega)$$
$$= (\mu'(\vec{k}, \omega) + i\mu''(\vec{k}, \omega)) \vec{H}(\vec{k}, \omega)$$

Welche Rolle spielt der Imaginärteil?

Erinnerung: Energieübertrag auf freie Ladungen

$$w_{\text{frei}} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Maxwell-Gleichungen in Materie:

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = (\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}) \cdot \vec{E}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\vec{E} \times \vec{H}) & \xrightarrow{\quad} -\vec{\nabla}(\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H}(\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{D}\right) \cdot \vec{E} \\ = \vec{H}(\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E}(\vec{\nabla} \times \vec{H}) & \\ = -\vec{\nabla}(\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} - \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{D}\right) \cdot \vec{E} & \end{aligned}$$

Wir definieren

$$w_{\text{em}} = \frac{1}{2} (\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{D} \cdot \vec{E}) \quad (\text{Energiedichte})$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (\text{Poynting-Vektor})$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} w_{em} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \\
&= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} \right) \cdot \vec{B} + \vec{H} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} + \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right) \cdot \vec{E} + \vec{D} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \\
&= \underbrace{-\vec{j} \cdot \vec{E}}_{\text{Energieübertrag an freie Ladungen}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} \right) \cdot \vec{B} - \vec{H} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} + \vec{D} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} - \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right) \cdot \vec{E} \right)}_{\text{Energieübertrag an gebundene Ladungen}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{w}_{geb} = -\frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} \right) \cdot \vec{B} - \vec{H} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} + \vec{D} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} - \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right) \cdot \vec{E} \right)$$

Betrachte eine ebene Welle:

$$\vec{E}_c = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} \quad \vec{D}_c = \varepsilon(\vec{k}, \omega) \vec{E}_c$$

$$\vec{H}_c = \vec{H}_0 e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} \quad \vec{B}_c = \mu(\vec{k}, \omega) \vec{H}_c$$

Im zeitlichen Mittel gilt: siehe Nachtrag

$$\begin{aligned}
\langle \dot{w}_{geb} \rangle &= \frac{i\omega}{4} \left( \vec{H}_0 \cdot \vec{B}_0^* - \vec{H}_0^* \cdot \vec{B}_0 \right) \\
&\quad + \frac{i\omega}{4} \left( \vec{E}_0 \cdot \vec{D}_0^* - \vec{E}_0^* \cdot \vec{D}_0 \right) \\
&= \frac{i\omega}{4} \left( \mu^*(\vec{k}, \omega) - \mu(\vec{k}, \omega) \right) |\vec{H}_0|^2 \\
&\quad + \frac{i\omega}{4} \left( \varepsilon^*(\vec{k}, \omega) - \varepsilon(\vec{k}, \omega) \right) |\vec{E}_0|^2 \\
&= \frac{\omega}{2} \left( \mu''(\vec{k}, \omega) |\vec{H}_0|^2 + \varepsilon''(\vec{k}, \omega) |\vec{E}_0|^2 \right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Imaginärteil der Permittivität und Permeabilität beschreibt Energieverlust an gebundene Ladungen

Bemerkung: Es muss gelten  $\mu'', \varepsilon'' > 0$ ,  
da sonst die EM Welle  
Energie gewinnen würde!

## 6.5 Elektromagn. Wellen in Materie

Annahme: • Große Wellenlänge  $\lambda$

$$\Rightarrow \varepsilon(\vec{k}, \omega) \approx \varepsilon(0, \omega) = \varepsilon(\omega)$$

$$\mu(\vec{k}, \omega) \approx \mu(0, \omega) = \mu(\omega)$$

• Keine freien Ladungen und Ströme

$$\rho = 0, \quad \vec{j} = 0$$

Maxwell-Gleichungen nach Fourier-Transformation

$$\text{I) } \varepsilon(\omega) \vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega) = 0$$

$$\text{II) } \mu(\omega) \vec{k} \cdot \vec{H}(\vec{k}, \omega) = 0$$

$$\text{III) } \vec{k} \times \vec{H}(\vec{k}, \omega) + \omega \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega) = 0$$

$$\text{IV) } \vec{k} \times \vec{E}(\vec{k}, \omega) - \omega \mu(\omega) \vec{H}(\vec{k}, \omega) = 0$$

Für  $\epsilon(\omega) \neq 0$  folgt aus I)  $\vec{E} \perp \vec{k}$

Für  $\mu(\omega) \neq 0$  folgt aus II)  $\vec{H} \perp \vec{k}$

↳ EM-Wellen in Materie sind transversal

$$\vec{k} \times \text{III): } 0 = \underbrace{\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{H}(\vec{k}, \omega))}_{\vec{k}(\underbrace{\vec{k} \cdot \vec{H}}_{=0}) - \vec{H}k^2} + \omega \epsilon(\omega) \underbrace{\vec{k} \times \vec{E}(\vec{k}, \omega)}_{= \omega \mu \vec{H}}$$

$$= (-k^2 + \omega^2 \epsilon(\omega) \mu(\omega)) \vec{H}(\vec{k}, \omega)$$

$$\vec{k} \times \text{IV): } 0 = \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}(\vec{k}, \omega)) - \omega \mu(\omega) \vec{k} \times \vec{H}(\vec{k}, \omega)$$

$$= (-k^2 + \omega^2 \epsilon(\omega) \mu(\omega)) \vec{E}(\vec{k}, \omega)$$

↳ Wellengleichung mit verallgemeinerter Dispersion

$$k^2 = \epsilon(\omega) \mu(\omega) \omega^2$$

$$= n(\omega)^2 \omega^2 / c^2$$

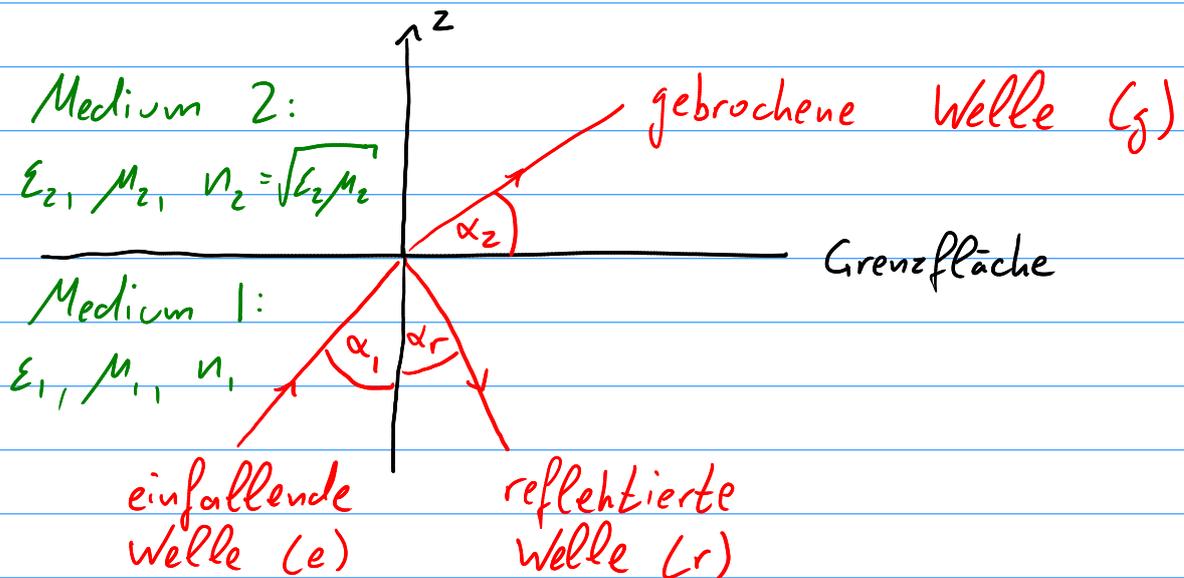
mit dem komplexen Brechungsindex

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} \frac{\mu(\omega)}{\mu_0}} = c \sqrt{\epsilon(\omega) \mu(\omega)}$$



## 6.6 Reflexion und Brechung

An einer Grenzfläche wird eine einfallende EM-Welle in zwei Anteile zerlegt. Ein Anteil wird reflektiert, der andere wird gebrochen



Vereinfachung:  $\epsilon$  und  $\mu$  reell

→ keine Dämpfung

Randbedingungen:  $\epsilon_1 E_{\perp,1} = \epsilon_2 E_{\perp,2}$

$$\mu_1 H_{\perp,1} = \mu_2 H_{\perp,2}$$

$$E_{\parallel,1} = E_{\parallel,2}$$

$$H_{\parallel,1} = H_{\parallel,2}$$

⇒ Phasenfaktoren der drei Wellen müssen bei  $z=0$  für alle  $t$  übereinstimmen

$$\vec{k}_e \cdot \vec{r} - \omega_e t|_{z=0} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t|_{z=0} = \vec{k}_g \cdot \vec{r} - \omega_g t|_{z=0}$$

$$x=y=0 \Rightarrow \omega_e = \omega_r = \omega_g = \omega$$

$$x \neq 0 \Rightarrow k_{ex} = k_{rx} = k_{gx}$$

$$y \neq 0 \Rightarrow k_{ey} = k_{ry} = k_{gy} = 0$$

↙ Wahl des Koordinatensys.

$$k_{ex} = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \alpha_i$$

$$k_{er} = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \alpha_r$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \alpha_r$$

Reflexionsgesetz

$$k_{gx} = n_2 \frac{\omega}{c} \sin \alpha_2$$

$$\Rightarrow n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

Snellius' Brechungsgesetz

Für  $\frac{n_1}{n_2} \sin \alpha_1 > 1$  ist keine Brechung möglich

⇒ Totalreflexion für  $\alpha > \alpha_{TR} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$

## Nachtrag

$$\begin{aligned}\langle \frac{1}{2} \vec{H} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \rangle &= \langle \frac{1}{2} \operatorname{Re} \vec{H}_c \cdot \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re} \vec{B}_c \rangle \\ &= \langle \frac{1}{8} (\vec{H}_c + \vec{H}_c^*) (\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_c + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_c^*) \rangle \\ &= \frac{1}{8} \langle \underbrace{i\omega (\vec{H}_c \cdot \vec{B}_c^* - \vec{H}_c^* \cdot \vec{B}_c)}_{= i\omega (\vec{H}_0 \cdot \vec{B}_0^* - \vec{H}_0^* \cdot \vec{B}_0)} \rangle \\ &\quad - \frac{1}{8} \langle \underbrace{i\omega (\vec{H}_c \cdot \vec{B}_c - \vec{H}_c^* \cdot \vec{B}_c^*)}_{= 0} \rangle \\ &= \frac{1}{8} i\omega (\vec{H}_0 \cdot \vec{B}_0^* - \vec{H}_0^* \cdot \vec{B}_0)\end{aligned}$$

## 6.7 Elektromagn. Wellen in Leitern

In Leitern existieren frei bewegliche Ladungen

⇒ Elektrische Felder erzeugen Ströme:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \int d^3r' dt' \sigma(\vec{r}-\vec{r}', t-t') \vec{E}(\vec{r}', t')$$

Fourier-Transformation:

$$\vec{j}(\vec{k}, \omega) = \sigma(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega)$$

↑  
Leitfähigkeit

Für kleine  $k$ :  $\sigma(\vec{k}, \omega) \approx \sigma(0, \omega) = \sigma(\omega)$

↑  
optische Leitfähigkeit

Fourier-Transformation von  $\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = \vec{j}$ :

$$i\vec{k} \times \vec{H}(\vec{k}, \omega) + i\omega \vec{D}(\vec{k}, \omega) = \vec{j}(\vec{k}, \omega) = \sigma(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega)$$

↑  
 $= \epsilon(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega)$

$$\Rightarrow i\vec{k} \times \vec{H}(\vec{k}, \omega) + i\omega \left( \epsilon(\vec{k}, \omega) - \frac{\sigma(\vec{k}, \omega)}{i\omega} \right) \vec{E}(\vec{k}, \omega) = 0$$

=  $\epsilon_{\text{eff}}(\vec{k}, \omega)$

Außerdem gilt:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{D}(\vec{k}, \omega) = \rho(\vec{k}, \omega)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow i\omega \rho(\vec{k}, \omega) = -i\vec{k} \cdot \vec{j}(\vec{k}, \omega)$$

$$\Rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{D}(\vec{k}, \omega) = \frac{i\vec{k} \cdot \vec{j}(\vec{k}, \omega)}{i\omega} = \frac{\sigma(\vec{k}, \omega)}{\omega} \vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left( \epsilon(\vec{k}, \omega) - \frac{\sigma(\vec{k}, \omega)}{i\omega} \right)}_{= \epsilon_{\text{eff}}(\vec{k}, \omega)} \vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega) = 0$$

$\Rightarrow$  Inhomogene Maxwell-Gleichungen haben die gleiche Form wie für Dielektrika mit der effektiven dielektrischen Funktion

$$\epsilon_{\text{eff}}(\vec{k}, \omega) = \epsilon(\vec{k}, \omega) - \frac{\sigma(\vec{k}, \omega)}{i\omega}$$

↑ gebundene Ladungen      ↑ freie Ladungen

## 6.7.1 Drude-Modell

Erinnerung: Lorentz-Modell

$$\chi_e(\omega) = \frac{q^2 n}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Freie Ladungen können durch das Lorentz-Modell beschrieben werden mit  $\omega_0 \rightarrow 0$  (kein Bindungspotential)

$$m \ddot{\vec{R}}(t) + \gamma \dot{\vec{R}}(t) = q \vec{E}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{\text{eff}}(\omega) = \epsilon(\omega) + \frac{q^2 n_f}{m} \frac{1}{-\omega^2 - i\gamma\omega}$$

$$\Rightarrow \sigma(\omega) = \frac{\sigma(0)}{1 - i\omega/\gamma} \quad \text{mit} \quad \sigma(0) = \frac{q^2 n_f}{m \gamma}$$

↙ Leitfähigkeit für  $\omega=0$

Zur Bestimmung von  $\gamma$  betrachten wir ein konstantes E-Feld ( $\omega=0$ )

Freie Ladungen beschleunigen mit  $a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m}$

$$\Rightarrow \text{Zurückgelegte Distanz: } \ell = \frac{1}{2} a t^2$$

Annahme: Nach einer Zeit  $\tau$  streuen die Teilchen und verlieren ihre Geschwindigkeit

$$\rightarrow \text{Driftgeschwindigkeit } v = \frac{\ell}{\tau} = \frac{1}{2} a \tau$$

$$\Rightarrow j = \underset{\uparrow n_f \cdot q}{S} \cdot v = \frac{n_f \tau q^2 E}{2m} = \sigma(0) E$$

Der Vergleich mit dem vorherigen Ergebnis führt zu

$$\gamma = \frac{2}{\tau}$$

## 6.7.2 Plasmafrequenz

Alternative Schreibweise:

$$\epsilon_{\text{eff}}(\omega) = \epsilon(\omega) - \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}$$

$$\text{mit } \omega_p = \sqrt{\frac{n_p q^2}{m \epsilon_0}} \quad (\text{Plasmafrequenz})$$

Für  $\omega \gg \gamma$  gilt

$$\epsilon_{\text{eff}}(\omega) \approx \epsilon(\omega) - \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

↳ Imaginärteil vernachlässigbar

Für  $\omega < \omega_p \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon(\omega)}}$  ist  $\epsilon_{\text{eff}}(\omega) < 0$

$$\Rightarrow n(\omega) = c \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}(\omega) \mu(\omega)} = i k(\omega) \quad (\text{rein imaginär})$$

↳ Die Welle kann nicht in den Leiter eindringen und wird vollständig reflektiert

Für  $\omega > \omega_p \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon(\omega)}}$  ist  $n = n_r$  (reell)

↳ Leiter verhält sich wie Dielektrikum (durchsichtig für EM-Wellen)

Dispersionsrelation:  $\epsilon_{\text{eff}}(\omega) \mu(\omega) \omega^2 = k^2$

$$\Rightarrow \epsilon(\omega) \mu(\omega) \omega^2 - \epsilon_0 \mu(\omega) \omega_p^2 = k^2$$

$$\Rightarrow \epsilon(\omega) \mu(\omega) \omega^2 = k^2 + \epsilon_0 \mu(\omega) \omega_p^2$$

Für  $\epsilon(\omega) = \epsilon_0$ ,  $\mu(\omega) = \mu_0$

$$\Rightarrow \omega^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2$$

Ausblick Quantenmechanik:  $p^m = \hbar k^m$

Energie eines Photons:  $E = \hbar \omega$

Impuls eines Photons:  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$

$$\Rightarrow E^2 = p^2 c^2 + m_p^2 c^4$$

$$\text{mit } m_p = \frac{\hbar \omega_p}{c^2}$$

Energie-Impuls-Beziehung für ein Teilchen  
mit Masse  $m_p$

$\Rightarrow$  Hochenergetische Photonen verhalten sich in  
einem Leiter wie massive Teilchen mit  
 $m_p = \hbar \omega_p / c^2$  (Plasma masse)

## 6.8 Kommentar: Materie und Relativität

Wiederholung:  $v_p = \frac{c}{n}$  mit  $n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{\mu}{\mu_0}}$

Im Lorentz-Modell ist

$$\epsilon'(\omega) = \epsilon_0 \left( 1 + \chi_e(0) \frac{\omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \right)$$

$\Rightarrow$  Für  $\omega \approx \omega_0$  wird  $\epsilon'(\omega) < \epsilon_0$

$$\hookrightarrow n < 1 \Rightarrow v_p > c$$

Kein Widerspruch mit SRT, da Information mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$  übertragen wird

Für  $n > 1$  ist  $v_p, v_g < c$

$\Rightarrow$  Massive Teilchen mit  $\gamma \gg 1$  können sich schneller bewegen als EM-Wellen

$\hookrightarrow$  Polarisation kann nicht schnell genug reagieren

$\Rightarrow$  Konstruktive Interferenz atomarer Dipole

$\Rightarrow$  Čerenkov-Strahlung

$$\frac{dE}{dx} = \frac{q^2 \mu}{4\pi} \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) \int_0^{\omega_{\max}} \omega d\omega$$

$\swarrow \omega_{\max} \approx \omega_0$